数理解析研究所講究録
第 1643 巻 2009 年 87-93

非拡大写像列に関する収束定理
Convergence theorems for a sequence of nonexpansive mappings

千葉大学・法経学部 青山 耕治 (Koji AOYAMA)
Faculty of Law and Economics
Chiba University
東京工業大学・大学院情報理工学研究科 髙橋 渉 (Wataru TAKAHASHI)
Department of Mathematical and Computing Sciences
Tokyo Institute of Technology

2000 Mathematics Subject Classification: 47H05, 47J05, 47J25.
Keywords: 非拡大写像, 不動点, エルゴード定理.

1 序論

本稿では, 文献 [1] で得られた結果とそれに関連する話題を取り扱う。文献 [1] では, 与えられた非拡大写像列から Cesàro 平均を用いて点列を構成し, 不動点の存在や不動点近似の議論をしている。

非拡大写像の不動点に関する Cesàro 平均を用いた結果としては, 次の Baillon の定理が代表的である。

定理 1.1 (Baillon [5]). C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合, $T\colon C \to C$ を不動点を持つ非拡大写像, $x \in C$ とし, $\{z_n\}$ を

$$z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T^{k-1}x \quad (n \in \mathbb{N})$$

で定義される C の点列とする。このとき, $\{z_n\}$ は T のある不動点に弱収束する。

この定理は, 最初の非線形エルゴード定理として有名である。非線形写像に関する平均エルゴード定理としてこの他に [5], [16], [17], [9], [12], [13], [22] などがある。また, [11], [6], [21], [4], [15], [14] およびそれらの参考文献を参照するとよい。

本稿は全体で 4 節から構成される。次の第 2 節は準備のための節である。第 3 節は文献 [1] から主な結果を抜粋しまとめたものである。最後の第 4 節では, 非拡大写像の列に対する Cesàro 平均を用いた収束定理をいくつか紹介し, 第 3 節の結果との関係を述べている。

2 準備

本稿では, H を実 Hilbert 空間とし, H の内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で, H のノルムを $\|\cdot\|$ で表す。また, C を H の空でない閉凸部分集合とする。

T を C から C への写像とする。写像 T が非拡大であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つときをいう。T の不動点の集合を $F(T)$ で表す。T が非拡大であるとき, $F(T)$ は閉凸であることが知られている。各 $x \in H$ に対して

$$\|x - z\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}$$

を満たす点 $z \in C$ が唯一存在する。z を $P_C x$ で表し, P_C は H から C の上への距離射影と呼ばれる。詳しくは [18–20] を参照せよ。

写像 $A\colon C \to H$ に関する変分不等式問題とは, $\langle y - x, Ax\rangle \geq 0\,(\forall y \in C)$ を満たす $x \in C$ を求める問題である。このとき, x をこの問題の解といい, 解の集合を $\mathrm{VI}(C, A)$ で表す。つまり

$$\mathrm{VI}(C, A) = \{z \in C : \langle y - z, Az\rangle \geq 0,\ \forall y \in C\}$$

である。写像 $A\colon C \to H$ が逆強単調であるとは, ある正の実数 α が存在し, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\langle x - y, Ax - Ay\rangle \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2$$

が成り立つときをいう。このとき, A を α-逆強単調写像と呼ぶことがある。変分不等式問題, 逆強単調写像について詳しくは, 例えば [20] を参照するとよい。

f を $C \times C$ 上で定義された実数値関数とする。f に関する均衡問題とは, $f(x, y) \geq 0\,(\forall y \in C)$ を満たす $x \in C$ を求める問題である。このとき, x をこの問題の解といい, 解の集合を $\mathrm{EP}(C, f)$ で表す。つまり

$$\mathrm{EP}(C, f) = \{z \in C : f(z, y) \geq 0,\ \forall y \in C\}$$

である。関数 $f\colon C \times C \to \mathbb{R}$ が単調であるとは

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0$$

が, すべての $x, y \in C$ に対して成り立つときをいう。関数 $f\colon C \times C \to \mathbb{R}$ が upper-hemicontinuous であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\tau(t) = f\big((1 - t)x + ty, y\big), \quad t \in [0, 1]$$

で定義される関数 $\tau\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ が上半連続になるときをいう。関数 f のリゾルベントの存在を保証するのが次の結果である。

補助定理 2.1 ([7])**.** H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合とし, 関数 $f\colon C \times C \to \mathbb{R}$ は, 以下の条件 (F1) から (F4) を満たすとする。

(F1) すべての $x \in C$ に対して $f(x,x) = 0$ である;
(F2) f は単調である;
(F3) すべての $x \in C$ に対して $f(x,\cdot)$ は凸かつ下半連続である;
(F4) f は upper-hemicontinuous である。

このとき, 任意の $x \in H$ と $r > 0$ に対して

$$F_r x = \left\{ z \in C : f(z,y) + \frac{1}{r} \langle y - z, z - x \rangle \geq 0,\ \forall y \in C \right\} \tag{2.1}$$

