数理解析研究所講究録
第 1642 巻 2009 年 174-183

Collision of some five point vortices in a plane
(平面上の5個の渦点の衝突について)

広島大学・大学院理学研究科　中木 達幸 (Tatsuyuki Nakaki)
Graduate School of Science
Hiroshima University

1. はじめに

本稿では，平面上にある渦点群のうちで，ある条件をみたす5個の渦点の挙動について議論をする．流体内に複数の渦点があるとき，それらの間の相互作用により，渦点の位置が時間と伴に移動する．この現象は，Euler 流体が平面全体を占めるとき，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{z_j(t)}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{k\neq j}\frac{\Gamma_k}{z_j(t)-z_k(t)} \tag{1}$$

で記述されることが知られている（例えば，Newton [12]）．ここで，$z_j(t)$ は時刻 t における j 番目の渦点の複素座標，Γ_j はその渦点の循環 (circulation) である．循環は実数値をとり，2次元の Euler 流体を考察しているため，時刻に関して定数である．そのため，Γ_j は与えられた実定数として扱う．

方程式 (1) に関して，既知の事実を簡単に紹介する．流体内の渦点の個数を n とする．$n=2$ のとき，渦点間の距離は一定であり，その挙動は容易に解析できる（流体力学の教科書，例えば，今井 [6] を参照されたし）．$n=3$ における渦点の qualitative analysis は Aref [1] により行われた．特殊な場合として，3個の渦点が有限時刻で1点で衝突することも知られており (Kimura [7])，衝突の正則化に関する結果がある (Hiraoka [5])．なお，本稿とは設定が異なるが，球面上の渦点の衝突の結果もある（Sakajo [15]）．また，3個の渦点による緩和振動の結果も知られている（Nakaki [11]）．$n\geq 4$ のときは，一般的な状況で (1) は解かれておらず，いくつかの特殊な状況での結果が知られている．例えば，カオス的な挙動を示す4個の渦点の例（Aref and Pomphrey [2]）や，定常状態の配置（O'neil [13]），4個の渦点の衝突（O'neil [14]）など．Morikawa and Swenson [8] はある種の配置の安定性を議論している（Cabral and Schmidt [4] と Boatto and Simó [3] も参照されたし）．

本稿では，$n=5$ の場合を扱い，以下の対称性を仮定する：3つのパラメータ $b\in(0,1]$，$\Gamma_v\in\boldsymbol{R}$ と $\Gamma_c\in\boldsymbol{R}$ に対して，初期時刻の渦点の配置を

$$z_1(0)=-z_3(0)=1,\ z_2(0)=-z_4(0)=\mathrm{i}b,\ z_5(0)=0 \tag{2}$$

とし，循環の値は

$$\Gamma_1 = \Gamma_3 = 1,\ \Gamma_2 = \Gamma_4 = \Gamma_v,\ \Gamma_5 = \Gamma_c \tag{3}$$

とする（中心に渦点をもつ菱形形状の配置）．本稿では，相対的定常状態（relative equilibrum）も考察する．すなわち，$\{e^{-\mathrm{i}\Omega t} z_j(t)\}$ が定常状態となる定数 $\Omega \in \boldsymbol{R}$ が存在するときであり，一定の角速度 Ω で渦点が原点のまわりを共回転することを意味する．この状態は，$b=1, \Gamma_v = 1$ のときはすべての Γ_c に対して，$0<b<1$ のときは，ある $\Gamma_c = \Gamma_c^{\mathrm{relative}}(b, \Gamma_v)$ に対して実現可能である．ここで，$\Gamma_c^{\mathrm{relative}}(b, \Gamma_v)$ はすべての $0<b<1$ と $\Gamma_v \in \boldsymbol{R}$ に対して一意的に存在することが分かる．

本稿は次のとおり構成されている．次の第2章では，相対的定常状態の安定性について議論する．第3章では，不安定な相対的定常状態が引き起こす緩和振動について述べる．最後の第4章では，5個の渦点の衝突問題に関して論じる．

