

オイラー方程式の数値解の次元依存性

中大理工 中野 徹^{a)}、 宮崎 巧也^{a)}
名工大 後藤 俊幸^{b)}

^{a)}Department of Physics, Chuo University, Tokyo 112-8551

^{b)}Department of Engineering Physics, Graduate School of Engineering,
Nagoya Institute of Technology, Nagoya 466-8555, and Crest

1 序

最初にこの研究を始めた動機について述べておく。我々は 4 次元のナビエ=ストークス方程式 (以後簡単のために NS 方程式と略記する) のシミュレーション [1, 2] を始めたが、そこでは分かったことは、(1) 3 次元と同様にエネルギーカスケードが起こる、(2) 波数空間でのエネルギー輸送は 3 次元より速いことであった。さらに興味ある発見は、4 次元の微細特異構造が 3 次元のライン状とは異なり、シート状である [3] ことである。その意味することは、特異構造のトポロジーが特異構造の衝突の頻度に影響を与え、エネルギー散逸率の大きさを変えることである。3 次元 NS 方程式では渦糸同士の衝突とつなぎ変えがエネルギー散逸を増加させることが確かめられている [4]。4 次元で散逸がより大きいのは衝突の頻度がより大きいことと合致する。特異構造の衝突の効果は粘性のないオイラー方程式で、衝突後の解の継続的な存在が困難視されることから、もっと劇的であろう。3 次元と 4 次元のオイラー方程式の解の振る舞いを比較検討することは、オイラー方程式の解の発散の問題の解明に役立つ。

オイラー方程式の解が有限時間で発散するかどうかは流体力学での大きな問題の一つである。滑らかな速度場から出発しても、方程式の移流項が大きなスケールの揺らぎを小さなスケールに輸送するので、特徴的な長さスケール $l(t)$ は時間と共に減少するであろう。 $l(t)$ は指数的にしか減少しないのか、それとも有限時間でゼロになるのか。

オイラー方程式ではエネルギーは保存されるから、代表的な速度の大きさ u_0 は一定のままであるが、その空間微分は $u_0/l(t)$ のようにスケールされるので、任意の次元で定義される速度場の 2-form である

$$\Omega_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

の振幅が時間と共にどのように増大するかが研究対象になる [5]。通常は Ω_{ij} の 2 乗である

$$\Omega_2 = \sum_{ij} \Omega_{ij}^2$$

で定義されたエンストロフィーの時間発展が調べられる。

Morf 等 [6] は Taylor-Green 流れの初期場に対して、 $\Omega_2(t)$ を時間のべき級数で求めて、その発散の具合を調べた。Kerr [7] は互いに接近する反対向きの渦度を持つ 2 本の渦糸系が発散に導くことを示し、Pelz 等 [8] は対称性の高い Taylor-Green 流れを初期場として発散を確かめた。Ohkitani 等 [9] は Burgers 渦を拡張したモデル方程式の数値解析により有限時間の発散を確かめた。

もし発散が起これば、その原因はなにか。渦がストレインによって引き伸ばされて、渦度が増大するのは一つの原因である。物理的内容は同じかもしれないが、反対の極性を持つ特異構造が衝突を起こし、速度の空間的勾配が増大するメカニズムも原因と考えられる。もし粘性があれば、渦のつなぎかえが起こるが、粘性がなければそのようなことが起こらずに破局を迎えるだろう。

オイラー方程式と NS 方程式での特異構造のトポロジーの違いについて述べておく必要がある。3次元では Kelvin-Helmholtz 不安定によりシート状の渦が巻き上がる。粘性がなければシートはますます巻き込まれ、大きなスケールで眺めれば、それは線状に見えるであろう。粘性があれば、シート間の速度勾配が大きくなり、粘性の効果でそれらは均されて線になる。ある程度のスケールで眺めれば、粘性があろうとなかろうと構造は同じ線状であると考えられ、我々の行った3次元でのオイラー方程式と NS 方程式の渦度の可視化もその描像を支持している。微小スケールでの構造の同定は NS 方程式における方が易しい。なぜならオイラー方程式では最小スケールがメッシュサイズを超えると、微細構造に悪影響が現れ、その同定が難しいからである。NS 方程式では乱流が減衰してしまわない限り微細構造は安定に存在し続ける。これから述べる特異構造のトポロジーの同定は、粘性の小さな高レイノルズ数の NS 方程式のものと同定される。NS 方程式のシミュレーションの結果に基づいている。