は一点集合である。

補助定理 2.1 の仮定のもとで, 式 (2.1) によって写像 $F_r\colon H \to C$ が定義できる。この F_r は f のレゾルベントと呼ばれ, 非拡大写像になることが知られている ([10] を参照せよ)。

3 非拡大写像列に関する収束定理

次の定理は, 本稿においてもっとも基本となる結果である。

定理 3.1 ([1, Theorem 3.2])**.** H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合とし, $\{T_n\}$ を C 上の非拡大写像の列とする。C の点列 $\{x_n\}$ と $\{z_n\}$ を, 初期点 $x_1 = x \in C$ と

$$x_{n+1} = T_n x_n,\ z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

で定義する。さらに, $\{T_n\}$ は各点収束すると仮定し, $\{T_n\}$ の各点収束極限を T で表す。つまり, $y \in C$ に対して

$$Ty = \lim_{n \to \infty} T_n y$$

とする。このとき, 以下が成り立つ。

(i) 写像 T は非拡大で, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \subset F(T)$ である。
(ii) $\{x_n\}$ が有界ならば $F(T) \neq \emptyset$ である。

(iii) もし, $F(T)=\bigcap_{n=1}^{\infty}F(T_n)\neq\emptyset$ ならば, $\{z_n\}$ は $z\in F(T)$ に弱収束する。ここで, $z=\lim_{n\to\infty}P_{F(T)}x_n$ である。

$T\colon C\to C$ を非拡大写像とする。定理 3.1 において, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して $T_n=T$ とすると

$$x_{n+1}=T^n x,\ z_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}T^{k-1}x \quad (\forall n\in\mathbb{N})$$

であり $F(T)=\bigcap_{n=1}^{\infty}F(T_n)$ が成り立つ。したがって, 定理 3.1 の直接的な結果として, 次のような非拡大写像の不動点定理および非線形エルゴード定理が得られる。

定理 3.2 ([18, Theorem 3.1.6]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, $T\colon C\to C$ を非拡大写像とする。このとき, $F(T)\neq\emptyset$ であるための必要十分条件は, $\{T^n x\}$ が有界となる $x\in C$ が存在することである。

定理 3.3 (Baillon [5]**).** H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, $T\colon C\to C$ を非拡大写像とし, $F(T)\neq 0$ を仮定する。$x\in C$ とし, $\{z_n\}$ を

$$z_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}T^{k-1}x \quad (n\in\mathbb{N})$$

で定義される C の点列とする。このとき, $\{z_n\}$ は $z\in F(T)$ に弱収束する。ここで, $z=\lim_{n\to\infty}P_{F(T)}x_n$ である。

さらに, 定理 3.1 を使うと, 次のような非拡大写像列の共通不動点への収束定理も証明できる。

定理 3.4 ([1, Theorem 3.7]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合とする。$\{S_k\}$ を C 上の非拡大写像の列, $\{\beta_k\}$ を開区間 $(0,1)$ の数列とし, $F=\bigcap_{k=1}^{\infty}F(S_k)\neq\emptyset$ および $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k=1$ を仮定する。C の点列 $\{x_n\}$ と $\{z_n\}$ を, 初期点 $x_1=x\in C$ および

$$x_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\beta_k S_k x_n+(1-\sum_{k=1}^{n}\beta_k)S_{n+1}x_n,\ z_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k \quad (n\in\mathbb{N})$$

で定義する。このとき, $\{z_n\}$ は $z\in F$ に弱収束する。ここで, $z=\lim_{n\to\infty}P_F x_n$ である。

証明の概略. 各 $n\in\mathbb{N}$ 対して

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\beta_k S_k+(1-\sum_{k=1}^{n}\beta_k)S_{n+1}$$

とおく。ここで [8] の結果を使うと, $T=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k S_k$ は C 上の非拡大写像であり

$$F(T)=\bigcap_{n=1}^{\infty}F(T_n)=\bigcap_{k=1}^{\infty}F(S_k)$$

を得る。次に, 各 S_k が非拡大であることと, 仮定 $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k=1$ を使うと, すべての $y\in C$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\|Ty-T_ny\|=0$$

を示すことができる。したがって, 定理 3.1 より結論を得る。 □

4 周辺の結果

本節では, 前節で得られた結果と関連する先行研究を二つ紹介する。一つは, 単調写像の変分不等式問題の解の近似に関する結果であり, もう一つは, 単調関数の均衡問題の解の近似に関する結果である。

次の定理は, 飯塚-髙橋 [14] による。

定理 4.1 ([14, Theorem 3.1]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合とする。$A\colon C\to H$ を α-逆強単調写像, $S\colon C\to C$ を非拡大写像とし, $F(S)\cap \mathrm{VI}(C,A)\neq\emptyset$ を仮定する。C の点列 $\{x_n\}$ と $\{z_n\}$ を, 初期点 $x_1=x\in C$ および

$$x_{n+1}=SP_C(x_n-\lambda_nAx_n),\ z_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\quad(n\in\mathbb{N})$$

