

水面波列の長波長極限における共鳴不安定性

神戸大学大学院・工学研究科・機械工学専攻 片岡 武 (Takeshi Kataoka)

Department of Mechanical Engineering, Graduate School of Engineering

Kobe University

要旨

水面波列の共鳴不安定性は、一般に小振幅極限において説明される(例えば4波相互作用による共鳴条件は、攪乱の波数空間上で8の字曲線となる[1])。本研究では、基本波の振幅を有限にとどめたまま、長波長の極限における共鳴不安定性を理論的に調べた。その結果、共鳴条件は攪乱の波数空間上において4本の直線と $m+2$ 波相互作用による楕円曲線($m=1,2,\dots$)で表されることが分かった。後者は、小振幅極限でもお馴染みの共鳴であるが、前者は全く新しいタイプの共鳴であり、水面波列が峰方向に歪められたときに生じる振動と関連している。その詳細は1節で説明する。解析の結果、2本の共鳴直線上で中立安定、残りの2共鳴直線上で不安定性が誘起されることがわかった。

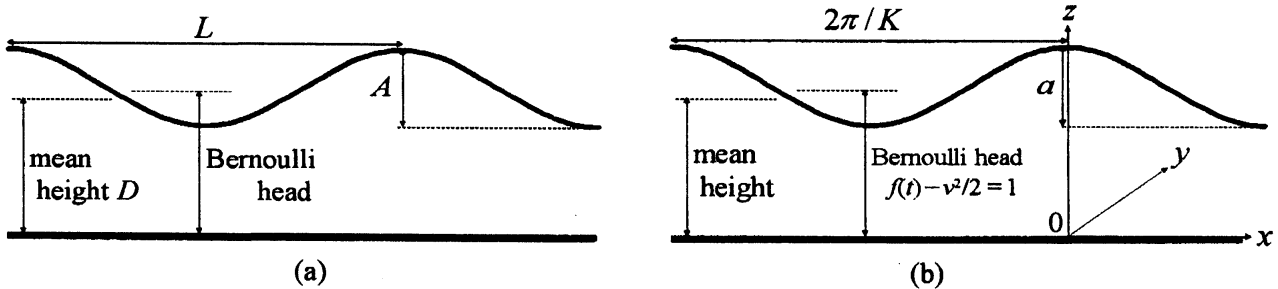


図 1 概略図. (a):有次元の系. (b):無次元の系.

1. 緒言

水面波列の線形安定性を Euler 方程式系を基に調べる。表面張力は無視する。平均深さを D 、波長を L 、峰と谷の水面高さの差を A とすると、水面波列は 2 つのパラメータ $a \equiv A/D$ 、 $K \equiv 2\pi D/L$ により特徴づけられる (図 1)。その共鳴不安定性はこれまで小振幅 $a \ll 1$ において論じられてきた[1,2]。ここでは長波長 $K \ll 1$ (振幅は有限) における共鳴条件とその不安定性を調べる。2 タイプの共鳴が存在する。1 つは全く新しいタイプのもので、歪められた水面波列と攪乱線形波との共鳴を表し、もう 1 つは小振幅極限でもよく知られている 2 つの攪乱線形波による共鳴を表す。なお、1 節で使う物理量はこれ以降全て、重力加速度と平均深さ D を用いて無次元化したものである。2 節以降は D の代わりに Bernoulli head を用いて無次元化するが、1 節での議論はそのまま有効である。

<歪められた水面波列と線形波との共鳴>

孤立波の峰が峰に沿って周期的に歪められると、峰の位置および高さが周期的に振動することが知られている[3]。このような振動は、孤立波に近い波形をもつ長波長水面波列においても起こるのであろう。そこで、この歪んだ水面波列と攪乱線形波との共鳴を考える。つまり、歪められた水面波列の峰に生じる振動の振動数と線形波の振動数とが一致する場合を考える。小さい峰方向 (つまり図 1(b)で y 方向) 波数 l によって歪められた水面波列の峰の振動の角振動

数 ω_0 は、長波長極限においては孤立波のそれと一致し、

$$\omega_0(l) = \pm \sqrt{\frac{vEl^2}{dE/dv}}, \quad (1.1)$$

と表される[3]. ここで v は孤立波の伝播速さであり、水面波列の伝播速さに等しくとった. また E は、孤立波のエネルギーであり、

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^H \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dz + (H-1)^2 \right\} dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^H \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 dz, \quad (1.2)$$

により定義される. ただし、 Φ 、 H はそれぞれ孤立波の速度ポテンシャルおよび水面の高さを表わす ((1.2) 最右辺の導出は文献[4]を見よ). 一方、線形波の角振動数 ω は、その波数の(水面波列の進行方向、峰方向)成分を (k, l) とすると、長波長極限において、

$$\omega(k, l) = -vk \pm \sqrt{k^2 + l^2}. \quad (1.3)$$

ただし水面波列とともに動く座標系から眺めている. (1.1) と (1.3) より、共鳴条件は、

$$\omega_0(l) = \omega(k, l), \quad (1.4)$$

と表され、次の解をもつ:

$$k = k_0(l) \equiv \frac{v+b}{1-v^2} \omega_0(l), \quad (1.5)$$

ただし、

$$b = \begin{cases} -\sqrt{1 + \frac{v^2-1}{vE} \frac{dE}{dv}} & (\omega_0(l) \text{ の符号 } \pm \text{ と } \omega(k, l) \text{ の符号 } \pm \text{ が一致するとき}) \\ \sqrt{1 + \frac{v^2-1}{vE} \frac{dE}{dv}} & (\omega_0(l) \text{ の符号 } \pm \text{ と } \omega(k, l) \text{ の符号 } \pm \text{ が異なるとき}) \end{cases} \quad (1.6)$$

(1.5) は各 b に対して $k/K - l/K$ 平面上において2本の直線で表される (図 2). $b < 0$ および $b > 0$ に対する直線をそれぞれ、点線、実線で示した. 水面波列の不安定性は、前者 ($b < 0$) に対する直線上では誘起されず、後者 ($b > 0$) に対する直線上で誘起されることが3節の解析で示される.