この報告は次のような順序になっている。第2章では4次元での微細構造のトポロジーがシートである確かな証拠を示す。第3章では3次元と4次元でのオイラー方程式の解の時間発展がメッシュ数にどのように依存するかについて述べ、最後の章では結論と今後の発展について述べる。

2 各種次元における特異構造のトポロジー

3次元オイラー方程式の発散の問題で、反対の渦度をもつ2本の渦系の衝突が格好の例として取り上げられる [7]。特異構造の衝突の条件は、流体が存在する空間の次元 d と、特異構造のトポロジカルな次元 d_s により決まる。その条件は

$$2(d_s + 1) \geq d + 1 \quad (1)$$

である。 $d + 1$ は時空間の次元であり、 $d_s + 1$ は特異構造の時空間次元である。確かに2次元 $d = 2$ での渦点 $d_s = 0$ は条件 (1) を満たさないので、衝突することはない。実際の2次元乱流（特にレイノルズ数が低い場合）では渦度が空間的な広がりを持っているので、衝突に近い相互作用の効果は無視できない。3次元での渦系 $d_s = 1$ は辛うじて条件 (1) を満たすが、衝突の確率はそれほど大きくない。このように流体の存在する空間次元と特異構造の次元の関係が2個の特異構造の衝突に大きな影響を与えるので、特異構造の次元の解明が重要である。

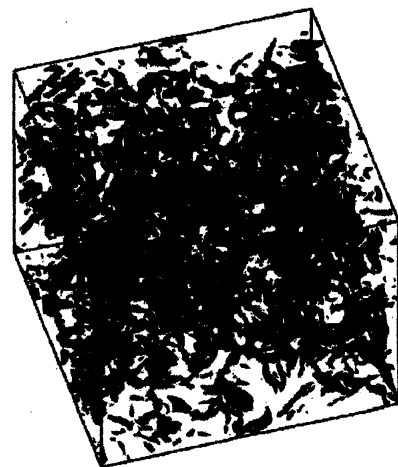


図1: メッシュ数 128^4 のシミュレーションでの4次元の Ω_2 の3次元等値面（標準偏差の4倍以上に限定）。

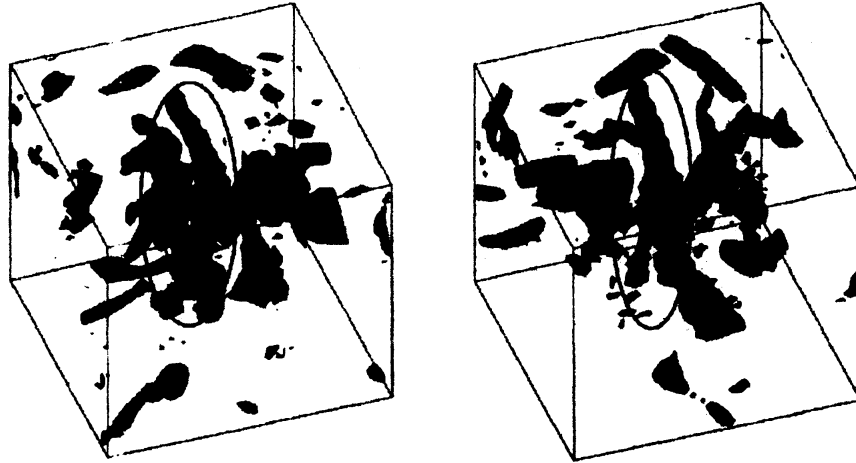


図 2: 128^4 から切り取った 32^4 で $x_4 = 0$ (左図) と $x_4 = 6$ (右図) の Ω_2 の等値面。黒い実線で囲んだものは両者同じ構造をしている。

まず 2 次元では渦は点状であり、発達した 3 次元乱流では渦は線状であることは確立しているので、詳しく述べる必要はない。

4 次元での構造はまだ公表されていない [3] ので、詳しく述べる。図 1 は、メッシュ数 128^4 の NS 方程式の発達した乱流のシミュレーションで、標準偏差の 4 倍以上に限定して、第 4 の座標 x_4 を固定した 3 次元空間でのエンストロフィー Ω_2 の等値断面図である。3 次元乱流の渦度の空間分布と非常によく似ているが、注意深く眺めると少し広がりを持っているような印象を受ける。 x_4 の方向にパターンはどう変化するか。 x_4 を変化させた 1 連の 3 次元断面図を調べると、それらは強い相関を持っている。例として 128^4 から切り出した 32^4 のデータによる $x_4 = 0$ と $x_4 = 6$ でのエンストロフィーの等値面を図 2 に掲げた。 x_4 を変化させても、黒い実線で囲んだ同じ構造が継続して存在することは明らかである。すなわち 4 次元での特異構造はシートである。これが図 2 の微細構造が線よりも広がりを持っているように見える原因であろう。

