数理解析研究所講究録
第 1643 巻 2009 年 167-182

非拡大写像の強収束定理について

神奈川県立 鶴見総合高等学校　竹内 幸雄 (Yukio Takeuchi)
Kanagawa prefectural Tsurumi-Sogo high school

1. はじめに

著者は通常の研究者とは異なり高校で数学を教えている一般の学習者です。著者を含む一般の学習者にとっては、充分な学習の時間をとることや最新の論文を自由に目にすることは不可能です。一方この講究録はインターネットから誰もが閲覧することができますので、高橋の日本語で読める 3 冊の書籍 [1],[2],[3] とともに著者たちにとっては数少ない貴重な情報源となります。この分野の重要な定理の証明はそれぞれの手法を用いた証明であって、自分で整理してみないとこれらの定理に共通する考え方や手法がきちんと理解できなかったということもあって、著者はこの分野の新しい発見に向かうよりも、むしろ先人の成果を整理し分りやすい簡潔なものにすることに興味があります。最近では極大単調作用素や m 増大作用素の零点へのリゾルベントを用いた収束を扱うのが主流の様に見えますが、これらは非拡大写像の不動点への収束についての結果や手法を取り入れて発展したものが多く、非拡大写像の不動点への収束定理はこの分野において基本的なものだと思います。

これらの理由から、研究者にとっては周知の内容であっても、非拡大写像の代表的な強収束定理について基本的な構造や証明の要点を講究録に整理しておきたいと思います。このような内容はほとんど見かけませんし、研究者にとっては書きづらいものだと思います。しかし、一般の学習者やこれからこの分野の研究に入ろうとする人にとって有益だと信じます。弱収束定理や応用についても記述しておきたい内容がありますがほとんど触れないことにします。文献については簡単に入手できるものと google scholar で PDF を閲覧できるものには (*) をつけることにします。一般の学習者にとって講究録の難点は段階的に進まないことと証明のついたものが少ないことです。紙数の許す範囲で Hilbert 空間との比較、証明の概要をつけることにします。

2. 準備

本稿で必要とする知識を簡単にまとめておきます。詳しくは [2],[3] を参照してください。ここで考える *Banach* 空間はスカラーを実数とする実 *Banach* 空間です。C を *Banach* 空間 E の空ではない部分集合とし C から C への写像 T が $x,y\in E$ について $\|Tx-Ty\|\leqq\|x-y\|$ を満たすとき非拡大 (*nonexpansive*) 写像といいます。T の不動点の集合を $F(T)=\{x\in C\ :\ Tx=x\}$ と表します。$F(T)$ が空集合でないとき C の与えられた点 x_0 を使って $F(T)$ の点 z_0 に収束する点列 $\{u_n\}$ をどのように構成するかを議論します。これを不動点近似といい、得られた結果を不動点への収束定理といいます。点列を構成する方法によっては T を C から E への写像とし $x_0\in E$ とすることもあります。初期点 $u_1\in C$ は任意にとる場合と近似法から決まる場合があります。通常 C は閉凸集合であることを仮定します。

Banach 空間について

E を *Banch* 空間とし、E^* を共役空間とします。$x^*\in E^*$ の $x\in E$ での値を $\langle x,x^*\rangle$ で表します。E の点列 $\{u_n\}$ が u に強収束することを $u_n\to u$, 弱収束することを $u_n\xrightarrow{w}u$ と表します。E^* の点列 $\{u_n\}$ が u に弱*収束することを $u_n\xrightarrow{w^*}u$ と表します。$E=E^{**}$ であるとき E を回帰的といいます。E の要素 $x,y\ (x\neq y)$ が $\|x\|=1,\|y\|=1$ を満たすとき、常に $\|x+y\|<2$ であれば E を狭義凸といいます。また E の点列 $\{x_n\},\{y_n\}$ が $\|x_n\|=1,\|y_n\|=1,\|x_n+y_n\|\to2$ を満たすとき、常に $\|x_n-y_n\|\to0$ であれば E を一様凸といいます。

E の要素 x に対して、E^*の部分集合 $J(x)=\{\,x^*\in E^*\ :\ \langle x,x^*\rangle=\|x\|^2=\|x^*\|^2\,\}$ を対応させる集合値写像 J を E の双対写像といいます。このとき $J(0)=\{0\}$, $x\in E$ について $J(x)$ は有界閉凸集合, $\alpha\in R$ とすると $J(\alpha x)=\alpha J(x)$ となります。しかし、双対写像 J の性質は充分に分かっているとは言い難く、Banach 空間での収束定理を難しいものにする原因となっています。既知の J の性質の多くは次のノルムの微分可能性と深い関わりを持つように見えます。

$S(E)=\{\,x\in E\ :\ \|x\|=1\,\}$ とします。$S(E)$ の要素 x,y について、$t\to 0$ のとき常に $(\|x+ty\|/t)$ の極限が存在するならば E のノルムは Gâteaux 微分可能,あるいは空間 E は滑らかといいます。$y\in S(E)$ とするとき、$(\|x+ty\|/t)$ が $x\in S(E)$ について一様に収束するならば、E のノルムは一様 Gâteaux 微分可能といいます。$x\in S(E)$ とするとき、$(\|x+ty\|/t)$ が $y\in S(E)$ について一様に収束するならば E のノルムは Fréchet 微分可能といいます。$(\|x+ty\|/t)$ が $x,y\in S(E)$ について一様に収束するとき、E のノルムは一様 Fréchet 微分可能、あるいは空間 E は一様に滑らかといいます。

E が滑らかであれば J は一価写像であり、E が回帰的であれば上への写像となります。E が滑らかかつ狭義凸で $x,y\in E\,(x\neq y)$ とすれば $\langle x-y, J(x)-J(y)\rangle>0$、$E$ が滑らかで $x,y\in E$ とすれば $\|x+y\|^2\leqq\|x\|^2+2\langle y, J(x+y)\rangle$ となります。E のノルムが一様 Gâteaux 微分可能であれば、J は E の有界な集合上で norm−to−weak* の意味で一様連続となります。E のノルムが Fréchet 微分可能であれば J は norm−to−norm の意味で連続となります。E^*が Fréchet 微分可能なことと E が回帰的かつ狭義凸で Kadec−Klee property を持つことは同値になります。Kadec−Klee property を持つとは E の点列 $\{u_n\}$ が $u_n\xrightarrow{w}u$ かつ $\|u_n\|\to\|u\|$ を満たすならば $u_n\to u$ となることをいいます。E を一様凸な Banach 空間とすれば E^*は一様に滑らかとなり、E はこの 3 つの性質を持ちます。Banach 空間をノルムの凸性で大まかに分類すると次のようになり、これとノルムの微分可能性を組み合わせます。

Hilbert 空間 ⇒ 一様凸 Banach 空間 ⇒ 回帰的・狭義凸 Banach 空間 ⇒ 一般の Banach 空間

一様凸で一様に滑らかな空間は Banach 空間の中では非常に扱いやすい空間になります。内容にもよりますが命題の成立する空間のカテゴリーを 1 つ右に移したり、ノルムの微分可能性を弱めることは通常は意味のあることです。本稿では扱いやすい一様凸な空間を主な舞台として議論を進めますが L^2に次いで重要な L^1,L^∞ は最も扱いにくい一般の Banach 空間のカテゴリーに入ることは留意すべき点です。

射影について

H を Hilbert 空間とし、C を H の空ではない閉凸集合とします。このとき任意の $x\in H$ について $\|x-z\|=\min\{\,\|x-y\|\ :\ y\in C\,\}$ となる $z\in C$ が一意に存在します。x にこの z を対応させる写像を P_Cで表し H から C への距離射影といいます。Hilbert 空間では双対写像 J は恒等写像 I となり、不動点への収束定理を考えるとき大きな役割を果たす、P_Cに関連した次の重要な性質を示すことができます。これは 2 次元の空間での鈍角の余弦定理に相当します。任意の $x\in H$ と $y\in C$ について

$$\langle x-P_Cx, J(P_Cx-y)\rangle=\langle P_Cx-y, J(x-P_Cx)\rangle=\langle x-P_Cx, P_Cx-y\rangle\geqq 0,$$

$$\|x-P_Cx\|^2+\|P_Cx-y\|^2\leqq\|x-y\|^2.$$

C を回帰的で狭義凸な Banach 空間 E の閉凸集合としても、任意の $x\in E$ について $\|x-z\|=\min\{\,\|x-y\|\ :\ y\in C\,\}$ となるような $z\in C$ が一意に存在します。x にこの z を対応させる写像 P_Cをやはり E から C への距離射影といいます。しかし、この射影 P_Cは $\langle P_Cx-y, J(x-P_Cx)\rangle\geqq 0$ という性質は保存しますが、もはや $\langle x-P_Cx, J(P_Cx-y)\rangle\geqq 0$ という性質をもたず、$\|x-P_Cx\|^2+\|P_Cx-y\|^2\leqq\|x-y\|^2$ も成立しません。空間の条件を強めてもこの性質は容易に回復することができません。E を滑らかな空間とし、E の要素 x に C の要素 $z=Q_Cx$ を対応させる E から C の上への写像 Q_C が存在して、$\langle x-Q_Cx, J(Q_Cx-y)\rangle\geqq 0$ を満たすとき この射影を suny nonexpansive といいます。Hilbert 空間では $J=I$ ですから双対写像 J は線形です。しか

し Banach 空間では J が非線形で得体の知れないものになるため、Hilbert 空間では 1 つの距離射影として捉えられたものが、2 つの性質の異なる射影に分裂したことになります。最近では先ほどの鈍角の余弦定理に相当する性質を回復するため、やはり Hilbert 空間の距離射影の拡張にあたる *generalized metric projection* と言われる射影を考えることがあります。

不動点への近似について

T を Banach 空間 E の閉凸部分集合 C 上の $F(T)$ が空ではない非拡大写像とします。$x_0 \in C$ が与えられたとき $z_0 \in F(T)$ に収束する点列の候補を構成する代表的な方法のいくつかを説明します。ここでの呼称は紙数を節約するためのもので、一般的なものではありません。*hybrid* と呼ばれる点列の構成法については後述します。

最初に $\alpha_n \in (0,1)$ を満たす実数列 $\{\alpha_n\}$ について次の条件を考えます。

(1) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$,　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$　(3) $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| = \infty$　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) = \infty$

$\{\alpha_n\}$ が (1) を満たすとき B 係数、(1)(2) を満たすとき RS 係数、(1)(2)(3) を満たすとき W 係数、(4) を満たすとき R 係数と呼ぶことにします。このとき W 係数 $\Rightarrow$ RS 係数 $\Rightarrow$ B 係数、R 係数 $\Rightarrow$ (2) は明らかだと思います。