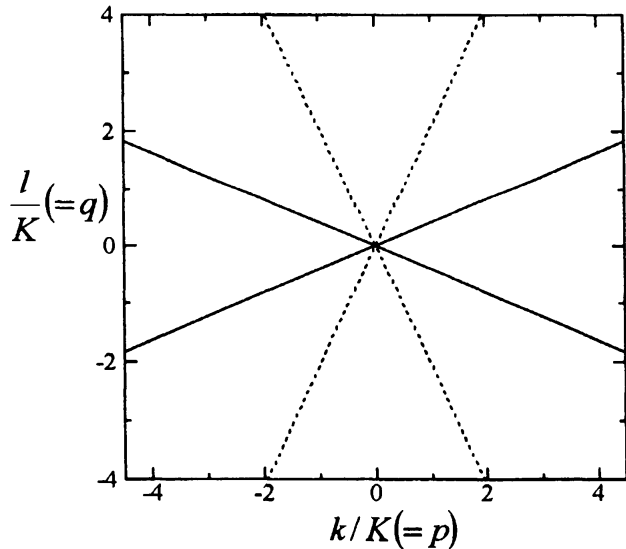


図 2 (1.5) で表される共鳴直線. $a = 0.7$ の例.

点線 : 安定直線 ($b < 0$),
実線 : 不安定直線 ($b > 0$).

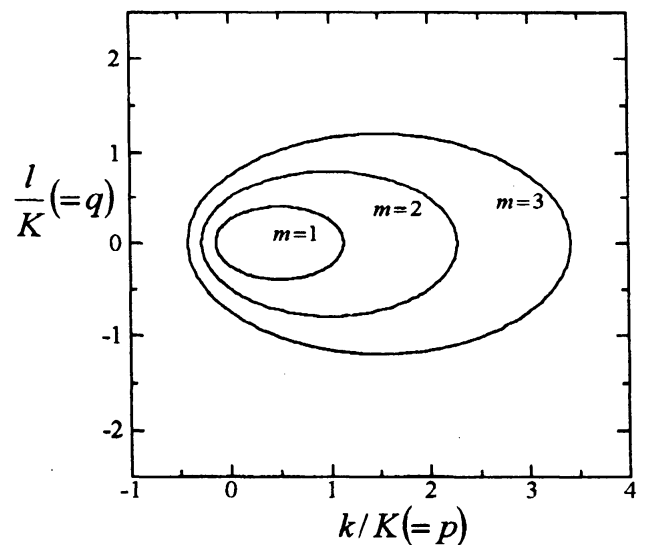


図 3 (1.8) で表される共鳴曲線 ($m = 1, 2, 3$).

$a = 0.7$ の例.

< 2 線形波による共鳴 >

2 つの攪乱線形波による共鳴を考える。それぞれの波数の (x, y) 方向成分を (k, l) および $(k - mK, l)$ ($m = 1, 2, \dots$) とすると、角振動数はそれぞれ $\omega(k, l)$, $\omega(k - mK, l)$ であり、共鳴条件は、

$$\omega(k, l) = \omega(k - mK, l), \quad (1.7)$$

と表される。(1.7)において $\omega(k, l)$ の符号士を正、 $\omega(k - mK, l)$ の符号士を負にとれば、次の解をもつ：

$$k = k_m(l) \equiv \frac{mK}{2} 1 \pm v \sqrt{1 - \frac{4l^2}{(v^2 - 1)m^2 K^2}}. \quad (1.8)$$

(1.8)の共鳴曲線は $k/K - l/K$ 平面上において、中心 $(k/K, l/K) = (m/2, 0)$ の楕円で表される。長軸は k/K 軸に沿って長さ mv 、短軸は l/K 軸に沿って長さ $m\sqrt{v^2 - 1}$ である。図3に $m = 1, 2, 3$ の場合の共鳴曲線を示した。角振動数 ω は、

$$\omega = \omega_m(l) \equiv \frac{1 - v^2}{v} \left(k_m(l) - \frac{mK}{2} \right). \quad (1.9)$$

以下では、2 節で基礎方程式、3 節で漸近解析、4 節で結言を述べる。

2. 基礎方程式

一様な重力加速度が働く系において、平らな底の上に横たわる水の運動を考える。ただし水は非圧縮性完全流体とし、表面張力は無視し、流れは渦なしとする。これ以降、変数はすべて重力加速度と、後に具体的に示す代表長さ ((2.7)の後を見よ) により無次元化してある。解析の便宜上、底が $z = 0$ と一致するような空間直交座標 x, y, z を導入する (図1b) と、支配方程式系は、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{for } 0 < z < \eta, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{at } z = \eta, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \eta = f(t) \quad \text{at } z = \eta. \quad (2.4)$$

ただし、 t は時間、 $\phi(x, y, z, t)$ は速度ポテンシャル、 $\eta(x, y, t)$ は底からの自由表面の高さ、 $f(t)$ は与えられた t の関数であり、表面の無次元化 Bernoulli ヘッドを表わす。

まずは水面波列解を求める。 $x = \pm \pi/K$ において周期条件を満たすような解を次の形で探す：

$$\phi = -vx + \phi_s(x, z), \quad \eta = \eta_s(x). \quad (2.5)$$

周期条件は、

$$\phi_s(-\pi/K, z) = \phi_s(\pi/K, z), \quad \eta_s(-\pi/K) = \eta_s(\pi/K), \quad (2.6)$$

であり、 v と K は正のパラメータを表す。 $f(t)$ は

$$f(t) = 1 + v^2/2, \quad (2.7)$$

により与えられるとする。(2.5)は、無次元波長が $2\pi/K$ 、表面の無次元 Bernoulli ヘッドが一

様流速 $-v$ に相対的に) 1 であるような波が, 一様流れに逆らって定常的に伝播する様子を表わす. ここではこのような解のうち, K が小さい長波長の解を考え, それを水面波列と呼ぶ. 上記した無次元 Bernoulli ヘッドを 1 としたので, 本問題の代表長さは, (一様流速に相対的な) 表面の Bernoulli ヘッドである (図 1b 参照). (2.5)を(2.1)-(2.4)に代入して, 周期条件(2.6)を課すと, ϕ_s と η_s に対する次の支配方程式系が得られる:

$$\nabla_2^2 \phi_s = 0 \quad \text{for } 0 < z < \eta_s, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = 0, \quad (2.9)$$

$$\left(-v + \frac{\partial \phi_s}{\partial x}\right) \frac{d\eta_s}{dx} = \frac{\partial \phi_s}{\partial z} \quad \text{at } z = \eta_s, \quad (2.10)$$

$$-v \frac{\partial \phi_s}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial z}\right)^2 \right] + \eta_s = 1 \quad \text{at } z = \eta_s, \quad (2.11)$$

$$\phi_s(-\pi/K, z) = \phi_s(\pi/K, z), \quad \eta_s(-\pi/K) = \eta_s(\pi/K). \quad (2.12)$$