エンストロフィー場の可視化はビジュアル的に優れた手段であるが、定量的に評価する方法も望まれる。 Ω_2 の一般化次元を求めることによって可能となる。

ある場 $f(\mathbf{x})$ の一般化次元は次のように求められる。システムサイズ L の空間をサイズ r のサブ空間に分割する。サブ空間 i における存在確率

$$p_i = \int_{V_r} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} / \int f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

を計算する。当然 $\sum_i p_i = 1$ である。それから分配関数

$$Z_q(r) = \sum_i p_i^q$$

を計算する。 $Z_q(r) \sim (r/L)^{D_q(q-1)}$ を通じて一般化次元 D_q が求まる [10, 11]。

Ω_2 に対して計算された分配関数を用いて、 $\ln Z_q(r)$ を $\ln r$ に対してプロットすると、散逸領域とエネルギー保有領域の r においてその勾配は $d(q-1)$ であることが確認できるので (d は幾何次元)、それらの領域では $D_q = d$ である。散逸領域とエネルギー保有領域ではエンストロフィー場は一樣に分布していることを示している。

それらの両方の領域の間に狭いながらも慣性領域がある。そこでは局所勾配 $\ln Z_q(r)/\ln r$ はほぼ平らであるが、その勾配を読み取れるほど広くはない。そこで慣性領域全体に渡って平均を取ることで、一般化次元 D_q を求めた。4次元の一般化次元 $D_q^{(4)}$ の q に対する変化は図3の白箱のようになる。 q が大きな極限では特異構造の次元に近づくはずであり、それは2.7位である。参考のために同じレイノルズ数の3次元乱流の一般化次元 $D_q^{(3)}$ をプラス記号で付け加えた（便宜上3次元の場合は1だけ足している）。特異構造が渦糸である3次元でも q が大きな極限で1.7ほどであり、線の次元1からかなり遠い。これはレイノルズ数が十分に大きくないせいと考えられる。

Ω_2 は Ω_{ij}^2 の全ての成分の和である。もし Ω_{12}^2 だけに限定すれば、より大きな成分が強調されるであろう。そのフラクタル次元を $\tilde{D}_q^{(4)}$ (図3の白丸) とすれば、大きな q では $\tilde{D}_q^{(4)}$ は $D_q^{(4)}$ より0.5ほど小さく、2.2で2次元に近い。3次元でも事情は全く同じである。ゆえに、一般化次元の解析は4次元での特異構造はシートに極めて近いことを支持する。

ここに図は掲げないが、4次元NSのストレインテンソルの固有値の分布もシート構造とは矛盾しない。固有値を $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$ の順に並べると、 λ_1, λ_2 は正領域にあるのに対して、 λ_4 は負であるが、 λ_3 は正負両方に分布している [2]。したがって2方向に引き伸ばしが生じていて、シートモデルと矛盾しない。

もし4次元の特異構造が線状であれば、条件(1)は満たされないので、大きなエネルギー散逸は期待されないが、それは散逸率が大きいという観測結果 [1] と合わない。一方、面状の特異構造は大きなエネルギー散逸率とも矛盾しない。

結論として特異構造のトポロジーは2次元ではポイント、3次元ではライン、4次元ではシートである。これらの性質がオイラー方程式のエンストロフィーの振る舞いにどのような影響を与えるかについて次の章で述べる。

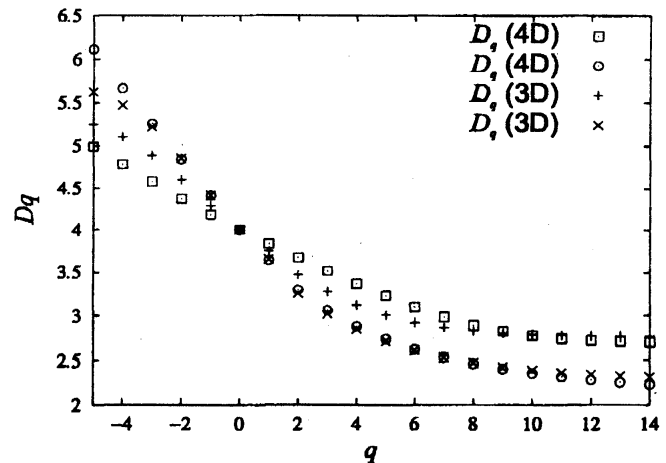


図3: 4次元の Ω_2 の一般化次元 $D_q^{(4)}$ 。 $\tilde{D}_q^{(4)}$ は Ω_{12}^2 の一般化次元である。参考のために3次元のもの（便宜上1だけ足してある）も加えた。

