数理解析研究所講究録
第 1637 巻 2009 年 139-144

高階常微分方程式の終局的正値解の漸近挙動

愛媛大・理工（理学系） 内藤 学 (Manabu Naito)
Faculty of Science, Ehime University

次の形の高階常微分方程式を考える:

$$x^{(n)}+\sigma p(t)|x|^{\gamma}\operatorname{sgn} x=0 \quad (t \geqq t_0). \tag{1}$$

ここで, $n \geqq 2$, $\sigma=+1$ または $\sigma=-1$, $p(t)$ は区間 $[t_0,\infty)$ 上の連続関数で $p(t)>0$ $(t \geqq t_0)$, $\gamma>0$ と仮定する. 目的は, ある特定のクラスに属する (1) の終局的正値解 $x=x(t)$ の $t\to\infty$ のときの漸近挙動を調べることである.

方程式 (1) について以下のことが知られている.

Kiguradze の補題 $x(t)$ を (1) の終局的正値解とする. このとき, ある整数 k, $0 \leqq k \leqq n$, $(-1)^{n-k-1}\sigma=1$, に対して

$$\begin{cases} x^{(i)}(t)>0 \quad (t:\text{十分大}), & i=1,\dots,k, \\ (-1)^{i-k}x^{(i)}(t)>0 \quad (t:\text{十分大}), & i=k+1,\dots,n, \end{cases} \tag{2}$$

が成立する.

方程式 (1) の終局的正値解 $x(t)$ で性質 (2) を満たすものの全体を $\mathcal{N}_k$ と記す. 整数 k が

$$1 \leqq k \leqq n-1, \quad (-1)^{n-k-1}\sigma=1, \tag{3}$$

のとき, $\mathcal{N}_k$ クラスに属する終局的正値解 $x(t)$ について次の 3 つのうちのどれか 1 つが起こる.

- $\displaystyle\lim_{t\to\infty} x(t)/t^k$ が正の有限値として存在; (4)
- $\displaystyle\lim_{t\to\infty} x(t)/t^k=0$ かつ $\displaystyle\lim_{t\to\infty} x(t)/t^{k-1}=\infty$; (5)
- $\displaystyle\lim_{t\to\infty} x(t)/t^{k-1}$ が正の有限値として存在. (6)

$\mathcal{N}_k$ クラスに属する終局的正値解 $x(t)$ で (4), (5), (6) を満たすものの全体を, それぞれ

$$\mathcal{N}_k[\max], \quad \mathcal{N}_k[\mathrm{int}], \quad \mathcal{N}_k[\min]$$

と記す. このとき, 方程式 (1) に $\mathcal{N}_k[\max]$ クラスの解; $\mathcal{N}_k[\mathrm{int}]$ クラスの解; $\mathcal{N}_k[\min]$ クラスの解が存在するための条件が次のように求まっている.

- $\gamma > 0$ のとき, (1) が $\mathcal{N}_k[\max]$ クラスの解をもつための必要十分条件は

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{n-k-1+\gamma k} p(t)dt < \infty. \tag{7}$$

- $\gamma > 0$ のとき, (1) が $\mathcal{N}_k[\min]$ クラスの解をもつための必要十分条件は

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{n-k+\gamma(k-1)} p(t)dt < \infty. \tag{8}$$

- $0 < \gamma < 1$ のとき, (1) が $\mathcal{N}_k[\mathrm{int}]$ クラスの解をもつもつための必要十分条件は

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{n-k-1+\gamma k} p(t)dt < \infty \quad \text{かつ} \quad \int_{t_0}^{\infty} t^{n-k+\gamma(k-1)} p(t)dt = \infty. \tag{9}$$

- $\gamma > 1$ のとき, (8) は (1) が $\mathcal{N}_k[\mathrm{int}]$ クラスの解をもつための必要条件である.

注意. 優線形 $\gamma > 1$ の場合, $\mathcal{N}_k[\mathrm{int}]$ クラスの解が存在するための必要十分条件を見い出す問題は未解決である.

以下, 方程式は劣線形 $0 < \gamma < 1$ で, 整数 k は (3) を満たすものとする.