ただし

$$\nabla_2^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.13)$$

(2.8)-(2.12)を満たす $K \rightarrow 0$ の漸近解を求めるために, まずは周期条件(2.12)の代わりに次の無限遠方における境界条件を満たす解 (Φ^*, H^*) を探す:

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \rightarrow U, \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} \rightarrow 0, \quad H^* \rightarrow 1 + vU - \frac{U^2}{2} \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty. \quad (2.14)$$

ただし U は新たに導入されたパラメータである. すると $x \rightarrow \pm\infty$ における (Φ^*, H^*) は次式:

$$\Phi^*(x, z) - \Phi^*(-x, z) \rightarrow 2Ux - \Omega^*, \quad H^*(x) - H^*(-x) \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow \infty, \quad (2.15)$$

を満たす. ここに

$$\Omega^*(v, U) = \frac{1}{1 + vU - U^2/2} \left[\frac{2T^*}{v - U} - (v - U)M^* \right], \quad (2.16)$$

$$M^*(v, U) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(H^* - 1 - vU + \frac{U^2}{2} \right) dx, \quad T^*(v, U) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{H^*} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} - U \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial z} \right)^2 \right] dz. \quad (2.17)$$

したがって $2\pi U/K = \Omega^*$ を満たすような U を選べば, $K \ll 1$ のときに (Φ^*, H^*) は周期条件(2.12)を満たす. そのような U は

$$U = U_s \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{K}{2\pi} \right)^n \left[\frac{\partial^{n-1} \Omega^{*n}}{\partial U^{n-1}} \right]_{U=0}, \quad (2.18)$$

により与えられる. 結局, (2.8)-(2.12)を満たす $K \rightarrow 0$ の漸近解 (ϕ_s, η_s) は, (2.18)を満たす (Φ^*, H^*) であり, K の冪級数形で表わされる:

$$\phi_s = \Phi + K\Phi^{(1)} + K^2\Phi^{(2)} + \dots, \quad \eta_s = H + KH^{(1)} + K^2H^{(2)} + \dots. \quad (2.19)$$

ここに (Φ, H) は伝播速さ v の孤立波解であり,

$$\Phi^{(n)} = \frac{1}{(2\pi)^n n!} \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial U^{n-1}} \left(\Omega^{*n} \frac{\partial \Phi^*}{\partial U} \right) \right]_{U=0}, \quad H^{(n)} = \frac{1}{(2\pi)^n n!} \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial U^{n-1}} \left(\Omega^{*n} \frac{\partial H^*}{\partial U} \right) \right]_{U=0}. \quad (2.20)$$

(2.20)は孤立波解 (Φ, H) のみを用いてあらわすことができる. 例えば $n=1$ のとき,

$$\Phi^{(1)} = \frac{\Omega}{2\pi} \left[\frac{\partial \Phi^*}{\partial U} \right]_{U=0} = \frac{\Omega}{2\pi} \left[x + v \left(\frac{3}{2} \Phi - x \frac{\partial \Phi}{\partial x} - z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - \left(\frac{v^2}{2} + 1 \right) \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right], \quad (2.21a)$$

$$H^{(1)} = \frac{\Omega}{2\pi} \left[\frac{\partial H^*}{\partial U} \right]_{U=0} = \frac{\Omega}{2\pi} \left[v \left(H - x \frac{dH}{dx} \right) - \left(\frac{v^2}{2} + 1 \right) \frac{\partial H}{\partial v} \right], \quad (2.21b)$$

ここに,

$$\Omega(v) = [\Omega^*]_{U=0} = \frac{2T}{v} - vM, \quad (2.22)$$

$$M(v) = \int_{-\infty}^{\infty} (H-1) dx, \quad T(v) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^H \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dz. \quad (2.23)$$

水面波列(2.19)の線形安定性を(2.1)-(2.4)を基に調べよう. 攪乱の長さスケールが水面波列の波長と同じオーダー $O(K^{-1})$ である場合を考える. つまり(2.1)-(2.4)の解として以下の形を仮定する:

$$\begin{aligned} \phi &= -vx + \phi_s + \hat{\phi}(x, z) \exp[\lambda t - i(kx + ly)], \\ \eta &= \eta_s + \hat{\eta}(x) \exp[\lambda t - i(kx + ly)], \end{aligned} \quad (2.24a)$$

ただし,

$$(k, l) = (Kp, Kq), \quad (2.24b)$$

であり, p と q は与えられた $O(1)$ の実定数, λ と $(\hat{\phi}, \hat{\eta})$ はともに未定の定数および関数である. (2.24)を(2.1)-(2.4)に代入し, $(\hat{\phi}, \hat{\eta})$ に関して線形化し, $x = \pm\pi/K$ において周期条件を課すと,

$$\left(\nabla_z^2 - 2iKp \frac{\partial}{\partial x} - K^2 p^2 \right) \hat{\phi} - K^2 q^2 \hat{\phi} = 0 \quad \text{for } 0 < z < \eta_s, \quad (2.25)$$

$$L_K[\hat{\phi}, \hat{\eta}] + iKp \left[\left(v - \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right) \hat{\eta} - \frac{d\eta_s}{dx} \hat{\phi} \right] + \lambda \hat{\eta} = 0 \quad \text{at } z = \eta_s, \quad (2.26)$$

$$L_D[\hat{\phi}, \hat{\eta}] + iKp \left(v - \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right) \hat{\phi} + \lambda \hat{\phi} = 0 \quad \text{at } z = \eta_s, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = 0, \quad (2.28)$$

$$\hat{\phi}(-\pi/K, z) = \hat{\phi}(\pi/K, z), \quad \hat{\eta}(-\pi/K) = \hat{\eta}(\pi/K), \quad (2.29)$$

が得られる. ただし L_K と L_D は以下で定義される線形演算子である.