3 オイラー方程式でのエンストロフィーの時間的振る舞い

オイラー方程式でのシミュレーションの最大の問題点は、特徴的な長さ $l(t)$ がメッシュサイズ a を超えてしまうことである。我々のシミュレーションでは波数が $K = \pi/a$ より大きな速度成分を強制的にゼロにおくアルゴリズムを用いている。Aliasing 誤差の除去はすべての方向（3次元では立方体、4次元では超立方体の対角方向）に半メッシュサイズだけずらしたものと平均を取り、元の波数の $2\sqrt{2}/3$ 倍以上の波数成分を強制的にゼロにする方法を採用している [12]。この方法は計算時間は2倍かかるが、高次元の乱流のシミュレーションには大変有効な方法である。

我々はカットオフ波数 K を変えながら、エンストロフィーの時間発展を調べた。初期速度場は

$$E(k) \sim u_0^2 \frac{k^d}{k_0^{d+1}} \exp \left[-2 \left(\frac{k}{k_0} \right)^2 \right]$$

($k_0 = 4$) で与えられるスペクトルを持つランダムな場であり、乱数はメッシュ数に関わらず、同じ初期種数を用いて、小さな波数から指定しているので、メッシュ数による初期速度場の違いは指数的に減衰する高波数成分だけであるので、初期速度場は実質的にメッシュ数に拘わらず同じであると見做せる。

初期のエネルギースペクトルは k_0 の近傍にピークを持ち、時間が経過してもスペクトルのピークは K より十分に小さな波数に存在するので、エネルギーはほぼ保存される。しかし $k^2 E(k)$ のピークは大きな波数の方向に遷移し、ついには K を超えるが、このシミュレーションでは K を超えた速度場は強制的にゼロとするので、シミュレーションは何事もなく進行する。エンストロフィーは無制限に大きくなるのではなく、ある値に飽和する。我々が知りたいのは、 $a \rightarrow 0$ での発散の具合である。

本研究では、エネルギースペクトルの n 次モーメント

$$\Omega_n = \int E(k) k^n dk$$

のうち、特に Ω_2 に注目する。 Ω_0 はほとんど時間によらないが、長時間の経過ののち僅かに減衰するので、エンストロフィー Ω_2 をエネルギーで $R = \Omega_2 / \Omega_0$ のように規格化した R の振る舞いを調べる。

まず最初に3次元オイラーを取り上げる。メッシュ数 $32^3, 64^3, 128^3, 256^3, 512^3$ での $R(t)$ の時間発展を図4に掲げる。同じ初期速度場から出発しているので、初期の立ち上がり方はカットオフによらない。我々が必要とするのは $N \rightarrow \infty$ での R の増加の仕方であるから、そのカーブは図4の5本の曲線の包絡線であり、下に凸である。明らかに包絡線は指数関数(図4では直線)より速いので、 $R(t)$ は指数関数より速く増大することは確かである。

時間が経つとカットオフが小さなほど飽和を始めるのが早い。ある時間ののちカットオフに依存する一定値になるようであるが、これがいつまでも一定のまま止まっているのかどうかは確かめていない。

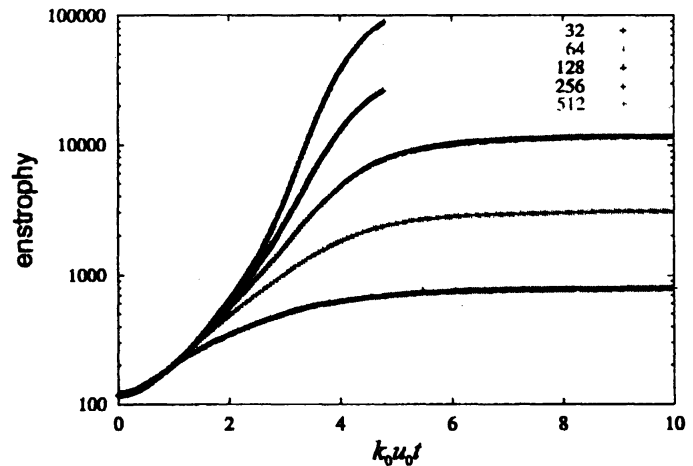


図4: 3次元における種々のメッシュ数 32^3 から 512^3 までのシミュレーションでの $R(t)$ の時間発展。時間スケールは $k_0 u_0 t$ で表している。