B 点列：$\{\alpha_n\}$ を B 係数とします。このとき任意の $y \in C$ について、$T_n y = \alpha_n x_0 + (1-\alpha_n)Ty$ で定義される T_n は C 上の縮小写像となり、Banach 原理によって C の中に唯 1 つの不動点 $T_n u_n = u_n$を持ちます。このようにして構成された C の点列 $\{u_n\}$ を B 係数 $\{\alpha_n\}$ による B 点列、紛れのないときは単に B 点列と呼ぶことにします。B 点列は Browder [13] によって導入されました。

H 点列：$\{\alpha_n\}$ を W 係数とします。このとき $u_1 \in C$ として $u_{n+1} = \alpha_n x_0 + (1-\alpha_n)Tu_n$ で構成された C の点列 $\{u_n\}$ を W 係数 $\{\alpha_n\}$ による H 点列と呼ぶことにします。同様に RS 係数による H 点列を定義します。紛れのないときは、単に H 点列と呼びます。H 点列は Halpern [17] によって導入されました。$F(T) \neq \phi$ と定義から $n \to 0$ のとき $\|u_{n+1} - Tu_n\| \to 0$ がすぐに分ります。したがって、H 点列においては $\|u_n - Tu_n\| \to 0$ と $\|u_{n+1} - u_n\| \to 0$ は同値になります。

M 点列：$\{\alpha_n\}$ を R 係数とします。このとき $u_1 = x_0 \in C$ として $u_{n+1} = \alpha_n Tu_n + (1-\alpha_n)u_n$ で構成された C の点列 $\{u_n\}$ を R 係数 $\{\alpha_n\}$ による M 点列と呼ぶことにします。M 点列は Mann [18] によって導入されました。$y \in C$ として、$S_n y = \alpha_n Ty + (1-\alpha_n)y$ とすれば S_nは非拡大写像で $F(S_n) = F(T)$ となります。$u_{n+1} = (1-\alpha_n)Tu_n + \alpha_n u_n$ と書いても実質は変わりません。

S 点列：$\{\alpha_n\}$ を RS 係数とし, $\lambda \in (0,1)$ とします。このとき $u_1 \in C$ として $u_{n+1} = \alpha_n x_0 + (1-\alpha_n)(\lambda Tu_n + (1-\lambda)u_n)$ で構成された C の点列 $\{u_n\}$ を RS 係数 $\{\alpha_n\}$ とλによる S 点列、紛れのないときは単に S 点列と呼びます。M 点列で説明した非拡大写像 $S_\lambda y = \lambda Ty + (1-\lambda)y$ を使って $u_{n+1} = \alpha_n x_0 + (1-\alpha_n)S_\lambda u_n$と書けますから RS 係数とλによる S 点列は RS 係数による H 点列となります。$F(S_\lambda) = F(T)$ です。

次の事実も不動点近似の議論で良く使われます。Banach 空間 E の凸集合 C が強位相で閉集合であることと弱位相で閉集合であることは同値です。E を狭義凸な Banach 空間とし、T を E の閉凸部分集合 C 上の非拡大写像とします。このとき $F(T)$ は閉凸集合となります。簡単ではありませんが Browder によって証明された有用な定理と Banach limit について触れることにします。

Theorem 2.1 (**Browder [14]**)　E を一様凸な Banach 空間とし、T を E の閉凸集合 C から C への非拡大写像とします。C の点列 $\{u_n\}$ が $u \in C$ に弱収束し、$\lim_n \|u_n - Tu_n\| = 0$ を満たすならば $u \in F(T)$ となります。

Theorem 2.1 の Hilbert 空間での証明　Hilbert 空間の場合は $u_n \xrightarrow{w} u$, $w \neq u$ とすれば $\underline{\lim}_n \| u_n - u \| < \underline{\lim}_n \| u_n - w \|$ となる *opial* 条件を持つので、$u_n \xrightarrow{w} u \in C$, $Tu \neq u$ として簡単に矛盾を導けます。

$$\underline{\lim}_n \| u_n - u \| < \underline{\lim}_n \| u_n - Tu \| \leqq \underline{\lim}_n (\| u_n - Tu_n \| + \| Tu_n - Tu \|)$$

$$\leqq \underline{\lim}_n (\| u_n - Tu_n \| + \| u_n - u \|) = \underline{\lim}_n \| u_n - u \| \qquad \because \lim_n \| Tu_n - u_n \| = 0 \quad \square$$

実数の有界な無限列は sup ノルムによって *Banach* 空間になります。これを l^∞ と書きます。$\mu \in (l^\infty)^*$, $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^\infty$ とするとき $\mu(x)$ の代わりにしばしば $\mu_n(x_n)$ という記法を用います。$\mu \in (l^\infty)^*$ が $\|\mu\| = \mu_n(1) = 1$ と任意の $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^\infty$ について $\mu_n(x_n) = \mu_n(x_{n+1})$ を満たすとき μ を *Banach limit* と呼びます。$\mu_n(x_n) = \mu_n(x_{n+1})$ は x の成分を左にシフトした $x' = (x_2, x_3, \cdots)$ について $\mu(x) = \mu(x')$ を上記の記法で書いたものです。*Banach limit* の存在は *Hahn – Banach* の定理から導かれ、$\underline{\lim}_n x_n \leqq \mu_n(x_n) \leqq \overline{\lim}_n x_n$ という性質を持ちます。$\lim_n x_n$ が存在する場合は等号になります。

3. Hilbert 空間の収束定理

最初の *Lemma* は *H* 点列の議論で頻繁に用いられ抜き出しておくと便利なものです。この *Lemma* が誰に始まるのか著者は知りませんが、既に塩路 – 高橋[11] の論文で実質的に用いられています。*Lemma* として抜き出した例はたとえば *Xu* の論文にあります。

Lemma 3.1 $M \geqq 0$、$\{a_n\}$ を $a_n \geqq 0$ を満たす実数列とします。$\{\alpha_n\}$ を $\alpha_n \in (0,1)$ と $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ を満たす実数列とし、任意の n について $a_{n+1} \leqq (1-\alpha_n)a_n + \alpha_n b_n + c_n$ とします。ただし $\{b_n\}$ を $\overline{\lim}_n b_n \leqq M$ を満たす実数列、$\{c_n\}$ を $c_n \geqq 0$ と $\sum_{i=1}^{\infty} c_i < \infty$ を満たす実数列とします。このとき $\overline{\lim}_n a_n \leqq M$ となります。

証明： 仮定より、任意の $\varepsilon > 0$ について $n_1 \in N$ が存在して $n \geqq n_1$ のとき $b_n < M + \varepsilon/3$, $\sum_{k=n_1}^{\infty} c_k < \varepsilon/3$ とすることができます。$M' = M + \varepsilon/3$ とおき $k \geqq n_1$ とすると次の関係が成立します。

$$\begin{aligned} a_{k+2} &\leqq (1-\alpha_{k+1})a_{k+1} + \alpha_{k+1}M' + c_{k+1} \\ &\leqq (1-\alpha_{k+1})\left((1-\alpha_k)a_k + \alpha_k M' + c_k\right) + \alpha_{k+1}M' + c_{k+1} \\ &= (1-\alpha_{k+1})(1-\alpha_k)a_k + ((1-\alpha_{k+1})\alpha_k + \alpha_{k+1})M' + (c_{k+1} + c_k) \end{aligned}$$

ここで

$$(1-\alpha_{k+1})\alpha_k + \alpha_{k+1} = 1 - (1 - (1-\alpha_{k+1})\alpha_k - \alpha_{k+1}) = 1 - (1-\alpha_{k+1})(1-\alpha_k) < 1$$

という巧妙な変形ができて、正確には帰納法によりますが $m > n_1$ のとき

$$a_m \leqq M' + \Pi_{k=n_1}^{m-1}(1-\alpha_k)a_{n_1} + \sum_{k=n_1}^{m-1} c_k$$

仮定より $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$ ですから、$n_2 > n_1$ で $n > n_2$ ならば $\Pi_{k=n_1}^{n-1}(1-\alpha_k) < \varepsilon/3a_{n_1}$ となる n_2 が存在します。したがって、$n > n_2$ とすれば

$$a_n \leqq M' + \Pi_{k=n_1}^{n-1}(1-\alpha_k)a_{n_1} + \sum_{k=n_1}^{n-1} c_k \leqq (M + \varepsilon/3) + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = M + \varepsilon \quad \therefore \quad \overline{\lim}_n a_n \leqq M \quad \square$$

Hilbert 空間での収束定理を高橋の本[1]で学習したときに、*Mann* の弱収束定理と *Baillon* の非線形エルゴード定理に共通する基本構造はどのようなものか、また *Browder* の定理と中条 – 高橋の定理に共通する基本的な構造はどのようなものかを考え、2 つの *Lemma* を得ました。ここでは強収束定理に関係する *Lemma* 3.3 だけに言及します。この *Lemma* の内容は既に *Banach* 空間の議論で使用されていました。使いやすいように 2 つの部分に分けておきます。*Hilbert* 空間の *B* 点列の収束に関する *Browder* の定理と後述する *hybrid* は、きれいにこの図式にのります。

Lemma 3.2： D を一様凸な *Banach* 空間 E の空ではない閉凸集合, $x_0 \in E$ とします。$P: E \to D$ を距離射影、$z_0 = Px_0$ とします。E の点列 $\{u_n\}$ が $u_n \xrightarrow{w} u \in D$, $\overline{\lim}_n \|x_0 - u_n\| \leqq \|x_0 - z_0\|$ を満たすならば、u_n は $u = z_0$ に強収束します。

証明： $u \in D$ とノルムが下半連続であることから

$$\begin{aligned} \|x_0 - z_0\| &\leqq \|x_0 - u\| && \because\ u \in D,\ z_0 = Px_0 \\ &\leqq \underline{\lim}_n \|x_0 - u_n\| && \because\ x_0 - u_n \xrightarrow{w} x_0 - u \\ &\leqq \overline{\lim}_n \|x_0 - u_n\| \end{aligned}$$

$$\leqq \| x_0 - z_0 \| \qquad\qquad \because \text{ 仮定より}$$

したがって $\lim_n \| x_0 - u_n \| = \| x_0 - u \| = \| x_0 - z_0 \|$ かつ $x_0 - u_n \xrightarrow{w} x_0 - u$ となります。E は *Kadec－Klee property* を持ちますから $x_0 - u_n \to x_0 - u$ となります。ここで $\| x_0 - u \| = \| x_0 - z_0 \|$, $z_0 = Px_0 \in D$, $u \in D$ です。したがって $z_0 = u$ となり $u_n \to z_0 = u$ を得ます。□