$$L_K[\hat{\phi}, \hat{\eta}] = \left(-\frac{\partial}{\partial z} + \frac{d\eta_s}{dx} \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{\phi} + \left[\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x \partial z} \frac{d\eta_s}{dx} + \left(-v + \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right) \frac{d}{dx} \right] \hat{\eta}, \quad (2.30a)$$

$$L_D[\hat{\phi}, \hat{\eta}] = \left[\left(-v + \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \phi_s}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{\phi} + \left[\left(-v + \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \phi_s}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial z^2} + 1 \right] \hat{\eta}. \quad (2.30b)$$

上の方程式(2.25)-(2.29)は, 固有値が λ , 固有関数が $(\hat{\phi}, \hat{\eta})$ の固有値問題を構成する. この固有値問題が実部が正の λ を解としてもつとき, 水面波列は波数 $(k, l) = (Kp, Kq)$ の攪乱に対して不安定となる. ここでは $(k, l) = (Kp, Kq)$ が共鳴条件(1.4)を満たす場合について, その解析結果を3節に示す. もう1つの共鳴条件(1.7)を満たす場合についての解析は省略するが, 4節で結果のみを述べる.

3. 漸近解析〈歪められた水面波列と線形波との共鳴〉

(2.25)-(2.29)の $K \rightarrow 0$ の漸近解を, $O(K^{3/2})$ のずれで共鳴条件(1.4)を満たす場合,

$$k = k_0(l) + K^{3/2}\Delta, \quad \lambda = i\omega_0(l) + K^{3/2}\lambda^{(3/2)} + K^2\lambda^{(2)} + \dots, \quad (3.1)$$

について調べる. ただし Δ は与えられた $O(1)$ の実定数であり, $\lambda^{(3/2)}$ は未定複素数である. (1.1) と(1.5)より,

$$k_0(l) = Kp_0(q), \quad \omega_0(l) = K\varpi_0(q). \quad (3.2)$$

ただし

$$p_0(q) = \frac{v+b}{1-v^2}\varpi_0(q), \quad \varpi_0(q) = \pm \sqrt{\frac{vEq^2}{dE/dv}} = \pm \sqrt{\frac{v^2-1}{b^2-1}}q^2. \quad (3.3)$$

これ以降の解析では, 簡単のため $p_0(q)$ と $\varpi_0(q)$ の独立変数 q は省略する.

3.1. 近接場の解

(2.25)-(2.28)の解のうち, まずは x, z に関して単位量の範囲で有意の変化 [$\partial\hat{\phi}/\partial x = O(\hat{\phi})$, $\partial\hat{\phi}/\partial z = O(\hat{\phi})$, $d\hat{\eta}/dx = O(\hat{\eta})$] をするものを次のような $K^{1/2}$ の冪級数の形で求める:

$$\hat{\phi}_c = \hat{\phi}_c^{(0)} + K^{1/2}\hat{\phi}_c^{(1/2)} + K\hat{\phi}_c^{(1)} + \dots, \quad \hat{\eta}_c = \hat{\eta}_c^{(0)} + K^{1/2}\hat{\eta}_c^{(1/2)} + K\hat{\eta}_c^{(1)} + \dots. \quad (3.4)$$

ただし 0 次と 1/2 次の解は, 未定定数 β を用いて,

$$(\hat{\phi}_c^{(0)}, \hat{\eta}_c^{(0)}) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{dH}{dx} \right), \quad (\hat{\phi}_c^{(1/2)}, \hat{\eta}_c^{(1/2)}) = (\beta, 0), \quad (3.5)$$

と与えられる. ここに添え字 C は解の種類を表す[近接場の解(core solution)]. 展開(3.4)の有効性は, 以下の解析が矛盾なく進むことによって確かめられる. (2.19), (3.1)-(3.5)を(2.25)-(2.28)に代入して $K^{1/2}$ について整理すると, (2.25)-(2.27)の左辺が

$$(\hat{\phi}_T, \hat{\eta}_T) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-iKpx)^j}{j!} \times (\hat{\phi}, \hat{\eta}), \quad (3.6)$$

を用いて, それぞれ $(\nabla_2^2 - K^2q^2)\hat{\phi}_T$, $L_K[\hat{\phi}_T, \hat{\eta}_T] + \lambda\hat{\eta}_T$, $L_D[\hat{\phi}_T, \hat{\eta}_T] + \lambda\hat{\phi}_T$ と表わされることから, $(\hat{\phi}_c^{(n)}, \hat{\eta}_c^{(n)})$ に対する次の方程式系が得られる:

$$\nabla_2^2 \hat{\phi}_c^{(n)} = F^{(n)} \quad \text{for } 0 < z < H, \quad (3.7)$$

$$L_{K0}[\hat{\phi}_c^{(n)}, \hat{\eta}_c^{(n)}] = G^{(n)} \quad \text{at } z = H, \quad (3.8)$$

$$L_{D0}[\hat{\phi}_c^{(n)}, \hat{\eta}_c^{(n)}] = I^{(n)} \quad \text{at } z = H, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_c^{(n)}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = 0, \quad (3.10)$$

$$(n = 1, 3/2, 2, \dots)$$

ここに,

$$F^{(n)} = \begin{cases} \nabla_2^2 \left(ip_0 x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) & (n=1), & \nabla_2^2 \left(i\Delta x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) & (n=3/2), \\ \nabla_2^2 (\hat{\phi}_c^{(2)} - \hat{\phi}_T^{(2)}) + q^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} & (n=2), & \nabla_2^2 (\hat{\phi}_c^{(5/2)} - \hat{\phi}_T^{(5/2)}) + q^2 \beta & (n=5/2), \dots, \end{cases} \quad (3.11a)$$