で定義する。ここで, $\{\lambda_n\}$ は閉区間 $[a,b]$ の数列で, $0<a<b<2\alpha$ を満たすとする。このとき, $\{z_n\}$ はある $z\in F(S)\cap\mathrm{VI}(C,A)$ に弱収束する。

次の定理は著者ら [2] による。

定理 4.2 ([2, Theorem 3.1], [3]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合とする。$S\colon C\to H$ を非拡大写像, f を $C\times C$ 上の実数値関数とし, 以下の条件 (F1) から (F4) を満たし, $F(S)\cap\mathrm{EP}(C,f)\neq\emptyset$ を仮定する。

(F1) すべての $x\in C$ に対して $f(x,x)=0$ である;
(F2) f は単調である;
(F3) すべての $x\in C$ に対して $f(x,\cdot)$ は凸かつ下半連続である;
(F4) f は upper-hemicontinuous である。

C の点列 $\{x_n\}$ と $\{z_n\}$ を, 初期点 $x_1 = x \in C$ および

$$x_{n+1} = SF_{r_n}x_n,\ z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

で定義する。ここで, $\{r_n\}$ は $\inf_n r_n > 0$ を満たす正の実数列, F_{r_n} は f の r_n に関するリゾルベントである。このとき, $\{z_n\}$ は $z = \lim_{n\to\infty} P_{F(S)\cap \mathrm{EP}(C,f)}x_n$ に弱収束する。

上に紹介した二つの定理は, 定理 3.3 の拡張であることが容易に確かめられる。さらに, 定理 4.1 において $SP_C(I - \lambda_n A)$ は非拡大写像であり, 定理 4.2 において SF_{r_n} も非拡大写像であるから, それぞれの定理における点列 $\{x_n\}$ は, ある非拡大写像列 $\{T_n\}$ を用いて

$$x_{n+1} = T_n x_n$$

と定義されていることになる。しかしながら, 定理 4.1 または定理 4.2 の仮定から $\{T_n\}$ が各点収束することを示せないので, 定理 3.1 を使ってこれらの定理を示すことはできない。つまり, 今のところこ定理 3.1, 4.1 および 4.2 は, それぞれ独立した結果である。

参考文献

[1] M. Akatsuka, K. Aoyama, and W. Takahashi, *Mean ergodic theorems for a sequence of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, Sci. Math. Jpn **68** (2008), 233–239.

[2] K. Aoyama and W. Takahashi, *Weak convergence theorems by Cesàro means for a nonexpansive mapping and an equilibrium problem*, Pac. J. Optim. **3** (2007), 501–509.

[3] 青山耕治, 高橋渉, 不動点問題と均衡問題の共通解への収束定理, 非線形解析学と凸解析学の研究, 京都大学数理解析研究所講究録 **1544** (2007), 40–48.

[4] S. Atsushiba and W. Takahashi, *A nonlinear strong ergodic theorem for nonexpansive mappings with compact domains*, Math. Japon. **52** (2000), 183–195.

[5] J.-B. Baillon, *Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **280** (1975), Aii, A1511–A1514 (French, with English summary).

[6] J.-B. Baillon, *Comportement asymptotique des itérés de contractions non linéaires dans les espaces L^p*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **286** (1978), A157–A159 (French, with English summary).

[7] E. Blum and W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student **63** (1994), 123–145.

[8] R. E. Bruck Jr., *Properties of fixed-point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **179** (1973), 251–262.

[9] R. E. Bruck, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math. **32** (1979), 107–116.

[10] P. L. Combettes and S. A. Hirstoaga, *Equilibrium programming in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **6** (2005), 117–136.

[11] M. Edelstein, *On non-expansive mappings of Banach spaces*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **60** (1964), 439–447.

[12] N. Hirano and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems for nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, Kodai Math. J. **2** (1979), 11–25.

[13] N. Hirano, *A proof of the mean ergodic theorem for nonexpansive mappings in Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc. **78** (1980), 361–365.

[14] H. Iiduka and W. Takahashi, *Weak convergence theorems by Cesáro means for nonexpansive mappings and inverse-strongly-monotone mappings*, J. Nonlinear Convex Anal. **7** (2006), 105–113.

[15] K. Nakajo and W. Takahashi, *A nonlinear strong ergodic theorem for asymptotically nonexpansive mappings with compact domains*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. **9** (2002), 257–270.

[16] A. Pazy, *On the asymptotic behavior of iterates of nonexpansive mappings in Hilbert space*, Israel J. Math. **26** (1977), 197–204.

[17] S. Reich, *Almost convergence and nonlinear ergodic theorems*, J. Approx. Theory **24** (1978), 269–272.

[18] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[19] 高橋渉, 『凸解析と不動点近似』, 横浜図書, 2000.

[20] 高橋渉, 『非線形・凸解析学入門』, 横浜図書, 2005.

[21] K.-K. Tan and H. K. Xu, *The nonlinear ergodic theorem for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **114** (1992), 399–404.

[22] R. Wittmann, *Mean ergodic theorems for nonlinear operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 781–788.