Lemma 3.3： C を一様凸な *Banach* 空間 E の空ではない閉凸集合とし $T : C \to E$ を $F(T) \neq \phi$ である非拡大写像とします。任意に $x_0 \in E$ をとり P を $F(T)$ への距離射影、$z_0 = Px_0$ とします。C の点列 $\{u_n\}$ が $\overline{\lim}_n \| x_0 - u_n \| \leqq \| x_0 - z_0 \|$, $\lim_n \| Tu_n - u_n \| = 0$ を満たすならば、u_n は z_0 に強収束します。

証明： $z_0 = Px_0 \in F(T)$ とすると $\overline{\lim}_n \| x_0 - u_n \| \leqq \| x_0 - z_0 \|$ より $\{u_n\}$ が有界なことは明らかです。したがって任意の部分列は弱収束する部分列を持ちます。$\{u_{n_i}\} : u_{n_i} \xrightarrow{w} u_i \in C$ を任意の弱収束する部分列とすると $\lim_n \| Tu_n - u_n \| = 0$ より $\lim_i \| Tu_{n_i} - u_{n_i} \| = 0$ となります。したがって *Theorem* 2.1 によって $u_i \in F(T)$ となります。$F(T)$ は空ではない閉凸集合で、$\overline{\lim}_{n_i} \| x_0 - u_{n_i} \| \leqq \| x_0 - z_0 \|$ は明らかですから *Lemma* 3.2 より $u_{n_i} \to z_0 = u_i$ となります。このようにして、任意の部分列が z_0 に強収束する部分列を持ちます。よって u_n は z_0 に強収束します。□

この *Lemma* はノルムで書かれていますので幾何的な意味がとりやすいと思います。しかし、*Banach* 空間の問題や H 点列の収束を直接この *Lemma* に帰着するのは難しく近似法の特性を生かした考え方が必要になります。後の議論のために簡単な内積の計算で確認できる次の *Lemma* をあげておきます。

Lemma 3.4 H を *Hilbert* 空間とし、$x_0, z_0 \in H$, $\{u_n\}$ を H の点列とすると次の関係が成立します。

(a) $0 \leqq \langle x_0 - u_n , u_n - z_0 \rangle \Rightarrow \| x_0 - u_n \| \leqq \| x_0 - z_0 \|$

(b) $0 \leqq \langle x_0 - u_n , u_n - u_{n+1} \rangle \Rightarrow \| x_0 - u_n \| \leqq \| x_0 - u_{n+1} \|$

(c) $0 \leqq \langle x_0 - u_n , u_n - u_{n+1} \rangle \Rightarrow \| u_n - u_{n+1} \|^2 \leqq \| x_0 - u_{n+1} \|^2 - \| u_n - x_0 \|^2$

証明： $y \in H$ とすると

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \langle x_0 - u_n , u_n - y \rangle = \langle x_0 - u_n , u_n - x_0 + x_0 - y \rangle \\ &\leqq -\| x_0 - u_n \|^2 + \| x_0 - u_n \| \| x_0 - y \| \qquad \therefore \ \| x_0 - u_n \| \leqq \| x_0 - y \| \end{aligned}$$

ここで $y = z_0$ とすると (a), $y = u_{n+1}$ とすると (b) を得ます。

$$\begin{aligned} \| u_n - u_{n+1} \|^2 &= \| (u_n - x_0) + (x_0 - u_{n+1}) \|^2 \\ &= \| u_n - x_0 \|^2 + \| x_0 - u_{n+1} \|^2 + 2 \langle u_n - x_0 , x_0 - u_{n+1} \rangle \\ &= \| u_n - x_0 \|^2 + \| x_0 - u_{n+1} \|^2 + 2 \langle u_n - x_0 , x_0 - u_n + u_n - u_{n+1} \rangle \\ &= -\| u_n - x_0 \|^2 + \| x_0 - u_{n+1} \|^2 - 2 \langle x_0 - u_n , u_n - u_{n+1} \rangle \\ &\leqq \| x_0 - u_{n+1} \|^2 - \| u_n - x_0 \|^2 \qquad \because \text{ (c) の仮定より} \end{aligned}$$
□

次の定理は B 点列の収束についての *Browder* による有名な定理です。*Hirbert* 空間の特性を使った初等的で簡潔な証明をつけます。*Lemma* 3.4 (a) で双対写像 $J = I$ の線形性を使用しているので、この証明自体は *Banach* 空間には通用しません。

Theorem 3.5 **(Browder [13])** C を *Hilbert* 空間 H の空ではない閉凸集合とします。$T : C \to C$ を $F(T) \neq \phi$ である非拡大写像とします。任意に $x_0 \in C$ をとり、P を $F(T)$ への距離射影とし $z_0 = Px_0$ とします。$\{u_n\}$ を B 係数 $\{\alpha_n\}$ による B 点列とすると u_n は z_0 に強収束します。

証明 $u_n = \alpha_n x_0 + (1 - \alpha_n) Tu_n$ より $(u_n - z_0) = \alpha_n (x_0 - z_0) + (1 - \alpha_n)(Tu_n - Tz_0)$ となります。したがって $\|u_n - z_0\| \leqq \alpha_n \|x_0 - z_0\| + (1 - \alpha_n) \|u_n - z_0\|$、よって $\alpha_n \|u_n - z_0\| \leqq \alpha_n \|x_0 - z_0\|$、つまり $\|u_n - z_0\| \leqq \|x_0 - z_0\|$ とな

ります。したがって $\{u_n\},\{Tu_n\}$ が有界であることが分ります。また $u_n=\alpha_n x_0+(1-\alpha_n)Tu_n$ より $\|u_n-Tu_n\|=\alpha_n\|x_0-Tu_n\|$, $\{\alpha_n\}$ は B 係数ですから $\lim_n \|u_n-Tu_n\|=0$ となります。任意の $u\in F(T)$ について

$$\begin{aligned}\|u_n-u\|^2 &= \langle \alpha_n(x_0-u)+(1-\alpha_n)(Tu_n-Tu),\ u_n-u\ \rangle\\ &= \alpha_n\langle x_0-u,\ u_n-u\rangle+(1-\alpha_n)\langle Tu_n-Tu,\ u_n-u\rangle\\ &\leqq \alpha_n\langle x_0-u,\ u_n-u\rangle+(1-\alpha_n)\|u_n-u\|^2\\ &= \alpha_n\langle x_0-u_n,\ u_n-u\rangle+\|u_n-u\|^2\end{aligned}$$

したがって $\langle x_0-u_n,\ u_n-u\rangle\geqq 0$ 特に $u=z_0$ とすれば $\langle x_0-u_n,\ u_n-z_0\rangle\geqq 0$, Lemma 3.3 (a) より $\|x_0-u_n\|\leqq\|x_0-z_0\|$ を得ます。よって $\{u_n\}$ は Lemma 3.2 の条件を満たしますので結論を得ます。 □

次は *Wittmann* による H 点列の収束に関する美しい定理です。$\{\alpha_n\}$ が W 係数であるということの素朴なイメージは、緩やかに 0 まで減少する点列が漣のようなわずかな上下動をともなってもよいということですから、著者は非常に自然な仮定だと思います。

Theorem 3.6 (Wittmann [28]) C を *Hilbert* 空間 H の空ではない閉凸集合とします。$T:C\to C$ を $F(T)\neq\phi$ である非拡大写像とします。 任意の $x_0\in C$ をとり、P を $F(T)$ への距離射影とし $z_0=Px_0$ とします。任意に $u_1\in C$ をとり $\{u_n\}$ を W 係数 $\{\alpha_n\}$ による H 点列とすると u_n は z_0 に強収束します。

証明 $F(T)$ は空ではない閉凸集合ですから z_0 の存在は明らかです。$D=\{y\in C:\ \|y-z_0\|\leqq\|x_0-z_0\|+\|u_1-z_0\|\}$ とすれば、D が空でない有界閉凸集合であることと $T:D\to D$ も明らかです。また $x_0, u_n, z_0\in D$ も明らかです。$K=\sup\{\|z\|:\ z\in D\}$ とします。任意の $n\in N$ について

$$\begin{aligned}\|u_{n+2}-u_{n+1}\| &= \|\alpha_{n+1}u_1+(1-\alpha_{n+1})Tu_{n+1}-\alpha_n u_1-(1-\alpha_n)Tu_n\|\\ &\leqq |\alpha_{n+1}-\alpha_n|\|u_1\|+(1-\alpha_{n+1})\|Tu_{n+1}-Tu_n\|+|\alpha_{n+1}-\alpha_n|\|Tu_n\|\\ &\leqq (1-\alpha_{n+1})\|u_{n+1}-u_n\|+\alpha_{n+1}\cdot 0+2K\,|\alpha_{n+1}-\alpha_n|\end{aligned}$$

ここで $\{\alpha_n\}$ は W 係数ですから、*Lemma* 3.1 の $M=0$ のケースとなり $\overline{\lim}_n\|u_{n+1}-u_n\|=0$ となります。したがって、$\lim_n\|Tu_n-u_n\|=\overline{\lim}_n\|Tu_n-u_n\|=0$ です。

$\{u_n\}$ は有界ですから上極限 $\overline{\lim}_n\langle x_0-z_0,\ u_n-z_0\rangle=a$ が存在します。上極限の性質から a に収束する $\{\langle x_0-z_0,\ u_n-z_0\rangle\}$ の部分列が存在します。$\{u_n\}$ の任意の部分列は弱収束する部分列を持ちますから、次の条件を満たす $\{u_n\}$ の部分列 $\{u_{n_i}\}$ が存在することになります。

$$\lim_{n_i}\|Tu_{n_i}-u_{n_i}\|=0,\quad u_{n_i}\xrightarrow{w} z,\quad \lim_{n_i}\langle x_0-z_0,\ u_{n_i}-z_0\rangle=a$$

$u_{n_i}\xrightarrow{w} z$ と $\lim_n\|Tu_{n_i}-u_{n_i}\|=0$ より $z\in F(T)$ となり、また $Px_0=z_0$ ですから $\langle x_0-z_0,\ z-z_0\rangle\leqq 0$ となります。したがって

$$a=\overline{\lim}_n\langle x_0-z_0,\ u_n-z_0\rangle=\lim_{n_i}\langle x_0-z_0,\ u_{n_i}-z_0\rangle=\langle x_0-z_0,\ z-z_0\rangle\leqq 0$$

ここで $u_{n+1}-z_0=\alpha_n(x_0-z_0)+(1-\alpha_n)(Tu_n-z_0)$ に $\|x+y\|^2\leqq\|x\|^2+2\langle y,x+y\rangle$ という関係を使うと

$$\begin{aligned}\|u_{n+1}-z_0\|^2 &\leqq (1-\alpha_n)^2\|Tu_n-z_0\|^2+2\alpha_n\langle x_0-z_0,\ u_{n+1}-z_0\rangle\\ &\leqq (1-\alpha_n)\|u_n-z_0\|^2+\alpha_n(2\langle x_0-z_0,\ u_{n+1}-z_0\rangle)\end{aligned}$$