$$G^{(n)} = \begin{cases} L_{K0} \left[ip_0 x \frac{\partial \Phi}{\partial x}, ip_0 x \frac{dH}{dx} \right] - L_{K1} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{dH}{dx} \right] - i\varpi_0 \frac{dH}{dx} & (n=1), \\ L_{K0} \left[i\Delta x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + ip_0 x \beta, i\Delta x \frac{dH}{dx} \right] - \lambda^{(3/2)} \frac{dH}{dx} & (n=3/2), \\ L_{K0} \left[\hat{\phi}_C^{(2)} - \hat{\phi}_T^{(2)}, \hat{\eta}_C^{(2)} - \hat{\eta}_T^{(2)} \right] - L_{K1} \left[\hat{\phi}_T^{(1)}, \hat{\eta}_T^{(1)} \right] - L_{K2} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{dH}{dx} \right] - i\varpi_0 \hat{\eta}_T^{(1)} - \lambda^{(2)} \frac{dH}{dx} & (n=2), \\ L_{K0} \left[\hat{\phi}_C^{(5/2)} - \hat{\phi}_T^{(5/2)}, \hat{\eta}_C^{(5/2)} - \hat{\eta}_T^{(5/2)} \right] - L_{K1} \left[\hat{\phi}_T^{(3/2)}, \hat{\eta}_T^{(3/2)} \right] - i\varpi_0 \hat{\eta}_T^{(3/2)} - \lambda^{(3/2)} \hat{\eta}_T^{(1)} - \lambda^{(5/2)} \frac{dH}{dx} & (n=5/2), \\ \dots, \end{cases} \quad (3.11b)$$

$$I^{(n)} = \begin{cases} L_{D0} \left[ip_0 x \frac{\partial \Phi}{\partial x}, ip_0 x \frac{dH}{dx} \right] - L_{D1} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{dH}{dx} \right] - i\varpi_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} & (n=1), \\ L_{D0} \left[i\Delta x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + ip_0 x \beta, i\Delta x \frac{dH}{dx} \right] - i\varpi_0 \beta - \lambda^{(3/2)} \frac{\partial \Phi}{\partial x} & (n=3/2), \\ L_{D0} \left[\hat{\phi}_C^{(2)} - \hat{\phi}_T^{(2)}, \hat{\eta}_C^{(2)} - \hat{\eta}_T^{(2)} \right] - L_{D1} \left[\hat{\phi}_T^{(1)}, \hat{\eta}_T^{(1)} \right] - L_{D2} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{dH}{dx} \right] - i\varpi_0 \left(\hat{\phi}_T^{(1)} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} H^{(1)} \right) - \lambda^{(3/2)} \beta - \lambda^{(2)} \frac{\partial \Phi}{\partial x} & (n=2), \\ L_{D0} \left[\hat{\phi}_C^{(5/2)} - \hat{\phi}_T^{(5/2)}, \hat{\eta}_C^{(5/2)} - \hat{\eta}_T^{(5/2)} \right] - L_{D1} \left[\hat{\phi}_T^{(3/2)}, \hat{\eta}_T^{(3/2)} \right] - i\varpi_0 \hat{\phi}_T^{(3/2)} \\ \quad - \lambda^{(3/2)} \left(\hat{\phi}_T^{(1)} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} H^{(1)} \right) - \lambda^{(2)} \beta - \lambda^{(5/2)} \frac{\partial \Phi}{\partial x} & (n=5/2), \\ \dots. \end{cases} \quad (3.11c)$$

また, $(\hat{\phi}_T^{(n)}, \hat{\eta}_T^{(n)})$ は $(\hat{\phi}_T, \hat{\eta}_T)$ の構成関数である:

$$\hat{\phi}_T = \hat{\phi}_T^{(0)} + K^{1/2} \hat{\phi}_T^{(1/2)} + K \hat{\phi}_T^{(1)} + \dots, \quad \hat{\eta}_T = \hat{\eta}_T^{(0)} + K^{1/2} \hat{\eta}_T^{(1/2)} + K \hat{\eta}_T^{(1)} + \dots. \quad (3.12)$$

とくに,

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_T^{(1)} &= \hat{\phi}_C^{(1)} - ip_0 x \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \hat{\eta}_T^{(1)} = \hat{\eta}_C^{(1)} - ip_0 x \frac{dH}{dx}, \\ \hat{\phi}_T^{(3/2)} &= \hat{\phi}_C^{(3/2)} - ip_0 x \beta - i\Delta x \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \hat{\eta}_T^{(3/2)} = \hat{\eta}_C^{(3/2)} - i\Delta x \frac{dH}{dx}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

さらに(3.8), (3.9), (3.11b,c)において, L_{Kn} と L_{Dn} は $z = H + KH^{(1)} + K^2 H^{(2)} + \dots$ 上で評価される線形演算子 L_{Kn} と L_{Dn} の $O(K^n)$ 成分である. とくに,

$$L_{K0}[\hat{\phi}, \hat{\eta}] = \left(-\frac{\partial}{\partial z} + \frac{dH}{dx} \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{\phi} + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dH}{dx} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[\left(-\nu + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \hat{\eta} \right], \quad (3.14a)$$

$$L_{D0}[\hat{\phi}, \hat{\eta}] = \left[\left(-\nu + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{\phi} + \left[\left(-\nu + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 1 \right] \hat{\eta}, \quad (3.14b)$$

$$L_{K1}[\hat{\phi}, \hat{\eta}] = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dH}{dx} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[H^{(1)} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial x \partial z} H^{(1)} \right) \hat{\eta} \right] - H^{(1)} \nabla_z^2 \hat{\phi}, \quad (3.14c)$$

$$L_{D1}[\hat{\phi}, \hat{\eta}] = \left[\left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} H^{(1)} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} H^{(1)} \right) \frac{\partial}{\partial z} + H^{(1)} \left(\left(-\nu + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \hat{\phi} \quad (3.14d)$$

$$+ \hat{\eta} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(-\nu + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} H^{(1)} \right) + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} H^{(1)} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right].$$

上記方程式系(3.7)-(3.10)は線形非同次である。その同次部分は $x \rightarrow \pm\infty$ で指数関数的に減衰する 0 でない解 $(\hat{\phi}_c^{(0)}, \hat{\eta}_c^{(0)}) = (\partial\Phi/\partial x, dH/dx)$ をもち、 $z=0$ で $\partial\hat{\phi}/\partial z=0$ なる関数に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^H \frac{\partial \Phi}{\partial x} \nabla_2^2 \hat{\phi} dz + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} L_{K0}[\hat{\phi}, \hat{\eta}] - \frac{dH}{dx} L_{D0}[\hat{\phi}, \hat{\eta}] \right]_{z=H} \right\} dx = 0, \quad (3.15)$$