定理 1 $x(t)$, $y(t)$ を, それぞれ

$$x^{(n)} + \sigma p(t)|x|^{\gamma}\operatorname{sgn} x = 0 \tag{10}$$

$$y^{(n)} + \sigma q(t)|y|^{\gamma}\operatorname{sgn} y = 0 \tag{11}$$

の解で, ともに, $\mathcal{N}_k[\mathrm{int}]$ クラスに属するものとする. また, ある定数 $M > 0$ に対して

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{t} s^{-\gamma}\left(\int_{s}^{\infty}(r-s)^{n-k-1}r^{k\gamma}p(r)\,dr\right)ds \\ \displaystyle\leqq M\int_{t_0}^{t}\left(\int_{s}^{\infty}(r-s)^{n-k-1}r^{(k-1)\gamma}p(r)\,dr\right)ds \qquad (t:\text{十分大}) \end{cases} \tag{12}$$

と仮定する. このとき

$$p(t) \sim q(t) \quad (t \to \infty) \tag{13}$$

ならば

$$x(t) \sim y(t) \quad (t \to \infty)$$

である．ここで，一般に，$f(t) \sim g(t)\ (t \to \infty)$ は $\lim_{t\to\infty} f(t)/g(t) = 1$ の意味である．

定理 1 の証明のために次の補題 (ロピタルの定理の制限拡張版) を用いる．

補題 1 $u, v \in C^1[t_0, \infty)$, $u(t) > 0$, $u'(t) > 0$, $\lim_{t\to\infty} u(t) = \infty$ ならば

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{v'(t)}{u'(t)} \leqq \liminf_{t\to\infty} \frac{v(t)}{u(t)} \leqq \limsup_{t\to\infty} \frac{v(t)}{u(t)} \leqq \limsup_{t\to\infty} \frac{v'(t)}{u'(t)}$$

である．

補題 2 $u, v \in C^1[t_0, \infty)$, $u(t) > 0$, $u'(t) < 0$, $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$ ならば

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{v'(t)}{u'(t)} \leqq \liminf_{t\to\infty} \frac{v(t)}{u(t)} \leqq \limsup_{t\to\infty} \frac{v(t)}{u(t)} \leqq \limsup_{t\to\infty} \frac{v'(t)}{u'(t)}$$

である．

(定理 1 の証明) $x(t)$, $y(t)$ を，それぞれ，(10), (11) の $\mathcal{N}_k[\mathrm{int}]$ クラスに属する解とする．

$$\lim_{t\to\infty} x^{(j)}(t) = \infty \quad (j = 0, 1, \ldots, k-1), \qquad \lim_{t\to\infty} x^{(j)}(t) = 0 \quad (j = k, k+1, \ldots, n-1),$$

$$\lim_{t\to\infty} y^{(j)}(t) = \infty \quad (j = 0, 1, \ldots, k-1), \qquad \lim_{t\to\infty} y^{(j)}(t) = 0 \quad (j = k, k+1, \ldots, n-1),$$

であることに注意する．補題 1, 補題 2 を繰り返し使えば，(13) より

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)} &\leqq \limsup_{t\to\infty} \frac{x'(t)}{y'(t)} \leqq \limsup_{t\to\infty} \frac{x''(t)}{y''(t)} \\
&\cdots \leqq \limsup_{t\to\infty} \frac{x^{(k-1)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} \leqq \limsup_{t\to\infty} \frac{x^{(k)}(t)}{y^{(k)}(t)} \\
&\cdots \leqq \limsup_{t\to\infty} \frac{x^{(n-1)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \leqq \limsup_{t\to\infty} \frac{x^{(n)}(t)}{y^{(n)}(t)} \\
&= \limsup_{t\to\infty} \frac{-\sigma p(t) x(t)^\gamma}{-\sigma q(t) y(t)^\gamma} = \left[\limsup_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)}\right]^\gamma
\end{aligned}$$

であることが判る．よって

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)} \leqq \limsup_{t\to\infty} \frac{x^{(k-1)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} \leqq \left[\limsup_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)}\right]^\gamma \tag{14}$$

である. したがって, (14) の最左辺と最右辺の間に成り立つ不等式によって, 仮定 $0 < \gamma < 1$ を用いて

$$0 \leqq \limsup_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)} \leqq 1 \quad \text{または} \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \infty \tag{15}$$

である.

一方, (10) の $\mathcal{N}_k[\mathrm{int}]$ クラスの解 $x(t)$ は, ある正の定数 $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ に対して

$$\begin{aligned} & C_1 \int_T^t \left(\int_s^\infty (r-s)^{n-k-1} r^{(k-1)\gamma} p(r) dr \right) ds \\ \leqq \ & \left[x^{(k-1)}(t) \right]^{1-\gamma} \\ \leqq \ & C_2 \int_T^t s^{-\gamma} \left(\int_s^\infty (r-s)^{n-k-1} r^{k\gamma} p(r) dr \right) ds \end{aligned}$$

であることが判る. (11) の $\mathcal{N}_k[\mathrm{int}]$ クラスの解 $y(t)$ についても同様. よって, 条件 (13) より

$$0 < \limsup_{t\to\infty} \frac{x^{(k-1)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} < \infty$$

である. したがって, (14), (15) によって

$$0 < \limsup_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)} \leqq 1$$

を得る.