2. 相対的定常状態の安定性

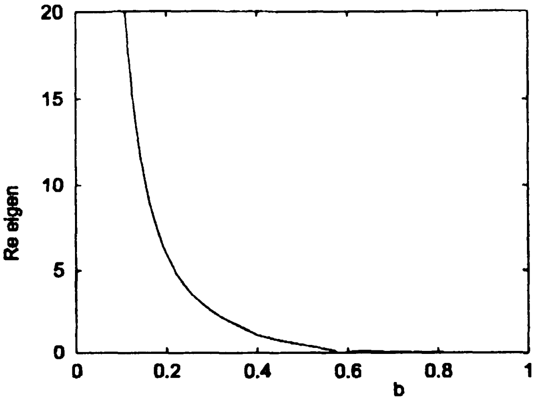
本章では $0<b<1, \Gamma_c = \Gamma_c^{\mathrm{relative}}(b, \Gamma_v)$ のときを考え，相対的定常状態の安定性を議論する．まず，簡単な場合として，$\Gamma_v = 1$ とする．すなわち，中心渦点 z_5 を取り巻く4個の渦点が同じ循環をもつ場合である．線形安定性を調べるため，

$$E := \sum_{\lambda} \max\{\mathrm{Re}\ \lambda, 0\} \tag{4}$$

を計算する．ここで，λ は相対的定常解に対する線形化固有値である．もし $E>0$ であれば，実部が正の固有値が存在するため，相対的定常解は線形化の意味で不安定であることが，$E=0$ では相対的定常解は elliptic であることが分かる．ここで，elliptic な定常解とは，すべての線形化固有値が純虚数か0であるという意味で用い，そのときは線形項だけでは安定性が判断できないことに注意されたし．図1に $E=E(b)$ のグラフを示す．この図は固有値を厳密に計算したものであり，数値的な近似固有値に対するものではない．図1から示唆されるとおり，次のことが証明される．

定理 1 $0<b<1, \Gamma_v = 1, \Gamma_c = \Gamma_c^{\mathrm{relative}}(b, \Gamma_v)$ のとき，次をみたす b_1, b_2 $(0<b_1<b_2<1)$ が存在する．

(i) $0<b<b_1$ または $b_2<b<1$ のとき，相対的定常解は線形化の意味で不安定である．



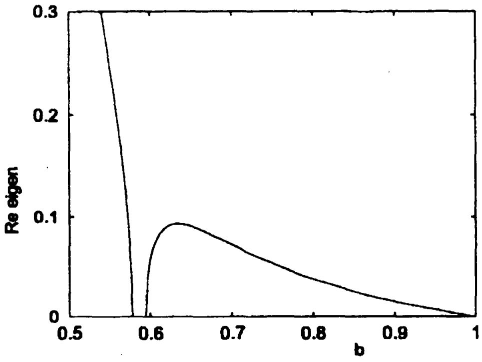


図 1: 左：$0 < b < 1$ での $E(b)$ のグラフ，右：左図の拡大

(ii) $b_1 \le b \le b_2$ のとき，相対的定常解は elliptic である．

注意：$b_1 = 0.57735\cdots$, $b_2 = 0.59492\cdots$ である．したがって，狭い範囲でのみ elliptic であることが分かる．このことを踏まえた数値実験例を図 2 に示す．

Elliptic な相対的定常解の安定性を調べるため，computer-assisted proof を行った．この証明のためには，次の結果を使った．

定理 2 (Dirichlet's theorem) $x = 0$ を常微分方程式

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{5}$$

の elliptic な定常解とする．このとき，ある $\delta > 0$ に対して，

$$0 < |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad G(x) > G(0) \tag{6}$$