を満たす。ただし $\left[\right]_{y=H}$ は、括弧内の量を $y=H$ で評価することを意味する。したがって、非同次方程式系(3.7)-(3.10)が $x \rightarrow \pm\infty$ で指数関数的に増大しないような解をもつには、その非同次項 $F^{(n)}$, $G^{(n)}$, $I^{(n)}$ が次の可解条件を満たさなければならない：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^H \frac{\partial \Phi}{\partial x} F^{(n)} dz + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} G^{(n)} - \frac{dH}{dx} I^{(n)} \right]_{z=H} \right\} dx = 0 \quad (n=1, 3/2, 2, \dots). \quad (3.16)$$

$n=1$ のとき、(3.16)は恒等的に満たされ、(3.7)-(3.10)の解は

$$\hat{\phi}_c^{(1)} = \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} - i\omega_0 \frac{\partial \Phi}{\partial v} + ip_0 x \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \hat{\eta}_c^{(1)} = \frac{dH^{(1)}}{dx} - i\omega_0 \frac{\partial H}{\partial v} + ip_0 x \frac{dH}{dx}, \quad (3.17)$$

と表される。ただしこの解(3.17)は周期境界条件(2.29)を満たさない、というのも Φ の ν による微分 $\partial\Phi/\partial\nu$ は、 $x \rightarrow \infty$ と $x \rightarrow -\infty$ において異なる値をとるからである。周期境界条件(2.29)を満たす解を構成するには、 x に関して縮められた座標系 $X = Kx$ を導入し、 x への依存性が緩やかな解を求めなければならない。この解を遠方場の解と呼ぶ。近接場の解(3.4)と遠方場の解とをつなぎあわせることにより、周期条件(2.29)を満たす解を構成するのである。この節では周期条件はさておき近接場の解を求める。次節で遠方場の解を求める。

$n=3/2, 2$ のとき、可解条件(3.16)は恒等的に満たされ、 $n=5/2$ のとき、次式に帰着する：

$$\frac{2i\omega_0 \lambda^{(3/2)}}{\nu} \frac{dE}{d\nu} = \left(\omega_0^2 \frac{dM}{d\nu} - \nu M q^2 \right) \beta + i\omega_0 \left[\frac{\partial \Phi}{\partial v} \hat{u}_c^{(3/2)} \right]_{x \rightarrow \infty} - i\omega_0 \left[\frac{\partial \Phi}{\partial v} \hat{u}_c^{(3/2)} \right]_{x \rightarrow -\infty}. \quad (3.18)$$

ただし、 E と M は(1.2)と(2.23)により与えられ、 $\hat{u}_c^{(n)}$ は次式により定義される：

$$\hat{u}_c^{(n)} = \int_0^H \left[\frac{\partial \hat{\phi}_c^{(n)}}{\partial x} - i(p_0 \hat{\phi}_c^{(n-1)} + \Delta \hat{\phi}_c^{(n-3/2)}) \right] dz - \nu \hat{\eta}_c^{(n)}. \quad (3.19)$$

(3.17)の後で述べた通り、近接場の解は周期条件(2.29)を満たさない。実際、 $\hat{\phi}_c^{(1)}$ と $\hat{u}_c^{(2)}$ は $x \rightarrow -\infty$ と $x \rightarrow \infty$ における値において次の差をもつ：

$$\left[\hat{\phi}_c^{(1)} \right]_{x \rightarrow -\infty} = \left[\hat{\phi}_c^{(1)} \right]_{x \rightarrow \infty} - i\omega_0 \frac{d\Omega}{d\nu}, \quad (3.20a)$$

$$\left[\hat{u}_c^{(2)} \right]_{x \rightarrow -\infty} = \left[\hat{u}_c^{(2)} \right]_{x \rightarrow \infty} + \omega_0^2 \frac{dM}{d\nu} - \nu M q^2. \quad (3.20b)$$

ここに Ω は(2.22)に帰着される。

3.2. 遠方場の解

x に関して縮められた座標系

$$X = Kx, \quad (3.21)$$

を導入し、ここでは X , z に関して単位量の範囲で有意の変化 $[\partial\hat{\phi}/\partial X = O(\hat{\phi})]$,

$\partial\hat{\phi}/\partial z = O(\hat{\phi})$, $d\hat{\eta}/dX = O(\hat{\eta})$]をするものを次のような $K^{1/2}$ の冪級数の形で求める:

$$\hat{\phi}_F(X, z) = K^{1/2}\hat{\phi}_F^{(1/2)} + K\hat{\phi}_F^{(1)} + K^{3/2}\hat{\phi}_F^{(3/2)} + \dots, \quad (3.22a)$$

$$\hat{\eta}_F(X) = K^{3/2}\hat{\eta}_F^{(3/2)} + K^2\hat{\eta}_F^{(2)} + K^{5/2}\hat{\eta}_F^{(5/2)} + \dots. \quad (3.22b)$$

ここに添え字 F は解の種類を表す[遠方場の解(far-field solution)]. $\hat{\phi}_F$, $\hat{\eta}_F$ の級数がそれぞれ $O(K^{1/2})$, $O(K^{3/2})$ から始まるのは, 近接場の解がこれらのオーダーから $x \rightarrow \pm\infty$ において零でない値をもつからである((3.5), (3.9)を見よ). (2.19), (3.1)-(3.3), (3.22)を(2.25)-(2.29)に代入し, $K^{1/2}$ について整理すると, $\hat{\phi}_F^{(n)}$ ($n=1/2, 1, 3/2, 2$) に対する方程式系が得られる. $n=1/2, 1, 3/2, 2$ では, 同次方程式($\partial^2\hat{\phi}_F^{(n)}/\partial z^2 = 0$ for $0 < z < 1$, $\partial\hat{\phi}_F^{(n)}/\partial z = 0$ at $z=0, 1$)となり, $X = \pm\pi$ で周期条件を満たす z に依らない解をもつ:

$$\hat{\phi}_F^{(n)} = \hat{\phi}_F^{(n)}(X) \quad (n=1/2, 1, 3/2, 2), \quad (3.23)$$