これは *Lemma* 3.1 で $M=0$, $c_n=0$ のケースですから $\overline{\lim}_n\|u_n-z_0\|^2\leqq 0$ となり結論を得ます。 □

Theorem 3.5 の証明から、*Hilbert* 空間の B 点列は x_0 を中心として半径 $\|x_0-z_0\|$ の球から飛び出さないという顕著な特性を持つことが分ります。しかし *Banch* 空間ではこの性質は期待できません。一方、証明の中で表れた $\langle x_0-u_n,\ u_n-u\rangle\geqq 0$ という性質は、ケット部分 u_n-u を全く使用していませんから、一様凸な *Banach* 空間でも成立し $\langle x_0-u_n,\ J(u_n-u)\rangle\geqq 0$ となります。この性質は後述する *hybrid* の条件の 1 つと同じ形であり、また *sunny nonexpansive* な射影とも同じ形であることに注意してください。$\|u_n-z_0\|^2+\langle x_0-u_n,\ J(u_n-z_0)\rangle=$

$\langle x_0 - z_0 , J(u_n - z_0) \rangle$ という関係に注目すると、もし $\overline{\lim}_n \langle x_0 - z_0 , J(u_n - z_0) \rangle \leqq 0$ が示せたとすると *Banach* 空間での定理が得られることになります。

H 点列については、*Hilbert* 空間においてさえ既に $\langle x_0 - u_n , J(u_n - u) \rangle \geqq 0$ という関係を示すことができません。しかし、*RS* 係数による *H* 点列を考えると係数の条件が *B* 係数より強いため

$$\|u_{n+1} - z_0\|^2 \leqq (1-\alpha_n)\|u_n - z_0\|^2 + \alpha_n(2\langle x_0 - z_0 , J(u_{n+1} - z_0)\rangle)$$

という関係は一様凸な *Banach* 空間で成立します。*B* 点列と同様に $\overline{\lim}_n \langle x_0 - z_0 , J(u_n - z_0) \rangle \leqq 0$ という関係を示せたとすれば定理が得られることになります。したがって、*B* 点列と *H* 点列の収束を考える場合は $\overline{\lim}_n \langle x_0 - z_0 , J(u_n - z_0) \rangle \leqq 0$ が示せるかどうかが鍵となります。*Theorem* 3.5 の証明で見たように、この性質は *Hilbert* 空間では距離射影の性質から簡単に出ますが、*Banach* 空間ではやさしくありません。

4. Banach 空間の収束定理

この節では *Banach* 空間における *B* 点列, *H* 点列と *S* 点列の収束を調べます。これは高橋－上田 [26], 塩路－高橋 [11] の論文から鈴木 [25] の論文までを概観することになります。[26][11] は、ある意味で現在の *Banach* 空間の強収束定理の枠組みを決めてしまった素晴らしい論文です。著者には発想の原点が良く分からない部分が多いのですが、豊かな発想と *Banach limit* を駆使した非常に巧妙なものです。高橋の研究業績は内外に良く知られていますが、もう 1 つの重要な業績として多くの優秀な研究者を育てた事実があります。俊秀鈴木の論文は塩路－高橋と同じ空間の条件で、*RS* 係数を持つある種の *H* 点列 (*S* 点列) が強収束することを示しました。*RS* 係数は *H* 点列が強収束するためにこれ以上弱められない条件です。

ここでは原論文を矮小化することになるかもしれませんが、一様凸な空間で $F(T) \neq \phi$ を仮定して *Theorem* を記述します。*B* 点列の議論から始めます。*B* 点列の強収束は一般化した増大作用素のリゾルベントの零点への強収束の系として扱われ、単独の証明を見たことがありません。著者は高橋－上田 [26] を直接目にする機会がなかったので、高橋 [2], [3] に基づいて単独の証明をつけます。

Lemma 4.1 C を一様凸な *Banach* 空間 E の空ではない閉凸集合とします。$T : C \to C$ を $F(T) \neq \phi$ である非拡大写像とします。 任意の $x_0 \in C$ をとり、$\{u_n\}$ を *B* 係数 $\{\alpha_n\}$ による *B* 点列, $u \in F(T)$ とすると次の事実が成立します。

(1) $\lim_n \|u_n - Tu_n\| = 0$,　　(2) $\langle x_0 - u_n , J(u_n - u) \rangle \geqq 0$,　　(3) $\|u_n - u\|^2 \leqq \langle x_0 - u , J(u_n - u) \rangle$

証明 *Theorem* 3.5 と同様にして $\{u_n\}, \{Tu_n\}$ が有界、(1) $\lim_n \|u_n - Tu_n\| = 0$ となります。任意の $u \in F(T)$ について

$$\begin{aligned}\|u_n - u\|^2 &= \langle \alpha_n(x_0 - u) + (1-\alpha_n)(Tu_n - Tu) , J(u_n - u) \rangle \\ &= \alpha_n \langle x_0 - u , J(u_n - u) \rangle + (1-\alpha_n)\langle Tu_n - Tu , J(u_n - u) \rangle \\ &\leqq \alpha_n \langle x_0 - u , J(u_n - u) \rangle + (1-\alpha_n)\|u_n - u\|^2 \quad \cdots \quad (*) \\ &= \alpha_n \langle x_0 - u_n , J(u_n - u) \rangle + \|u_n - u\|^2\end{aligned}$$

したがって (2) $\langle x_0 - u_n , J(u_n - u) \rangle \geqq 0$ となります。(3) は (*) の 2 項目を左辺に移項すれば得られます。 □

Lemma 4.2 C を一様凸な *Banach* 空間 E の空ではない閉凸集合とします。$T : C \to C$ を $F(T) \neq \phi$ である非拡大写像とします。 任意の $x_0 \in C$ をとり、$\{u_n\}$ を *B* 係数 $\{\alpha_n\}$ による *B* 点列, $\{w_n\}$ を *B* 係数 $\{\beta_n\}$ による *B* 点列とすると次の事実が成立します。

(1) $u_n \to u \in C$ とすれば $u \in F(T)$ となります。

(2) $u_n \to u \in C$, $w_n \to w \in C$ とすれば $u = w$ となります。

証明 (1) $\lim_n \|u_n - Tu_n\| = 0$ と $\|u - Tu\| \leqq \|u - Tu_n\| + \|Tu_n - Tu\| \leqq \|u - u_n\| + \|u_n - u\|$ より明らかで

す。(2) を示します。(1) より $u,w \in F(T)$ となります。したがって *Lemma* 4.1 (2) より

$$\langle x_0-u_n, J(u_n-w)\rangle \geqq 0, \quad \langle x_0-w_n, J(w_n-u)\rangle \geqq 0$$

$u_n \to u \in C,\ w_n \to w \in C$ ですから $\langle x_0-u, J(u-w)\rangle \geqq 0, \langle x_0-w, J(w-u)\rangle \geqq 0$ となります。これを加えて $-\|u-w\|^2 = \langle u-w, J(w-u)\rangle \geqq 0$ となり、$u=w$ を得ます。 □

Lemma 4.1 より次の *Lemma* が成立します。

Lemma 4.3 C を一様凸な *Banach* 空間 E の空ではない閉凸集合とします。$T: C \to C$ を $F(T) \neq \phi$ である非拡大写像とします。 任意の $x_0 \in C$ をとり、$\{u_n\}$ を B 係数 $\{\alpha_n\}$ による B 点列, $u \in F(T)$ とすると次は同値になります。

(1) $\|u_n-u\| \to 0$, (2) $J(u_n-u) \xrightarrow{w^*} 0$, (3) $\overline{\lim}_n \langle x_0-u, J(u_n-u)\rangle \leqq 0$.

次の定理は B 点列の収束定理です。比較すべき点列が示唆されているので *Banach limit* を使用しない簡潔な証明がないかと考えたのですが、返って複雑になるように思います。証明の中で言葉足らずの点については高橋[2],[3]を参照してください。

Theorem 4.4 (**高橋-上田 [26]**) E を一様凸でノルムが一様 *Gâteaux* 微分可能な *Banach* 空間とします。C を E の空ではない閉凸集合とします。$T: C \to C$ を $F(T) \neq \phi$ である非拡大写像とします。 任意の $x_0 \in C$ をとり、$\{u_n\}$ を B 係数 $\{\alpha_n\}$ による B 点列とすると,$\{u_n\}$ はある $z_0 \in F(T)$ に強収束します。

証明 *Lemma* 4.2 より B 点列が強収束すれば収束先は $F(T)$ の同一の点になります。したがって B 点列の任意の部分列が強収束する部分列を持つことを示せば良いことになります。B 点列の部分列はまた B 点列ですから、単に $\{u_n\}$ が強収束する部分列を持つことを示せば良いことになります。$\{u_n\}$ が有界であることと、$\lim_n \|u_n-Tu_n\|=0$ は分っています。

μ を *Banach limit* とすると、$\mu_n\|u_n-z\|^2$ は $z \in C$ の実数値関数として連続な凸関数となります。

$$r=\inf\{\mu_n\|u_n-z\|^2 : z \in C\}, \quad K=\{z \in C : \mu_n\|u_n-z\|^2=r\}$$

とすると、高橋の最小値定理により K が空でないことが分ります。$\mu_n\|u_n-z\|^2$ が z の連続な凸関数であることから K は閉凸集合になります。$\varepsilon>0$ をとると、任意の $z \in K$ について *Banach limit* の性質より, $\inf_n\|u_n-z\|^2 \leqq \mu_n\|u_n-z\|^2=r$ となり、n_z が存在して $\|u_{n_z}-z\|^2 \leqq r+\varepsilon$ となります。$\{u_n\}$ が有界であることより K が有界となります。したがって K は C の空ではない有界閉凸部分集合です。

また、任意の $z \in K$ について $\lim_n \|u_n-Tu_n\|=0$ より

$$\mu_n\|u_n-Tz\|^2 \leqq \mu_n(\|u_n-Tu_n\|+\|Tu_n-Tz\|)^2 \leqq \mu_n\|Tu_n-Tz\|^2 \leqq \mu_n\|u_n-z\|^2=r$$

となって $TK \subset K$ が分ります。

したがって、E が一様凸で, K が有界閉凸集合, $TK \subset K$ であることから $Tz_0=z_0$ を満たす $z_0 \in K$ が存在します。つまり、$z_0 \in F(T)$, $\mu_n\|u_n-z_0\|^2=\min\{\mu_n\|u_n-z\|^2 : z \in C\}$ となります。