となる (5) の第一積分 $G(x)$ が存在すれば，$x = 0$ は安定である．

我々は，この定理における G として (1) の Hamiltonian を使うこととし，(6) を示すために，G の Hessian G_{xx} が $x = 0$ において正定値であることを示す．$A := G_{xx}(0)$ の正定値性は，$\det A_r > 0$ $(r = 1, 2, \ldots, N)$ であることによって証明することにする．ここで，$A_r = (a_{ij})_{1 \le i \le r, 1 \le j \le r}$，$A_N = A$ である．$\det A_r$ は代数計算のみで値が分かるので，コンピュータにおける区間演算を活用するというのが，アイデアである．

計算例 $\Gamma_v = \dfrac{4}{3}$ として，$b = 0.70, 0.71, \ldots, 0.99$ に対して，上で述べた computer-assisted proof により相対的定常解の安定性を調べたところ，次の結果を得た．

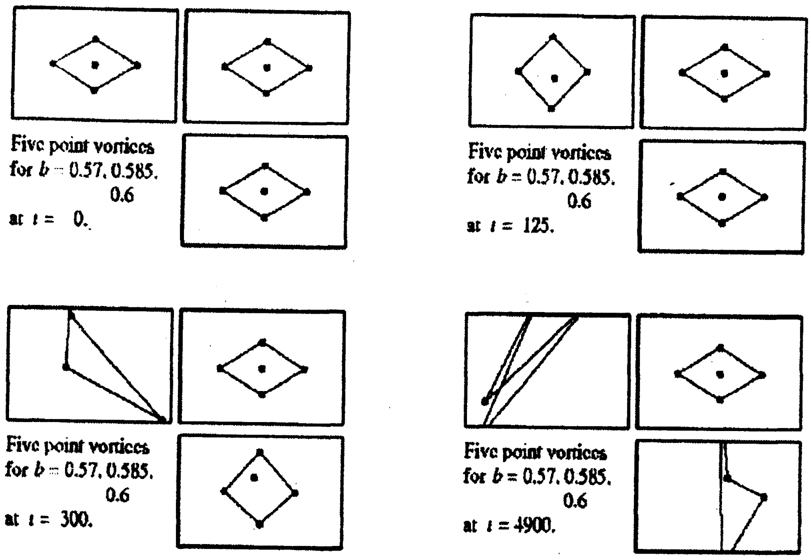


図 2: $\Gamma_v = 1$ での菱形形状下での数値実験結果（動画を静止画にコマを落とした）．$b = 0.57, 0.585, 0.6$ とした．$b = 0.57, 0.6$ の場合は不安定で形状が崩れるが，$b = 0.585$ の場合は長時間，初期形状を保つことが分かる．

(i) $b = 0.70, 0.71, \ldots, 0.87$ のとき，$G_{xx}(0)$ は正定値でないため，安定性は不明である．

(ii) $b = 0.88, 0.89, \ldots, 0.93$ のとき，$G_{xx}(0)$ は正定値であるので，相対的定常解は安定である．

(iii) $b = 0.94, 0.95, \ldots, 0.99$ のとき，$G_{xx}(0)$ は正定値でないため，安定性は不明である．

検証が成功したところと失敗したところの境目 $(0.87, 0.88)$ と $(0.93, 0.94)$ を調べると，

- 区間 $(0.87, 0.88)$ において，Γ_c の符号が変わる．
- 区間 $(0.93, 0.94)$ において，E の符号が変わる（$b \in (0.70, 0.71)$ でも E の符号変化がおきている）

である．後者は，線形化の意味での不安定性と elliptic の境界なので，検証の成否が変わるのは当然である．前者の結果から，elliptic な相対的定常状態の安定性には Γ_c の符号が関与することが予想される．実際，多くの種類の Γ_c と b の値に対して，computer-assisted proof による検証が可