ただし

$$\hat{\phi}_F^{(n)}(-\pi) = \hat{\phi}_F^{(n)}(\pi). \quad (3.24)$$

$n=5/2$ と 3 のとき, 方程式系は非同次となる:

$$\frac{\partial^2\hat{\phi}_F^{(n)}}{\partial z^2} = J^{(n)} \equiv \left[q^2 - \left(\frac{d}{dX} - ip_0 \right)^2 \right] \hat{\phi}_F^{(n-2)} + 2i\Delta \left(\frac{d}{dX} - ip_0 \right) \hat{\phi}_F^{(n-5/2)} \quad \text{for } 0 < z < 1, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial\hat{\phi}_F^{(n)}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z=0, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial\hat{\phi}_F^{(n)}}{\partial z} = L^{(n)} \equiv \left[i\omega_0 - v \left(\frac{d}{dX} - ip_0 \right) \right] \hat{\eta}_F^{(n-1)} + (\lambda^{(3/2)} + iv\Delta) \hat{\eta}_F^{(n-3/2)} \quad \text{at } z=1, \quad (3.27)$$

$$\hat{\phi}_F^{(n)}(-\pi, z) = \hat{\phi}_F^{(n)}(\pi, z). \quad (3.28)$$

ただし $\hat{\phi}_F^{(0)} = \hat{\eta}_F^{(1)} = 0$ および

$$\hat{\eta}_F^{(n-1)} = - \left[i\omega_0 - v \left(\frac{d}{dX} - ip_0 \right) \right] \hat{\phi}_F^{(n-2)} - (\lambda^{(3/2)} + iv\Delta) \hat{\phi}_F^{(n-5/2)}. \quad (3.29)$$

この非同次方程式系(3.25)-(3.28)が解をもつには, その非同次項 $J^{(n)}$ と $L^{(n)}$ が次の可解条件を満たさなければならない:

$$\int_0^1 J^{(n)} dz = L^{(n)} \quad (n=5/2, 3). \quad (3.30)$$

$n=5/2$ のとき, (3.30)は周期条件(3.24)のもとで, $n=1/2$ に対する近接場解(3.5)との接合(解析の便宜上, ここで最低次のオーダー $K^{1/2}$ でのみ接合をおこなう)をおこなうと,

$$\hat{\phi}_F^{(1/2)} = \beta, \quad (3.31)$$

となる. $\hat{\eta}_F^{(3/2)}$ は(3.29)より,

$$\hat{\eta}_F^{(3/2)} = -i(\omega_0 + vp_0)\beta. \quad (3.32)$$

$n=3$ のとき, (3.30)は, 周期条件(3.24)のもとで $\hat{\phi}_F^{(1)}$ の関数形を決定する:

$$\hat{\phi}_F^{(1)} = \left(-\frac{\lambda^{(3/2)}}{c_{g0}} + i\Delta \right) \beta \chi(X) + \beta^{(1)} + \bar{\beta}^{(1)} \exp \left[\frac{2b\omega_0}{1-v^2} i\chi(X) \right]. \quad (3.33)$$

ただし $\beta^{(1)}$ と $\bar{\beta}^{(1)}$ は新しい未定定数であり, $\chi(X)$ は,

$$\chi(X) = \begin{cases} X + \pi & \text{for } -\pi < X < 0, \\ X - \pi & \text{for } 0 < X < \pi, \end{cases} \quad (3.34)$$

により定義され、 c_{g_0} は波数 $(k, l) = (Kp_0, Kq)$ の線形波の x 方向群速度である：

$$c_{g_0} \equiv \left[\frac{\partial \omega(k, l)}{\partial k} \right]_{(k, l) = (Kp_0, Kq)} = \frac{b(1-v^2)}{bv+1} (< 0). \quad (3.35)$$

$\hat{\eta}_F^{(2)}$ は(3.29)より、

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_F^{(2)} = & \left[i(\omega_0 + vp_0) \left(\frac{\lambda^{(3/2)}}{c_{g_0}} - i\Delta \right) \chi(X) - \frac{p_0 \lambda^{(3/2)}}{b\omega_0} \right] \beta - i(\omega_0 + vp_0) \beta^{(1)} \\ & - i \left(\omega_0 + v \left(p_0 - \frac{2b\omega_0}{1-v^2} \right) \right) \bar{\beta}^{(1)} \exp \left[\frac{2b\omega_0}{1-v^2} i\chi(X) \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

3.3. 解の接合

近接場の解 $(\hat{\phi}_C, \hat{\eta}_C)$ と遠方場の解 $(\hat{\phi}_F, \hat{\eta}_F)$ を接合する。近接場 $(|X| \ll 1)$ においては遠方場の解を $X (= Kx)$ に関して展開する必要がある：

$$\hat{h}_F^{(n)} = (\hat{h}_F^{(n)})_0 + Kx \left(\frac{\partial \hat{h}_F^{(n)}}{\partial X} \right)_0 + \frac{K^2 x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \hat{h}_F^{(n)}}{\partial X^2} \right)_0 + \dots$$

ここに \hat{h} は $(\hat{\phi}, \hat{\eta})$ を表し、 $(\dots)_0$ は括弧内の量を $X=0$ 上で評価することを意味する。この展開後、 $(\hat{\phi}_F, \hat{\eta}_F)$ を $K^{1/2}$ について再整理すると、再構成関数 $(\hat{\phi}_F^{(n)*}, \hat{\eta}_F^{(n)*})$ が得られる。その上で、近接場解の構成関数 $(\hat{\phi}_C^{(n)}, \hat{\eta}_C^{(n)})$ を遠方場解のそれ $(\hat{\phi}_F^{(n)*}, \hat{\eta}_F^{(n)*})$ （再構成したもの）と接合する。接合条件は、

$$\left[\hat{\phi}_C^{(n)} \right]_{x \rightarrow \pm\infty} = \hat{\phi}_F^{(n)*}, \quad \left[\hat{\eta}_C^{(n)} \right]_{x \rightarrow \pm\infty} = \hat{\eta}_F^{(n)*}, \quad (3.37)$$

である。

$n=1$ のとき、 $\hat{\phi}_F^{(1)*} = (\hat{\phi}_F^{(1)})_0$ であるから、接合条件は(3.33)より

$$\left[\hat{\phi}_C^{(1)} \right]_{x \rightarrow \pm\infty} = \pm \pi \left(\frac{\lambda^{(3/2)}}{c_{g_0}} - i\Delta \right) \beta + \beta^{(1)} + \bar{\beta}^{(1)} \exp \left(\pm i \frac{2\pi b \omega_0}{v^2 - 1} \right). \quad (3.38)$$