$\lambda \in (0,1)$ である実数 λ について $\{x_\lambda\}$ を $x_\lambda=\lambda x_0+(1-\lambda)z_0$ で定義し、$\{u_n\}$ と比較します。x_λ を 1 つ固定すると

$$\|u_n-z_0\|^2-\|u_n-x_\lambda\|^2 \geqq 2\langle x_\lambda-z_0, J(u_n-x_\lambda)\rangle \geqq 2\lambda\langle x_0-z_0, J(u_n-x_\lambda)\rangle$$

$$\frac{1}{2\lambda}(\|u_n-z_0\|^2-\|u_n-x_\lambda\|^2) \geqq \langle x_0-z_0, J(u_n-x_\lambda)\rangle$$

ここで *Banach limit* をとると $0 \geqq \frac{1}{2\lambda}(\mu_n\|u_n-z_0\|^2-\mu_n\|u_n-x_\lambda\|^2) \geqq \mu_n\langle x_0-z_0, J(u_n-x_\lambda)\rangle$

$\lambda \to 0$ のとき $x_\lambda \to z_0$ で E のノルムは一様 *Gâteaux* 微分可能ですから、任意の $\varepsilon>0$ について $\lambda(\varepsilon)$ が存在して

$$\langle x_0-z_0, J(u_n-z_0)\rangle-\langle x_0-z_0, J(u_n-x_{\lambda(\varepsilon)})\rangle < \varepsilon$$

$\langle x_0 - z_0 , J(u_n - z_0) \rangle < \langle x_0 - z_0 , J(u_n - x_{\lambda(\varepsilon)}) \rangle + \varepsilon$

$\mu_n \langle x_0 - z_0 , J(u_n - z_0) \rangle \leqq \mu_n \langle x_0 - z_0 , J(u_n - x_{\lambda(\varepsilon)}) \rangle + \varepsilon < \varepsilon$

したがって $\underline{\lim}_n \langle x_0 - z_0 , J(u_n - z_0) \rangle \leqq \mu_n \langle x_0 - z_0 , J(u_n - z_0) \rangle \leqq 0$

よって $\lim_{n_i} \langle x_0 - z_0 , J(u_{n_i} - z_0) \rangle = \underline{\lim}_n \langle x_0 - z_0 , J(u_n - z_0) \rangle \leqq 0$ を満たす部分点列$\{u_{n_i}\}$が存在します。*Lemma* 4.3 によって$\{u_{n_i}\}$は z_0に強収束します。最初の注意から$\{u_n\}$は z_0に強収束します。□

次に H 点列の収束を調べます。具体的には B 点列と比較しますが、先ほどの B 点列と $\{x_\lambda\}$ の関係よりも少し具体的な関係があります。*Banach limit* の使用を避けた、この比較の方法を著者は考えていたのですが *Chidum – Chidum* [16] が同様の方法を既に発表していました。驚いたことに塩路自身が 10 年前にこの講究録 [10] で本質的に同じ方法を発表していたことを数日前に知りました。この手法は非拡大写像の族の共通不動点への近似の構造を調べる上でも有効な手法です。

Lemma 4.5 E を一様凸でノルムが一様 *Gâteaux* 微分可能な *Banach* 空間とします。C を E の空ではない閉凸集合とします。$T : C \to C$ を $F(T) \neq \phi$ である非拡大写像とします。 任意に $x_0, u_1 \in C$ をとり、$\{u_n\}$ を *RS* 係数 $\{\alpha_n\}$ による H 点列で $\lim_n \|u_n - Tu_n\| = 0$ を満たすとすると,$\{u_n\}$ はある $z_0 \in F(T)$ に強収束します。

証明 $\lim_n \|u_n - Tu_n\| = 0$ より $\|u_n - Tu_n\| = \beta_n^2$, $\beta_n > 0$ とすれば$\{\beta_n\}$は B 係数となります。ここで $0 < \|u_n - Tu_n\| < 1$ を仮定して構いません。B 係数$\{\beta_n\}$による B 点列を$\{z_n\}$とします。このとき *Theorem* 4.4 によって$\{z_n\}$はある $z_0 \in F(T)$ に強収束します。

$z_n - u_n = \beta_n (x_0 - u_n) + (1 - \beta_n)(Tz_n - u_n)$ に $\|x + y\|^2 \leqq \|x\|^2 + 2\langle y, J(x+y)\rangle$ という関係を使うと

$$\begin{aligned}\|z_n - u_n\|^2 &\leqq (1-\beta_n)^2 \|Tz_n - u_n\|^2 + 2\beta_n \langle x_0 - u_n , J(z_n - u_n)\rangle \\ &\leqq (1-\beta_n)^2 (\|Tz_n - Tu_n\| + \|Tu_n - u_n\|)^2 + 2\beta_n \|z_n - u_n\|^2 + 2\beta_n \langle x_0 - z_n , J(z_n - u_n)\rangle \\ &\leqq (1+\beta_n^2)\|z_n - u_n\|^2 + \beta_n^2(2\|z_n - u_n\| + \beta_n^2) + 2\beta_n \langle x_0 - z_n , J(z_n - u_n)\rangle\end{aligned}$$

したがって

$$\langle x_0 - z_n , J(u_n - z_n)\rangle \leqq \tfrac{1}{2}\beta_n \|z_n - u_n\|^2 + \tfrac{1}{2}\beta_n (2\|z_n - u_n\| + \beta_n^2)$$

$\{u_n\}$, $\{z_n\}$は有界で$\{\beta_n\}$は B 係数ですから $\overline{\lim}_n \langle x_0 - z_n , J(u_n - z_n)\rangle \leqq 0$ となります。

したがって、任意の $\varepsilon > 0$ について充分大きな n をとれば

$\langle x_0 - z_n , J(u_n - z_n)\rangle < \frac{1}{3}\varepsilon$

$\langle x_0 - z_0 , J(u_n - z_n)\rangle - \langle x_0 - z_n , J(u_n - z_n)\rangle < \frac{1}{3}\varepsilon \quad \because \quad \|z_n - z_0\| \to 0$

$\langle x_0 - z_0 , J(u_n - z_0)\rangle - \langle x_0 - z_0 , J(u_n - z_n)\rangle < \frac{1}{3}\varepsilon \quad \because$ E は一様 *Gâteaux* 微分可能

辺々加えることによって $\langle x_0 - z_0 , J(u_n - z_0)\rangle < \varepsilon$, よって $\overline{\lim}_n \langle x_0 - z_0 , J(u_n - z_0)\rangle \leqq 0$ を得ます。

$u_{n+1} - z_0 = \alpha_n (x_0 - z_0) + (1-\alpha_n)(Tu_n - z_0)$ に $\|x+y\|^2 \leqq \|x\|^2 + 2\langle y, J(x+y)\rangle$ という関係を使うと

$$\begin{aligned}\|u_{n+1} - z_0\|^2 &\leqq (1-\alpha_n)^2 \|Tu_n - z_0\|^2 + 2\alpha_n \langle x_0 - z_0 , J(u_n - z_0)\rangle \\ &\leqq (1-\alpha_n)\|u_n - z_0\|^2 + \alpha_n (2\langle x_0 - z_0 , J(u_{n+1} - z_0)\rangle)\end{aligned}$$

$\{\alpha_n\}$ が *RS* 係数より、*Lemma* 3.1 で $M = 0$, $c_n = 0$ のケースです。したがって、$\overline{\lim}_n \|u_n - z_0\|^2 \leqq 0$ となり結論を得ます。 □

Lemma 4.6 E を一様凸な *Banach* 空間とします。C を E の空ではない閉凸集合とします。$T : C \to C$ を $F(T) \neq \phi$ である非拡大写像とします。 任意に $x_0, u_1 \in C$ をとり、$\{u_n\}$ を W 係数 $\{\alpha_n\}$ による H 点列とすると $\lim_n \|u_n - Tu_n\| = 0$ となります。

証明 $F(T)$ は空ではない閉凸集合ですから $z_0 \in F(T)$ とします。$D = \{y \in C : \|y - z_0\| \leqq \|x_0 - z_0\| + \|u_1 - z_0\|\}$ とすれば、D が空でない有界閉凸集合であることと $T : D \to D$ も明らかです。また $x_0, u_n, z_0 \in D$ も明

らかです。$K=\sup\{\|z\| : z\in D\}$ とします。任意の $n\in N$ について

$$\begin{aligned}\|u_{n+2}-u_{n+1}\| &= \|\alpha_{n+1}u_1+(1-\alpha_{n+1})Tu_{n+1}-\alpha_n u_1-(1-\alpha_n)Tu_n\| \\ &\leqq |\alpha_{n+1}-\alpha_n|\|u_1\|+(1-\alpha_{n+1})\|Tu_{n+1}-Tu_n\|+|\alpha_{n+1}-\alpha_n|\|Tu_n\| \\ &\leqq (1-\alpha_{n+1})\|u_{n+1}-u_n\|+\alpha_{n+1}\cdot 0+2K|\alpha_{n+1}-\alpha_n|\end{aligned}$$

ここで $\{\alpha_n\}$ は W 係数ですから、*Lemma* 3.1 の $M=0$ のケースとなり $\overline{\lim}_n \|u_{n+1}-u_n\|=0$ となります。したがって、$\lim_n \|Tu_n-u_n\|=\overline{\lim}_n \|Tu_n-u_n\|=0$ です。 □

Lemma 4.5 と *Lemma* 4.6 によって塩路－高橋の定理を得ます。幸いこの論文は *google scholar* から *PDF* を閲覧できます。

Theorem 4.7 （塩路-高橋 [11]） E を一様凸でノルムが一様 *Gâteaux* 微分可能な *Banach* 空間とします。C を E の空ではない閉凸集合とします。$T : C\to C$ を $F(T)\neq\phi$ である非拡大写像とします。 任意に $x_0, u_1\in C$ をとり、$\{u_n\}$ を W 係数 $\{\alpha_n\}$ による H 点列とすると $\{u_n\}$ はある $z_0\in F(T)$ に強収束します。

次に S 点列の収束定理を導きます。鈴木によるこの定理は、塩路－高橋と同じ空間の条件で、*RS* 係数によるある種の H 点列が強収束することを示しました。*RS* 係数は H 点列が強収束するための最も弱い条件です。著者にとっては、発想をきちんと理解しているとは言いがたいのですが、この条件での純粋な強収束定理として興味深いものです。鈴木自身が講究録[9]で語っているように *Chidum－Chidum*[16] も少し遅れて同時期に同内容の結果を発表しています。偶然が過ぎるようにも思うのですが、記法の違いを除けば(本質的に新しい部分 *Lemma* 4.9) の証明はまったく同じです。*Lemma* 4.9 の証明には鈴木の *Lemma*[12] を必要とします。これ自身興味深い内容ですので証明の概要を記述したいのですが、紙数の関係で割愛します。[12] ではかなり一般的な条件で記述されているので、本稿で必要な程度に条件を変更してあります。この論文も *google scholar* から *PDF* を閲覧できます。帰納法部分がやや分かりづらいかもしれません。