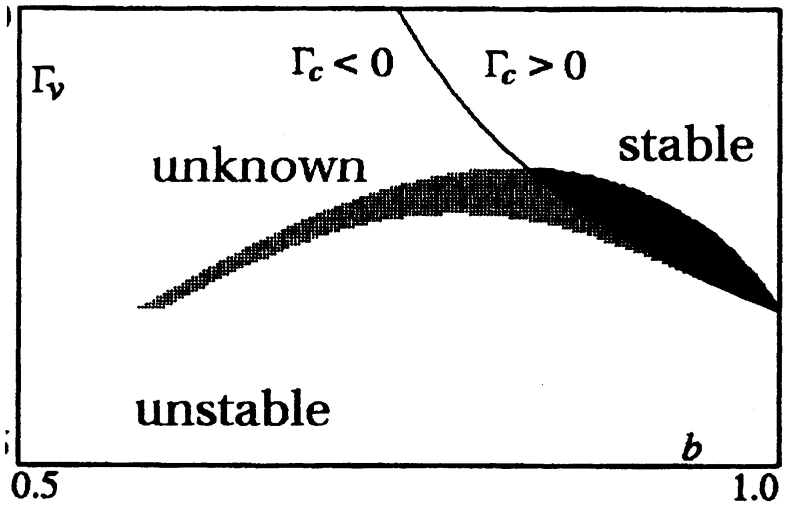


図 3: 相対的定常解が安定であることが検証可能なパラメータ領域（黒色の部分）と線形化不安定であるパラメータ領域（白色の部分）．灰色は elliptic であり，検証が失敗した領域を示す．

能であったパラメータ領域を図示したのが，図 3 である．なお，図 3 において，非常に多くであるが，有限個の離散的なパラメータの値でのみ検証を行ったことに注意する．固定した 1 点の値でなく，ある区間全体でのパラメータ領域での検証に関して，computer-assisted proof の方法を工夫する余地があるが，今後の課題としたい．以上のことをまとめて，次の予想が立てられる．

予想 1 $\Gamma_c > 0$ となる elliptic な相対的定常解は安定である．

3. 渦点の緩和振動

不安定な相対的定常解は，少しの摂動が加わると，形が崩れる．ある状況下では，形が崩れた解が周期的な動きをすることを示そう．その周期的な動きは，ほとんど動かない状態（steady stage）と急速な動き (rapid motion stage）が交互におこるものであり，ここでは，その動きを緩和振動 (relaxation oscillation) と呼ぶことにする[1]．数学的には，緩和振動は heteroclinic 軌道，すなわち，

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left|z_j(t)-\eta_j^{\pm}(t)\right|=0 \quad (j=1,2,\ldots,5) \tag{7}$$

[1]平成 20 年 7 月 18 日の京都大学数理解析研究所での研究会の際，H. Aref 氏から，名称に heteroclinic を付けることの示唆を得て，そのようにする予定であるが，筆者がまだ名称に迷っているため，本稿では取り合えず，緩和振動と呼ぶことにする．

となる (1) の解の存在に起因していると思われる．ここで，$\{\eta_j^{\pm}\}_{j=1,2,\ldots,5}$ は (1) の相対的定常解である．仮にこの軌道が存在すれば，方程式の対称性から heteroclinic chain の存在が直ちにいえる．相対的定常解のすぐ近くを初期値とする解（言い換えれば，相対的定常解に摂動が加わったもの）は，heteroclinic chain の近くを動く．その際，chain の継ぎ目である相対的定常解の近くでは解の動きは遅くなり (steady stage)，離れると速い動き（rapid motion stage）になる．その結果として緩和振動がおきるからである．