ここで \pm はいずれも上もしくは下の符号を選ぶ。

$n=3/2, 2$ のとき、 $\hat{\phi}_F^{(n)*} = (\hat{\phi}_F^{(n)})_0 + x(d\hat{\phi}_F^{(n-1)}/dx)_0$ であるから、 x に依らない項と x に比例する項が現れ、それぞれに対して接合条件が得られる。ここでは x に比例する項に対して、(3.16)で定義した $[\hat{u}_C^{(n)}]_{x \rightarrow \pm\infty}$ により表すことにしよう。(3.31)-(3.33), (3.36)より、

$$\left[\hat{u}_C^{(3/2)} \right]_{x \rightarrow \pm\infty} = -ib\omega_0\beta, \quad (3.39)$$

$$\left[\hat{u}_C^{(2)} \right]_{x \rightarrow \pm\infty} = \left[-\frac{\lambda^{(3/2)}}{b} \pm i\pi b \omega_0 \left(-\frac{\lambda^{(3/2)}}{c_{g_0}} + i\Delta \right) \right] \beta - ib\omega_0\beta^{(1)} + ib\omega_0\bar{\beta}^{(1)} \exp \left(\pm i \frac{2\pi b \omega_0}{v^2 - 1} \right), \quad (3.40)$$

ここで \pm はいずれも上もしくは下の符号を選ぶ。また $\hat{\eta}_C^{(n)}$ に対する条件は自動的に満たされる。結局、8つの未知数 $\beta, \bar{\beta}^{(1)}, [\hat{\phi}_C^{(1)}]_{x \rightarrow \pm\infty} - \beta^{(1)}, [\hat{u}_C^{(3/2)}]_{x \rightarrow \pm\infty}, [\hat{u}_C^{(2)}]_{x \rightarrow \pm\infty} + ib\omega_0\beta^{(1)}$ が8つの式(3.20), (3.38)-(3.40)により決まる。結果を $[\hat{u}_C^{(3/2)}]_{x \rightarrow \pm\infty}$ と β に対して示す：

$$\left[\hat{u}_C^{(3/2)} \right]_{x \rightarrow \pm\infty} = -ib\omega_0\beta = -\frac{c_{g_0}\Gamma_0 q^2}{4\pi(\lambda^{(3/2)} - ic_{g_0}\Delta)}, \quad (3.41)$$

ただし、

$$\Gamma_0 = \frac{vE}{dE/dv} \left(-b \frac{d\Omega}{dv} + \frac{dM}{dv} \right) - vM, \quad \bar{\Gamma}_0 = \frac{vE}{dE/dv} \left(b \frac{d\Omega}{dv} + \frac{dM}{dv} \right) - vM. \quad (3.42)$$

(3.41)を(3.18)に代入すると, $b < 0$ のとき (b は(1.6)で表わされる),

$$\lambda^{(3/2)} = \frac{ic_{g0}}{2} \left(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \Delta_{cr}^2} \right), \quad (3.43a)$$

$b > 0$ のとき,

$$\lambda^{(3/2)} = \begin{cases} \frac{c_{g0}}{2} \left(i\Delta \pm \sqrt{-\Delta^2 + \Delta_{cr}^2} \right) & \text{for } |\Delta| < \Delta_{cr}, \\ \frac{ic_{g0}}{2} \left(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - \Delta_{cr}^2} \right) & \text{for } |\Delta| > \Delta_{cr}, \end{cases} \quad (3.43b)$$

が得られる. ここに Δ_{cr} は

$$\Delta_{cr} = \sqrt{\frac{\Gamma_0^2 q^2}{2\pi E |bc_{g0}|}}. \quad (3.44)$$

(3.43b)より,

$$|\Delta| < \Delta_{cr} \quad \text{for } b > 0, \quad (3.45)$$

のとき $\lambda^{(3/2)}$ は正の実部をもつ. つまり $k/K - l/K$ 平面 ($p-q$ 平面)上において, $b > 0$ の共鳴直線 $p = p_0(q)$ に沿って不安定領域が幅 $O(K^{1/2})$ で存在することが証明された. この不安定共鳴直線を, 図2に実線で示した.

4. 結言

水面波列の線形安定性を Euler 方程式系を基に調べ, 長波長の極限 (振幅は有限) における共鳴不安定性を理論的に明らかにした. その結果, 共鳴曲線は攪乱の波数空間上において4本の直線と $m+2$ 波相互作用による楕円曲線 ($m=1,2,\dots$) で表されることが分かった. 前者の共鳴について安定性解析をおこない, 2本の共鳴直線上で中立安定, 残りの2直線上で不安定性が誘起されることを証明した. 後者の共鳴については, 紙面の都合上解析の説明は省略したが, すべての楕円曲線上に沿って $O(K)$ の幅の不安定領域が存在することが分かっている. 今後, 固有値問題(2.25)-(2.29)を数値的に解き, 本研究で得られた理論解析結果の確認を行いたい.

本研究では, 攪乱の波数 $\sqrt{k^2 + l^2}$ が水面波列のそれ $K (\ll 1)$ と同程度に小さい場合を考えた. 攪乱の波数が $K (\ll 1)$ よりも相対的に大きい場合, $K \ll \sqrt{k^2 + l^2} \ll K^{1/2}$ においては依然, 本解析の共鳴不安定性が生じるが, $\sqrt{k^2 + l^2} \gg K^{1/2}$ では孤立波の横方向攪乱に対する安定性に [3,4] に準じることになる. つまり $\sqrt{k^2 + l^2} = O(K^{1/2})$ を境にして共鳴不安定性と孤立波の横方向安定性 (もしくは不安定性) が入れ替わるのである.

謝辞: 講演後に九州大学の岡村誠さんから, 安定性解析結果に対するコメントをいただきました. 感謝いたします.

参考文献

- [1] Phillips, O. M. 1960 On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. Part 1. The elementary interactions. *J. Fluid Mech.* 9, 193-217.
- [2] Mclean, J. W. 1982 Instabilities of finite-amplitude water waves. *J. Fluid Mech.* 114, 331-341.
- [3] Kataoka, T. & Tsutahara, M. 2004 Transverse instability of surface solitary waves. *J. Fluid Mech.* 512, 211-221.
- [4] Kataoka, T. 2008 Transverse instability of interfacial solitary waves. *J. Fluid Mech.* 611, 255-282.