Lemma 4.8 （鈴木 [12]） E を *Banach* 空間とし、実数 λ が $\lambda\in(0,1)$ を満たすとします。実数列 $\{\beta_n\}$ が $\beta_n\in(0,1)$ と $\lim_n \beta_n=\lambda$ を満たすとします。このとき、E の有界な点列 $\{u_n\}, \{y_n\}$ が

(1) $u_{n+1}=\beta_n y_n+(1-\beta_n)u_n$, (2) $\overline{\lim}_n(\|y_{n+1}-y_n\|-\|u_{n+1}-u_n\|)\leqq 0$

を満たすとすれば、$\lim_n \|y_n-u_n\|=0$ となります。

Lemma 4.9 （鈴木 [25]） E を一様凸でノルムが一様 *Gâteaux* 微分可能な *Banach* 空間とします。C を E の空ではない閉凸集合とします。$T : C\to C$ を $F(T)\neq\phi$ である非拡大写像とします。 任意に $x_0, u_1\in C$ をとり、$\{u_n\}$ を *RS* 係数 $\{\alpha_n\}$ と $\lambda\in(0,1)$ による S 点列

$$u_{n+1}=\alpha_n x_0+(1-\alpha_n)S_\lambda u_n, \quad S_\lambda u_n=\lambda Tu_n+(1-\lambda)u_n$$

とすると，$F(S_\lambda)=F(T)$ かつ $\lim_n \|u_n-S_\lambda u_n\|=0$ となります。

証明 任意の $y\in C$ について $S_\lambda y=\lambda Ty+(1-\lambda)y$ が非拡大写像であり $F(S_\lambda)=F(T)$ となることはほとんど自明です。$\beta_n=\alpha_n+(1-\alpha_n)\lambda\in(0,1)$ とすると $1-\beta_n=(1-\alpha_n)-(1-\alpha_n)\lambda=(1-\alpha_n)(1-\lambda)\in(0,1)$, また $\lim_n\beta_n=\lambda\in(0,1)$ となります。$\gamma_n=\alpha_n/\beta_n=\alpha_n/(\alpha_n+(1-\alpha_n)\lambda)\in(0,1)$ とすれば $\lim_n \gamma_n=0$, $\beta_n(1-\gamma_n)=\beta_n-\alpha_n=(1-\alpha_n)\lambda$ となります。点列 $\{y_n\}$ を次のように定義します。

$$y_n=\gamma_n x_0+(1-\gamma_n)Tu_n$$

次の計算よりこの式は $u_{n+1}=\beta_n y_n+(1-\beta_n)u_n$, $u_{n+1}-u_n=\beta_n(y_n-u_n)$ と書き直すことができます。

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=\alpha_n x_0+(1-\alpha_n)(\lambda Tu_n+(1-\lambda)u_n) \\ &=\beta_n\gamma_n x_0+(1-\alpha_n)\lambda Tu_n+(1-\alpha_n)(1-\lambda)u_n \\ &=\beta_n(\gamma_n x_0+(1-\gamma_n)Tu_n)+(1-\beta_n)u_n=\beta_n y_{n+1}+(1-\beta_n)u_n\end{aligned}$$

$z \in F(T) = F(S_\lambda)$ として $M = \|x_0 - z\| + \|u_1 - z\|$ とすると正確には帰納法によりますが

$$\|u_{n+1} - z\| \leqq \alpha_n \|x_0 - z\| + (1-\alpha_n)\|S_\lambda u_n - z\| \leqq \alpha_n \|x_0 - z\| + (1-\alpha_n)\|u_n - z\| \leqq M$$

$$\|y_n - z\| \leqq \gamma_n \|x_0 - z\| + (1-\gamma_n)\|Tu_n - z\| \leqq \gamma_n \|x_0 - z\| + (1-\gamma_n)\|u_n - z\| \leqq M$$

と T, S_λが非拡大であることから $\{u_n\}, \{y_n\}, \{Tu_n\}, \{S_\lambda u_n\}$ は有界になります。

この事実と $\{\alpha_n\}$ が RS 係数であることから $\|u_{n+1} - S_\lambda u_n\| \leqq \alpha_n \|x_0 - S_\lambda u_n\| \to 0$ となります。また $n \to \infty$ のとき $\gamma_n \to 0$ となることから

$$\begin{aligned}
&\|y_{n+1} - y_n\| - \|u_{n+1} - u_n\| \\
&\quad = \|\gamma_{n+1}x_0 + (1-\gamma_{n+1})Tu_{n+1} - \gamma_n x_0 - (1-\gamma_n)Tu_n\| - \|u_{n+1} - u_n\| \\
&\quad \leqq |\gamma_{n+1} - \gamma_n|(\|x_0\| + \|Tu_n\|) + (1-\gamma_{n+1})\|Tu_{n+1} - Tu_n\| - \|u_{n+1} - u_n\| \\
&\quad \leqq |\gamma_{n+1} - \gamma_n|(\|x_0\| + \|Tu_n\|) - \gamma_{n+1}\|u_{n+1} - u_n\| \to 0
\end{aligned}$$

このようにして $\overline{\lim}_n(\|y_{n+1} - y_n\| - \|u_{n+1} - u_n\|) \leqq 0$ となり、*Lemma* 4.8 によって $\lim_n \|y_n - u_n\| = 0$ となります。したがって $\lim_n \|u_{n+1} - u_n\| = \lim_n \beta_n \|y_n - u_n\| = 0$ もでます。

最後に $\|u_n - S_\lambda u_n\| \leqq \|u_{n+1} - u_n\| + \|u_{n+1} - S_\lambda u_n\|$ より $\lim_n \|u_n - S_\lambda u_n\| = 0$ となって結論を得ます。 □

Lemma 4.5 と *Lemma* 4.9 より次の結果を得ます。

Theorem 4.10 （鈴木 [25]） Eを一様凸でノルムが一様*Gâteaux*微分可能な*Banach*空間とします。CをEの空ではない閉凸集合とします。$T : C \to C$ を $F(T) \neq \phi$ である非拡大写像とします。 任意の $x_0, u_1 \in C$ をとり、$\{u_n\}$ を RS 係数 $\{\alpha_n\}$ と $\lambda \in (0,1)$ による S 点列

$$u_{n+1} = \alpha_n x_0 + (1-\alpha_n)S_\lambda u_n, \quad S_\lambda u_n = \lambda T u_n + (1-\lambda)u_n$$

とすると,$\{u_n\}$ はある $z_0 \in F(T)$ に強収束します。

5. hybrid method と shrinking projection method

この節では Haugazaue を嚆矢とする hybrid 法と shrinking projection 法について考えます。Solodov-Svaiter は hybrid 法の考えを使って次の定理を証明しました。ここで単調作用素のリゾルベントを使った零点への収束を扱いますので簡単に説明します。

Eを一様凸で滑らかな*Banach*空間とするとき、$A \subset E \times E^*$ が単調作用素であるとは、$(x, J(x)) \in A$, $(y, J(y)) \in A$ とするとき常に $\langle x-y, J(x)-J(y) \rangle \geqq 0$ が成立することです。Bを $A \subset B$ となる単調作用素とすると $A = B$が成立するとき、Aを極大単調作用素といいます。Aが極大単調作用素であるとき $(x, J(x)) \in A$ かつ $\langle x-y, J(x)-J(y) \rangle \geqq 0$ であれば $(y, J(y)) \in A$ となります。Aが $A^{-1}0 \neq \phi$ を満たす極大単調作用素であれば、$A^{-1}0$ は閉凸集合です。また、任意の $x \in E$ と $r > 0$ について $0 \in J(x_r - x) + rAx_r$ となる x_rが一意に存在します。したがって、$x_r = J_r x$ で J_r を定義し A のリゾルベントと呼びます。*Hilbert* 空間の場合は $J = I$ となります。

Theorem 5.1 （**Solodov-Svaiter [24]**） H を *Hirbert* 空間とし、$A \subset H \times H^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ である極大単調作用素とします。$\{r_n\}$ を $r_n > 0$, $\underline{\lim}_n r_n > 0$ を満たす実数列とし J_{r_n}を A のリゾルベントとします。P_Bを H から閉凸部分集合 B への距離射影とし、任意の $x_0 \in E$ について $z_0 = P_{A^{-1}0}\, x_0$ とします。このとき次の (2)(3) の手順を繰り返して E の点列 $\{u_n\}$ を構成すると u_n は z_0に強収束します。

$$\begin{cases}
(1) & u_1 = x_0 \\
(2) & C_n = \{ z \in H : \langle J_{r_n}u_n - z,\ u_n - J_{r_n}u_n \rangle \geqq 0 \}, \quad D_n = \{ z \in H : \langle u_n - z,\ u_1 - u_n \rangle \geqq 0 \} \\
(3) & u_{n+1} = P_{C_n \cap D_n} x_0
\end{cases}$$

また、中條-高橋は hybrid 法の考えを使って次の定理を証明しました。

Theorem 5.2 （中條-高橋 [19]） C を *Hirbert* 空間 H の空ではない閉凸集合とし、$T : C \to H$ を $F(T) \neq \phi$ で

ある非拡大写像とします。$a\in(0,1)$ とし、$\{\alpha_n\}$ を $\alpha_n\in(0,1)$, $\alpha_n\leqq a$ を満たす実数列とします。P_Bを H から閉凸部分集合 B への距離射影とし、任意の $x_0\in C$ について $z_0=P_{F(T)}x_0$ とします。このとき、任意に $u_1\in C$ をとり次の手順を繰り返して C の点列 $\{u_n\}$ を構成すると u_n は z_0に強収束します。

$$\begin{cases} (1) & y_n=\alpha_n u_n+(1-\alpha_n)Tu_n, \\ (2) & C_n=\{z\in C:\|y_n-z\|\leqq\|u_n-z\|\},\quad D_n=\{z\in H:\langle u_n-z,\ u_1-u_n\rangle\geqq 0\} \\ (3) & u_{n+1}=P_{C_n\cap D_n}x_0 \end{cases}$$

ここでLemma 3.4を使ってLemma 3.3の十分条件を内積で書いてみます。これは中條-高橋の定理とBrowderの定理の構造を研究する中で出てきた結果です。高橋-窪田と著者はこのLemmaの構造を考え直して、現在shrinking projection法と呼ばれる近似法を提案しました。shrinking projection法を提案した時点で著者自身はSolodov-Svaiterの結果を知りませんでしたが、彼らの条件と酷似しています。異なる発想からよく似たものが出てきたことになります。