Heteroclinic 軌道の存在について，次の結果がある（Nakaki [9]）．それは，

$$b = 1,\ \Gamma_v = 1,\ \Gamma_c = -1.5 \tag{8}$$

のときのもの（これは $\Omega = 0$ での相対的定常解，すなわち，定常解の場合）である．この結果は，

$$b = 1,\ \Gamma_v = 1,\ \Gamma_c < -0.5 \tag{9}$$

の場合に拡張できる．

$0 < b < 1$ のときは，相対的定常状態になるよう $\Gamma_c = \Gamma_c^{\mathrm{relative}}(b, \Gamma_v)$ を仮定して，$\Gamma_v \in \boldsymbol{R}$ をパラメータとする．すると，数値実験により，

$$0 < b < 1,\ -b^{-2} < \Gamma_v < 1 \text{ のとき，緩和振動が観察される} \tag{10}$$

ことが分かる．また，この Γ_v の範囲の両端で，

- $\Gamma_v \uparrow 1$ とするにしたがって，緩和振動の「周期」は長くなる．
- $\Gamma_v \downarrow -b^{-2}$ とするにしたがって，緩和振動の急激な動きの途中で，5 個の渦点がより狭い範囲に集まる

ことも観察されることを指摘する．前者は相対的定常解の安定性と関連すると思われる．後者は次章で議論する衝突解へと話がつながる．

さて，観察結果 (10) より，

予想 2 $0 < b < 1,\ -b^{-2} < \Gamma_v < 1$ のとき heteroclinic 軌道が存在する．

が期待できる．現時点において，数学的に証明されたのは，次の場合である．

定理 3 $0 < b < 1,\ \Gamma_v = 0,\ \Gamma_c = \Gamma_c^{\mathrm{relative}}(b, \Gamma_v)$ のとき，heteroclinic 軌道が存在する．

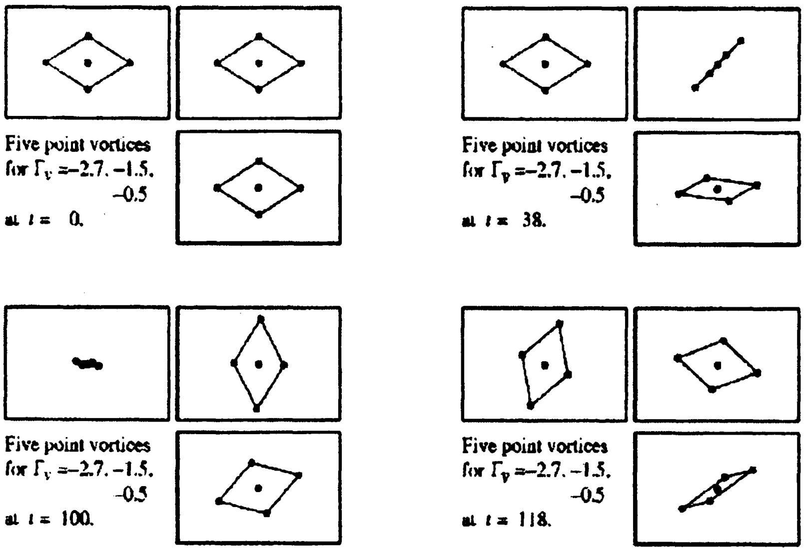


図 4: $b = 0.6$, $\Gamma_v = -2.7, -1.5, -0.5$ での菱形形状の緩和振動の数値実験結果．急激な動き (rapid motion) の際，渦点が集まる範囲の違いが観測される．特に，$\Gamma_v = -2.7$ のときは狭い範囲に集まっていることが分かる．

4. 渦点の衝突

前章において，$\Gamma_v \approx -b^{-2}$ のとき，5 個の渦点が狭い範囲に集まるため，有限時刻での渦点の衝突の可能性がある．本章では，この有限時刻衝突について議論する．まず，次の結果が得られる．

定理 4 $z_j \equiv -z_{j+1}$ $(j = 1, 3)$, $z_5 \equiv 0$ とする．このとき，

$$\frac{|z_2(t)|}{|z_1(t)|} = b \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma_v = -b^{-2} \tag{11}$$