同様に考えて

$$1 \leqq \liminf_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)} < \infty$$

を得る. よって

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \liminf_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = 1$$

である. (証明終)

例として, 方程式 (1) において $p(t)$ が

$$p(t) \sim \lambda t^{\rho} \quad (t \to \infty) \quad (\lambda > 0 : \text{定数}) \tag{16}$$

を満たす場合を考えよう. この場合, (1) が $\mathcal{N}_k[\mathrm{int}]$ クラスの解をもつための必要十分条件は

$$-n + k - 1 - (k-1)\gamma \leqq \rho < -n + k - k\gamma$$

である.

まず $-n+k-1-(k-1)\gamma<\rho<-n+k-k\gamma$ のときから考える．α, C を次式で定める ($0<\alpha<1$, $C>0$):

$$\alpha=\frac{\rho+n-k+1+(k-1)\gamma}{1-\gamma}, \tag{17}$$

$$C^{1-\gamma}=\frac{\lambda}{|(k-1+\alpha)\cdots\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+k)|}. \tag{18}$$

このとき, 関数

$$y(t)=Ct^{k-1+\alpha}$$

は方程式

$$y^{(n)}+\sigma\lambda t^{\rho}|y|^{\gamma}\operatorname{sgn} y=0$$

の $\mathcal{N}_k[\mathrm{int}]$ クラスの解である．したがって, 定理 1 より次の系 1 を得る．

系 1 方程式 (1) において, $p(t)$ は (16) を満たし

$$-n+k-1-(k-1)\gamma<\rho<-n+k-k\gamma$$

であると仮定する．このとき, (1) の $\mathcal{N}_k[\mathrm{int}]$ クラスの任意の解 $x(t)$ について

$$x(t)\sim Ct^{k-1+\alpha} \quad (t\to\infty)$$

である．ここで, α, C は (17), (18) で定められる定数である ($0<\alpha<1$, $C>0$).

次に $\rho=-n+k-1-(k-1)\gamma$ のときを考える．天下り的であるが, $C>0$ を

$$C^{1-\gamma}=\frac{\lambda(1-\gamma)}{(n-k)!(k-1)!} \tag{19}$$

とおき, 関数 $y(t)$, $q(t)$ を

$$y(t)=Ct^{k-1}(\log t)^{1/(1-\gamma)},$$

$$q(t)=-\frac{y^{(n)}(t)}{\sigma y(t)^{\gamma}}$$

と定める．このとき, 簡単な計算によって, $y^{(k-1)}(t)\to\infty$ $(t\to\infty)$, $y^{(k)}(t)\to 0$ $(t\to\infty)$, $q(t)\sim\lambda t^{\rho}=\lambda t^{-n+k-1-(k-1)\gamma}$ $(t\to\infty)$ であることが判る．$q(t)$ の定め方より, $y=y(t)$ が

$$y^{(n)}+\sigma q(t)|y|^{\gamma}\operatorname{sgn} y=0$$

の解であることは自明であって, それは $\mathcal{N}_k[\mathrm{int}]$ クラスに属する. こうして, 定理 1 を使って, 次の系 2 を得る.

系 2 方程式 (1) において, $p(t)$ は (16) を満たし, $\rho = -n + k - 1 - (k-1)\gamma$ であると仮定する. このとき, (1) の $\mathcal{N}_k[\mathrm{int}]$ クラスの任意の解 $x(t)$ について

$$x(t) \sim Ct^{k-1}(\log t)^{1/(1-\gamma)} \quad (t \to \infty)$$

である. ここで, C は (19) で与えられる正の定数である.

参考文献

[1] K.-I. Kamo and H. Usami, Asymptotic forms of weakly increasing positive solutions for quasilinear ordinary differential equations, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. **2007**(2007), No. 126, pp. 1–12.

[2] K.-I. Kamo and/or H. Usami, 学会, 研究集会等における一連の講演

[3] T. Kusano and M. Naito, Unbounded nonoscillatory solutions of nonlinear ordinary differential equations of arbitrary order, Hiroshima Math. J., **18**(1988), pp. 361-372.