Lemma 5.3 C を *Hirbert* 空間 H の空ではない閉凸集合とし、$T:C\to H$ を $F(T)\neq\phi$ である非拡大写像とします。任意に $x_0\in H$ をとり,P を H から $F(T)$ への距離射影, $z_0=Px_0$ とします。C の点列 $\{u_n\}$ が次の条件を満たせば u_n は z_0に強収束します。

$$\begin{cases} (a) & \text{任意の } n\in N \text{ について}\quad 0\leqq\langle x_0-u_n,\ u_n-z_0\rangle \\ (b) & \text{任意の } n\in N \text{ について}\quad 0\leqq\langle x_0-u_n,\ u_n-u_{n+1}\rangle \\ (c) & M\geqq 0 \text{ が存在して、任意の } n\in N \text{ について}\quad \|Tu_n-u_n\|\leqq M\|u_n-u_{n+1}\| \end{cases}$$

証明 仮定 (a)(b) と Lemma 3.4 より $\|x_0-u_n\|\leqq\|x_0-z_0\|$, $\|x_0-u_n\|\leqq\|x_0-u_{n+1}\|$ となります。したがって、$\|x_0-u_n\|$ は有界で広義単調増加となります。よって $\lim_n\|x_0-u_n\|=a$ が存在します。もう一度Lemma 3.4によって $\|u_n-u_{n+1}\|^2\leqq\|x_0-u_{n+1}\|^2-\|u_n-x_0\|^2\ \to\ 0$ がでます。次に仮定 (c) より $\|Tu_n-u_n\|\leqq M\|u_n-u_{n+1}\|\ \to\ 0$ となり、$\{u_n\}$ は Lemma 3.3 の仮定を満たすので結論を得ます。 □

shrinking projection 法では、中條-高橋の定理は次の様になります。

Theorem 5.4 (高橋-窪田-竹内[27]) C を *Hirbert* 空間 H の空ではない閉凸集合とし、$T:C\to H$ を $F(T)\neq\phi$ である非拡大写像とします。$a\in(0,1)$ とし、$\{\alpha_n\}$ を $\alpha_n\in(0,1)$, $\alpha_n\leqq a$ を満たす実数列とします。P_Bを H から閉凸部分集合 B への距離射影とし、任意の $x_0\in H$ について $z_0=P_{F(T)}x_0$ とします。このとき任意の $u_1\in C$ について、$C_1=C$ として次の手順を繰り返して C の点列 $\{u_n\}$ を構成すると u_n は z_0に強収束します。

$$\begin{cases} (1) & y_n=\alpha_n u_n+(1-\alpha_n)Tu_n, \\ (2) & C_{n+1}=\{z\in C_n:\|y_n-z\|\leqq\|u_n-z\|\}, \\ (3) & u_{n+1}=P_{C_{n+1}}x_0 \end{cases}$$

証明 $F(T)\neq\phi$ より $u\in F(T)$ とします。任意の $n\in N$ について

$$\|y_n-u\|=\|\alpha_n u_n+(1-\alpha_n)Tu_n-u\|\leqq\alpha_n\|u_n-u\|+(1-\alpha_n)\|Tu_n-Tu\|\leqq\|u_n-u\|$$

したがって $u\in C_n$ より $F(T)\subset C_n$ となります。また、任意の n について C_nが閉集合となることは明らかです。次に C_nが凸集合になることを示します。$z_1,z_2\in C_n$ とし、$\alpha,\beta\geqq 0$ で $\alpha+\beta=1$ とすると、任意の n について $\|y_n-z\|\leqq\|u_n-z\|\Leftrightarrow\|y_n-u_n\|^2+2\langle y_n-u_n,\ u_n-z\rangle\leqq 0$ となります。

$$\|y_n-u_n\|^2+2\langle y_n-u_n,\ u_n-(\alpha z_1+\beta z_2)\rangle$$
$$=\alpha(\|y_n-u_n\|^2+2\langle y_n-u_n,\ u_n-z_1\rangle)+\beta(\|y_n-u_n\|^2+2\langle y_n-u_n,\ u_n-z_2\rangle)\leqq 0$$

したがって C_n は凸集合です。ここまでの議論で C_nは $F(T)\subset C_n$ ($C_n\neq\phi$) となる閉凸集合です。したがって n ごとに $u_n=P_{C_n}x_0$ が一意に決まり、u_nは *Lemma* 5.3 の (a) を満たします。C_nの作り方から $C_{n+1}\subset C_n$ も明らかで

す。したがって u_n は *Lemma* 5.3 の (*b*) を満たします。最後に *Lemma* 5.3 の (*c*), $\| Tu_n - u_n \| \leqq M \| u_{n+1} - u_n \|$ となる $M\,(0 \leqq M)$ の存在を示します。

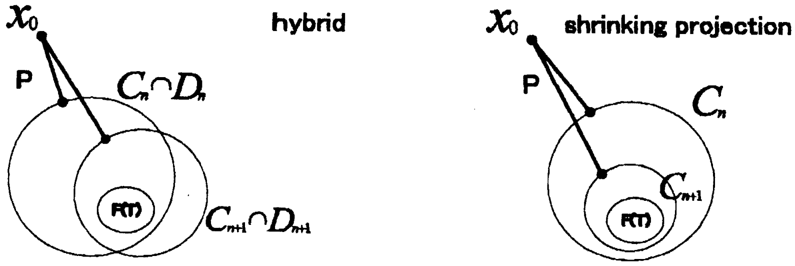
$u_{n+1} = P_{C_{n+1}} \in C_{n+1} \subset C_n$ より $\| y_n - u_{n+1} \| \leqq \| u_{n+1} - u_n \|$

$\| y_n - u_n \| = \| \alpha_n u_n + (1-\alpha_n)Tu_n - u_n \| = \| \alpha_n(u_n - u_n) + (1-\alpha_n)(Tu_n - u_n) \| = (1-\alpha_n) \| Tu_n - u_n \|$

$$\| Tu_n - u_n \| = \frac{1}{1-\alpha_n} \| y_n - u_n \| \leqq \frac{1}{1-a} (\| y_n - u_{n+1} \| + \| u_{n+1} - u_n \|) \leqq \frac{2}{1-a} \| u_{n+1} - u_n \|$$

ここまでの議論で $\{u_n\}$ は Lemma 5.3 の条件を満たすので結論を得ます □

hybrid 法と shrinking projection 法の違いを簡単に図式化すると次の様になります。



hybrid という考え方がどのような発想から出たのか、またその有効性の比較は著者には分りませんが shrinking projection の方が構造的に自然で形式的に簡単であることは否めないと思います。原理的に証明も若干簡単になるはずです。構造を考えれば、こちらが先に出てこなかったことが不思議です。中條-高橋、solodov-svaiter の忘れ物を拾ったということができるかもしれません。shrinking projection 法の本質は集合族の構成方法に関する提案ですから、原理的に hybrid の収束定理が 1 つあれば対応する shrinking projection の収束定理が 1 つ出ることになります。ここでは Solodov-Svaiter の結果を Banach 空間に拡張した大沢-高橋の次の結果に対応する収束定理を導いてみます。予想されたことですが、非拡大写像の不動点への収束と極大単調作用素のリゾルベントによる零点への収束は平行して議論できる部分がありますから、Theorem 2.1, Lemma 3.3 に対応するステップを踏むことにします。

Theorem 5.5 （大沢-高橋 [20]） E を一様凸で滑らかな *Banach* 空間とし、$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ である極大単調作用素とします。$\{r_n\}$ を $r_n > 0$, $\underline{\lim}_n r_n > 0$ を満たす実数列とし J_{r_n} を A のリゾルベントとします。P_B を E から閉凸部分集合 B への距離射影とし、任意の $x_0 \in E$ について $z_0 = P_{A^{-1}0}\, x_0$ とします。このとき任意の $u_1 \in E$ をとり、次の手順を繰り返して E の点列 $\{u_n\}$ を構成すると u_n は z_0 に強収束します。

$$\begin{cases} (1) \quad C_n = \{ z \in E : \langle J_{r_n}u_n - z,\ J(u_n - J_{r_n}u_n) \rangle \geqq 0 \}, \quad D_n = \{ z \in E : \langle u_n - z,\ J(x_0 - u_n) \rangle \geqq 0 \} \\ (2) \quad u_{n+1} = P_{C_n \cap D_n} x_0 \end{cases}$$

Lemma 5.6 E を一様凸で滑らかな *Banach* 空間とし、$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ である極大単調作用素とします。$\{r_n\}$ を $r_n > 0$, $\underline{\lim}_n r_n > 0$ を満たす実数列とし J_{r_n} を A のリゾルベントとします。E の点列 $\{u_n\}$ が $u \in E$ に弱収束し、$\lim_n \| u_n - J_{r_n}u_n \| = 0$ を満たすならば $u \in A^{-1}0$ となります。

証明 $\lim_n \| u_n - J_{r_n}u_n \| = 0$ と $\underline{\lim}_n r_n > 0$ より $\lim_n \| \frac{1}{r_n} J(u_n - J_r u_n) \| = \lim_n \frac{1}{r_n} \| u_n - J_r u_n \| = 0$ となります。$(v, w) \in A$ とすると $(J_{r_n}u_n,\ \frac{1}{r_n} J(u_n - J_{r_n}u_n)) \in A$ と A が極大単調より、$n \to \infty$ とすると

$$0 \leqq \langle J_{r_n}u_n - v,\ \tfrac{1}{r_n} J(u_n - J_{r_n}u_n) - w \rangle \to \langle u - v, 0 - w \rangle \quad \therefore \quad (u, 0) \in A \qquad \square$$

Lemma 5.7 E を一様凸で滑らかな *Banach* 空間とし、$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ である極大単調作用素とします。$\{r_n\}$ を $r_n > 0$, $\underline{\lim}_n r_n > 0$ を満たす実数列とし J_{r_n} を A のリゾルベントとします。任意に $x_0 \in E$ をとり P を $A^{-1}0$ への距離射影、$z_0 = Px_0$ とします。点列 $\{u_n : u_n \in E\}$ が $\overline{\lim}_n \| x_0 - u_n \| \leqq \| x_0 - z_0 \|$, $\lim_n \| J_{r_n}u_n - u_n \| = 0$ を満たすならば、u_n は z_0 に強収束します。