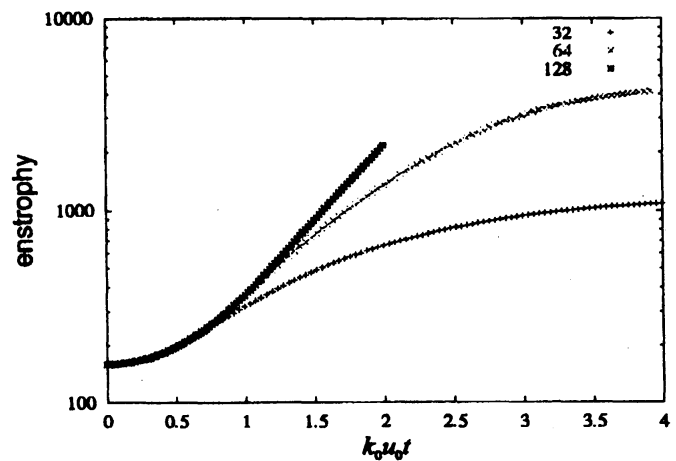


図5: 4次元における種々のメッシュ数 $32^4, 64^4, 128^4$ のシミュレーションにおける $R(t)$ の時間発展。

次に4次元に移る。同様なアルゴリズムを採用し、メッシュ数は 32^4 , 64^4 , 128^4 である。それらの結果が図5である。確かに3個のカーブの包絡線は指数関数より速く増大する。十分な計算時間がなかったため、4次元の計算時間は3次元のそれより短いことに注意しながら、3次元の図4とくらべてほしい。すると4次元の方が増大の仕方がより速く、発散も速く起こりそうに見える。しかしまだ確定的なことを言う段階ではない。

4 結論と今後の発展

オイラー方程式のシミュレーションにより、次元が大きくなるにつれてエンストロフィーの増加の速さが増すことが確認された。2個の特異構造が遭遇する確率は4次元の方が3次元より大きいことと矛盾しない。

今後の研究発展は次のようなものが考えられる。メッシュサイズの依存性を積極的に考慮して、エンストロフィー $\Omega_2(t)$ の時間発展を調べることである。 R を決めるのは2つの長さ $l(t)$, a しかないから、

$$R(t) = \frac{\Omega_2(t)}{\Omega_0(t)} = \frac{1}{l(t)^2} f\left(\frac{a}{l(t)}\right) \quad (2)$$

のようなスケーリング形が予想される。 $l(t) = l_0(1 - t/t_*)^n$ の形を仮定して、ある時間領域での全てのデータが(2)で統一的に記述されるような t_* , n を決定することが出来れば、メッシュサイズがゼロの極限での $R(t)$ の振る舞いは

$$\Omega_2 \sim l(t)^{-2} \sim (t_* - t)^{-2n}$$

であることが期待される。この方向の研究は現在進行中である。

参考文献

- [1] E. Suzuki, T. Nakano, N. Takahashi, and T. Gotoh, *Phys. Fluids* **17**, 081702 (2005).
- [2] T. Gotoh, Y. Watanabe, Y. Shiga, T. Nakano, and E. Suzuki, *Phys. Rev. E* **75**, 016310 (2007).
- [3] T. Miyazaki, W. Kubo, Y. Shiga, T. Nakano, and T. Gotoh, submitted to *Physica D* (2008).
- [4] M.E. Brachet, D. Meiron, S.A. Orszag, R.H. Morf, and U. Frisch, *J. Fluid Mech.* **130**, 411-452 (1983).
- [5] T. Beal, T. Kato, and A. Majda, *Commun. Math. Phys.* **94**, 61 (1984).
- [6] R.H. Morf, S.A. Orszag, and U. Frisch, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 572 (1980).
- [7] R.M. Kerr, *Phys. Fluids A* **5**, 1725 (1993).
- [8] R.B. Pelz and Y. Gulak, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4998 (1997).
- [9] K. Ohkitani and J.D. Gibbon, *Phys. Fluids* **12**, 3181 (2000).

- [10] H.G.E. Hentschel and I. Procaccia, *Physica D* **8**, 435 (1983).
- [11] T.C. Halsey, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia, and B.I. Shraiman, *Phys. Rev. A* **33**, 1141 (1986).
- [12] S.A. Orszag and G.S. Patterson, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 76 (1972).