が成立する．

以下，本章において，上の定理の仮定と $\Gamma_v = -b^{-2}$ が常に成り立っているものとする．このとき，

$$z_2(t) = be^{i\theta(t)} z_1(t)$$

がある $\theta(t) \in \boldsymbol{R}$ に対して成立し，(1) により，

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t) = -\dfrac{2\sin 2\theta(t)}{\pi(1+b^4-2b^2\cos 2\theta(t))} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(t) = -\dfrac{1-2b^2(\Gamma_c+2)+b^4(2\Gamma_c+1)}{4\pi b^4 r(t)} \end{cases} \tag{12}$$

を得る．ここで，$r(t) = |z_1(t)|^2$ である．したがって，(12) を解析すれば，有限時刻衝突が分かる．

まず，自明な場合を考察する．それは，

$$1-2b^2(\Gamma_c+2)+b^4(2\Gamma_c+1) = 0 \tag{13}$$

の場合であり，このとき，$\theta(t)$ と $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)$ は時刻に関して定数である．もし，$0 < \theta(0) < \pi/2$ であれば，ある $T^* > 0$ に対して，

$$z_j(T^*-0) = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, 5 \tag{14}$$

なり，有限時刻での衝突がおこることが分かる．この解は自己相似であることに注意する．すなわち，次の結果が得られる．

定理 5 $0 < b < 1, \Gamma_v = -b^{-2}$ であり，(13) が成り立つとき，(1) は

$$\lim_{t\to-\infty} e^{-\mathrm{i}\Omega t}z_j(t) = \xi_j,\ z_j(T^*-0) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 5) \tag{15}$$

となる自己相似解 $\{z_j(t)\}$ をもつ．ここで，$T^* < \infty$, $\xi_1 = -\xi_3 = 1$, $\xi_2 = -\xi_4 = \mathrm{i}b$, $\xi_5 = 0$ である．

自明でない状況下での (12) の数値計算例を 2 つ示す．数値解法としては，標準的な 4 次の Runge–Kutta 法を用い，時間間隔幅は adaptive にした．

最初の数値計算例は $b = 0.6$, $\Gamma_v = -1$ の場合であり，その結果を図 5 に示す．図 5 より，5 個の渦点は非常に狭い範囲に集まるが，衝突をしないことが数値的に分かる．

次の数値計算例は $b = 0.5$, $\Gamma_v = 0.1$ である．図 6 では，$t > 7.8\cdots$ のとき $r(t) < 0$ となっているので，「5 個の渦点が有限時刻で衝突した」ことが期待できるかも分からない．しかしこの期待は正しくないことが次の結果から分かる．

定理 6 $0 < b < 1$ とし，(13) が成立しないとする．このとき，微分方程式 (12) は $r(T^*-0) = 0$ $(0 < T^* < \infty)$ となる解をもたない．