証明　$\overline{\lim}_n \| x_0 - u_n \| \leqq \| x_0 - z_0 \|$ より $\{u_n\}$ が有界なことは明らかです。したがって任意の部分列は弱収束する部分列を持ちます。$\{u_{n_i}\}$: $u_{n_i} \xrightarrow{w} u_i \in E$　を弱収束する部分列とすると $\lim_n \|J_{r_n}u_n - u_n\| = 0$ より $\lim_{n_i} \|J_{r_{n_i}}u_{n_i} - u_{n_i}\| = 0$ となります。したがって *Lemma* 5.6 によって $u_i \in A^{-1}0$ となります。$\overline{\lim}_{n_i} \| x_0 - u_{n_i} \| \leqq \| x_0 - z_0 \|$ は明らかですから *Lemma* 3.2 より $u_{n_i} \to z_0 = u_i$ となります。このようにして、任意の部分列が z_0 に強収束する部分列を持ちます。よって、u_n は z_0 に強収束します。□

大沢-高橋の定理に対応する shrinking projection 法による収束定理は次の様になります。

Theorem 5.8　E を一様凸で滑らかな *Banach* 空間とし、$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ である極大単調作用素とします。$\{r_n\}$ を $r_n > 0$, $\underline{\lim}_n r_n > 0$ を満たす実数列とし J_{r_n}を A のリゾルベントとします。P_Bを E から閉凸部分集合 B への距離射影とし、任意の $x_0 \in E$ について $z_0 = P_{A^{-1}0}\, x_0$ とします。このとき任意に $u_1 \in E$ をとり、$C_1 = E$ として、次の手順を繰り返して E の点列 $\{u_n\}$ を構成すると u_n は z_0 に強収束します。

$$\begin{cases} (1) \quad C_{n+1} = \{ z \in C_n : \langle J_{r_n}u_n - z, J(u_n - J_{r_n}u_n) \rangle \geqq 0 \}, \\ (2) \quad u_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0 \end{cases}$$

証明　任意の $n \in N$ について C_nが閉凸集合となることは明らかです。$A^{-1}0 \neq \phi$ より $u \in A^{-1}0$ とします。任意の $n \in N$ について $(J_{r_n}u_n, \frac{1}{r_n}J(u_n - J_{r_n}u_n)) \in A$ と A が極大単調より

$$0 \leqq \langle J_{r_n}u_n - u, \frac{1}{r_n}J(u_n - J_{r_n}u_n) - 0 \rangle \Rightarrow 0 \leqq \langle J_{r_n}u_n - u, J(u_n - J_{r_n}u_n) \rangle \quad \therefore \quad A^{-1}0 \subset C_n$$

ここまでの議論で C_nは $A^{-1}0 \subset C_n$ ($C_n \neq \phi$) となる閉凸集合です。したがって n ごとに $u_n = P_{C_n}x_0$ が一意に決まり、$C_{n+1} \subset C_n$ も明らかです。$u_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0 \in C_n$ より $\| x_0 - u_n \| \leqq \| x_0 - u_{n+1} \|$, $A^{-1}0 \subset C_n$ より $\| x_0 - u_n \| \leqq \| x_0 - z_0 \|$ が分ります。

$\{ \| x_0 - u_n \| \}$ は広義単調増加で上に有界ですから、$\lim_n \| x_0 - u_n \| = a$ が存在します。次に C_nが凸集合で $u_n, u_{n+1} \in C_n$ より $\frac{1}{2}(u_n + u_{n+1}) \in C_n$ となります。$u_n = P_{C_n}x_0$ より

$$a = \lim_n \| x_0 - u_n \| \leqq \lim_n \| x_0 - \tfrac{1}{2}(u_n + u_{n+1}) \| \leqq \tfrac{1}{2}(\lim_n \| x_0 - u_n \| + \lim_n \| x_0 - u_{n+1} \|) = a$$

この結果と E が一様凸であることから $\lim_n \| u_n - u_{n+1} \| = 0$ となります。

ここで $D_n = \{ z \in E : \langle J_{r_n}u_n - z, J(u_n - J_{r_n}u_n) \rangle \geqq 0 \}$ とすると、D_nの作り方から D_nは閉凸集合で $P_{D_n}u_n = J_{r_n}u_n$, $u_{n+1} \in D_n$ となり、$\lim_n \| u_n - J_{r_n}u_n \| \leqq \lim_n \| u_n - u_{n+1} \| = 0$ が分ります。このようにして、$\{u_n\}$ は *Lemma* 5.7 の条件を満たすので結論を得ます。　□

6.　ささやかな疑問

ここで扱った *Banach* 空間の収束定理を考えるときいくつかの疑問が湧きます。現在、強収束定理は一様 *Gâteaux* 微分可能、弱収束定理は *Fréchet* 微分可能という区分があるかのように見えます。これは本当に必要な区分なのか不自然ではないかということや、証明を見ても弱収束定理と強収束定理の関わりが希薄に見えることなどです。進展はありませんが、著者が特に興味を持っているのは、*B* 点列や *H* 点列の強収束に一様 *Gâteaux* 微分可能は本当に必要なのかということです。

Banach 空間の双対写像 J が弱点列的連続 $u_n \xrightarrow{w} u \Rightarrow J(u_n) \xrightarrow{w^*} J(u)$ という仮定をおくことは、現在の研究からは意味のないことのようです。しかし、最近までこの仮定をおいた論文は多数でていますし、もともと *Reich* [21] の論文は *H* 点列の収束に、空間が一様に滑らかであることとこの仮定をおいているようです。塩路－高橋の結果は *Reich* の仮定から弱点列的連続という仮定をはずす方向で得られました。それであれば何故次のような研究方向が現れなかったのか不思議に思います。*Browder* の *Theorem* 2.1 と *Lemma* 4.3 より (参考 1) は自明です。また *Lemma* 4.5 の証明の該当箇所を見れば (参考 2) もほとんど明らかです。

参考 1 E を一様凸 *Banach* 空間とし、双対写像 J が原点で弱点列的連続とします。C を E の空ではない閉凸集合とします。$T : C \to C$ を $F(T) \neq \phi$ である非拡大写像とします。 任意の $x_0 \in C$ をとり、$\{u_n\}$ を B 係数 $\{\alpha_n\}$ による B 点列とすると,$\{u_n\}$ はある $z_0 \in F(T)$ に強収束します。

参考 2 E を一様凸な *Banach* 空間とし、双対写像 J が弱点列的連続とします。C を E の空ではない閉凸集合とします。$T : C \to C$ を $F(T) \neq \phi$ である非拡大写像とします。 任意に $x_0, u_1 \in C$ をとり、$\{u_n\}$ を W 係数 $\{\alpha_n\}$ による H 点列とすると,$\{u_n\}$ はある $z_0 \in F(T)$ に強収束します。

次の様な研究方向がないように見えるのも不思議です。係数を最初に与えるのではなく情況に合わせて効率のよい係数を逐次決めていく。たとえば、有効性はともかく *Reich* による M 点列の収束定理は次の様に書き換えることも可能です。

参考 3 E を一様凸で *Fréchet* 微分可能な *Banach* 空間とし、C を E の空ではない閉凸集合とします。$T : C \to C$ を $F(T) \neq \phi$ である非拡大写像とします。任意に $x_0 = u_1 \in C$ をとり 次の手順を繰り返して C の点列 $\{u_n\}$ を構成します。(見やすさのために本質的ではない仮定 $\| Tu_1 - u_1 \| < 1$ をおきます。)

$$\begin{cases} (1) \quad \alpha_n = \| Tu_n - u_n \| \\ (2) \quad u_{n+1} = \alpha_n Tu_n + (1-\alpha_n)u_n \end{cases}$$

このとき次が成立します。

$$\begin{cases} (1) \quad u_n \text{ はある } z_0 \in F(T) \text{ に弱収束します。} \\ (2) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \| Tu_i - u_i \|^2 < \infty \text{ であれば } u_n \text{ は } z_0 \text{ に強収束します。} \end{cases}$$

ここで (2) の仮定があれば $\{u_n\}$ はコーシー列になるので一般の *Banach* 空間で強収束します。

参考文献

* 1. 高橋渉, 非線形・凸解析学入門, 横浜図書, 2005.

* 2. 高橋渉, 非線形関数解析学, 近代科学社, 1988.

* 3. 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000 .

* 4. 高橋渉, 不動点への近似について, 数理解析研究所講究録, 947, 1996 .

* 5. 高橋渉, Convergence Theorems for Nonlinear Projections in Banach Spaces, 数理解析研究所講究録, 1396, 2004 .

* 6. 高橋渉, バナッハ空間における近接点法と非線形写像, 数理解析研究所講究録, 1520, 2006 .

* 7. 中條一秀, 下地一也, 高橋渉, ヒルベルト空間におけるハイブリッド法による強収束定理, 数理解析研究所講究録, 1365, 2004 .

* 8. 大沢繁夫, 高橋渉, APPROXIMATING SOLUTION OF MAXIMAL MONOTONE OPERATORS IN BANACH SPACES, 数理解析研究所講究録, 1246, 2002 .

* 9. 鈴木智成, HALPERN 型イテレーションに関する２つの最近の結果, 数理解析研究所講究録, 1544, 2007 .

*10. 塩路直樹, 非拡大写像及び非拡大半群に対する強収束定理, 数理解析研究所講究録, 1031, 1998 .

*11. N. Shioji, W. Takahashi *Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces*, PROCEEDINGS-AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, 1997.

*12. T. Suzuki, *Strong convergence theorems for infinite families of nonexpansive mappings in general Banach spaces*, Fixed Point Theory and Applications, 2005.

13. F. E. Browder, *Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in banach spaces*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1967.

14. F. E. BROWDER, *Nolinear operators and nonlinear equation of evolution in Banach spaces*, Amor Math Soc Providence, 1976.

15. R. E Bruck, S. Reich, *Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces*, Houston J. Math, 1977.

16. C.E. Chidume, C.O. Chidume, *Iterative approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006.

17. B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps* Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 1967.

18. W. R. Mann *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 1953.

19. K. NAKAJO, W. TAKAHASHI *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, Journal of mathematical analysis and applications, 1996.

20. S. Ohsawa, W. Takahashi *Strong convergence theorems for resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. 81, 2003.

21. S. Reich. *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal., 1979.

22. S. Reich, *Some problems and results in fixed point theory*, Contemp. Math, 1983.

23. S. Reich, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces*, Math. Anal., 1980.

24. M.V. Solodov, B.F. Svaiter, *A Hybrid Projection – Proximal Point Algorithm*, JOURNAL OF CONVEX ANALYSIS,1999

25. T. Suzuki, *A sufficient and necessary condition for Halpern – type strong convergence to fixed points of nonexpansive mappings*, PROCEEDINGS-AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, 2007.

26. W. TAKAHASHI, Y. UEDA, *On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators*, Journal of mathematical analysis and applications, 1984.

27. W. Takahashi, Y. Takeuchi, R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007.

28. R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, Arch. Math. **58**, 1992.