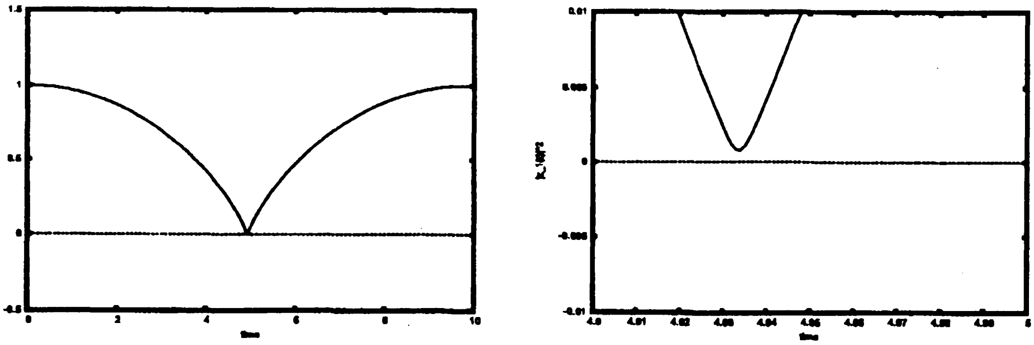


図 5: $b=0.6$, $\Gamma_v=-1$ のときの (12) の解 $r(t)$ の時間変化．左図を拡大したものが右図である．

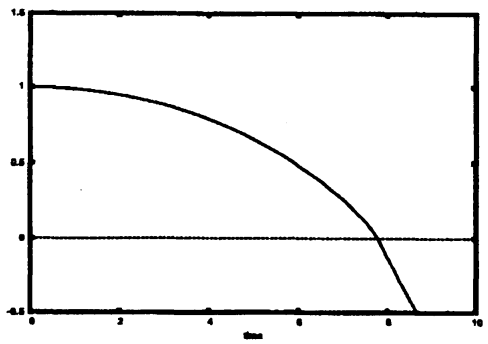


図 6: $b=0.5$, $\Gamma_v=0.1$ のときの (12) の解 $r(t)$ の時間変化．数値的に $t>7.8\cdots$ のとき $r(t)<0$ となっているが，これは「幻影解」である．

この証明は，Hamiltonian の評価による．

以上をまとめると次のとおりである．本章での状況下では，有限時刻での自己相似的な衝突はおこるが，非自己相似的衝突はおこらない．しかし，極めて狭い範囲に渦点が集まることはあり，

予想 3 任意の $\varepsilon>0$ に対して，パラメータ b, Γ_v, Γ_c を上手に選ぶと，

$$0<\inf_t \max_{j,k=1,2,\ldots,5}|z_j(t)-z_k(t)|<\varepsilon \tag{16}$$

となる (1) の解が存在する．

が期待できよう．

謝辞：本研究の一部は，科学研究費補助金 基盤研究 (S) (No.16104001) と 基盤研究 (B) (No.16340029, No.18340030) の援助を受けました．

参考文献

[1] H. Aref, Motion of three vortices, Phys. Fluids 22 (1979), 393–400.

[2] H. Aref and N. Pomphrey, Integrable and chaotic motions of four vortices. I. The case of identical vortices, Proc. R. Soc. London Ser. A, 380 (1982), 359–387.

[3] S. Boatto and C. Simó, Thomson's Heptagon: A case of bifurcation at infinity, Physica D 237 (2008), 2051-2055.

[4] H. E. Cabral and D. S. Schmidt, Stability of relative equilibria in the problem of $N+1$ vortices, SIAM J. Math. Anal. 31 (2000), 231–250.

[5] Y. Hiraoka, Topological regularizations of the triple collision singularity in the 3-vortex problem, Nonlinearity 21 (2008), 361–379.

[6] 今井　功，流体力学（前編），物理学選書 14，裳華房，1973 年.

[7] Y. Kimura, Similarity solution of two-dimensional point vortices, J. Phys. Soc. Jpn. 56 (1987), 2024–2030.

[8] G. K. Morikawa and E. V. Swenson, Interacting motion of rectilinear geostrophic vortices, Phys. Fluids 14 (1971), 1058–1073.

[9] T. Nakaki, Behavior of point vortices in a plane and existence of heteroclinic orbits, Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems 5 (1999), 159–169.

[10] T. Nakaki, Corotating five point vortices in a plane, Proc. of IUTAM Symposium on Tubes, Sheets and Singuraities in Fluid Dynamics, Fluid Mechanics and Applications series, 2002.

[11] T. Nakaki, Relaxation oscillations of point vortices in a plane, Theor. Appl. Mech. Japan 53 (2004), 95–102.

[12] P. K. Newton, The N-Vortex Problem: Analytical Techniques, Springer-Verlag, 2001.

[13] K. O'Neil, Stationary configurations of point vortices, Trans. Amer. Math. Soc. 302 (1987), 383–425.

[14] K. O'Neil, Relative equilibrium and collapse configurations of four point vortices, Regul. Chaotic Dyn. 12 (2007), 117–126.

[15] T. Sakajo, Non self-similar, partial and robust collapse of four point vortices on sphere, Physical Review E, 78 (2008) doi: 10.1103/PhysRevE.78.016312.