

ソリトンの位置に基づく連立非分散方程式のソリトンの有効相互作用

角 畠 浩 (Hiroshi Kakuhata) 富山大・工

紺 野 公 明 (Kimiaki Konno) 日大・理工

Faculty of Engineering, University of Toyama
College of Science and Technology, Nihon University

1 Introduction

連立非分散方程式

$$\partial_\tau^2 \mathbf{r} - \partial_\sigma^2 \mathbf{r} = (\partial_\tau \mathbf{r} + \partial_\sigma \mathbf{r}) \times (\mathbf{J} \times \mathbf{r}), \quad (1)$$

は一様一定な電流が作る外部磁場中の内部電流と伸縮性を持つストリングを記述する可積分方程式である [1, 2]。ここで $\mathbf{r} = (X, Y, Z)$ はストリングの位置ベクトル, τ と σ はそれぞれ時間とストリングに沿ったパラメータであり, \mathbf{J} は外部電流を表す定数ベクトルである。この方程式のソリトン解は外部電流 \mathbf{J} 方向に真直ぐに張ったストリング上をこの方向に回転しながら伝播し, ソリトンの相互作用にはいろいろなパターンがある。本稿では, 波動でありながら粒子のように弾性散乱をするソリトン [3] を互いに力を及ぼし合う「ソリトン粒子」としてとらえて, 方程式 (1) のソリトン相互作用について考察する。以前から, 我々はストリングの各点に働く力を用いてソリトンに働く合力をソリトンのピークの周りにソリトンの大きさにわたる積分で求めることにより, ソリトン粒子を空間的に広がりを持つ粒子としてこの問題を考察してきた [4]。ここでは, ソリトン粒子の位置を空間的に広がっているソリトンのピークの位置と考えることにより, ソリトン粒子に働く effective force を考察する。ソリトンをこの effective force によりその軌道を変えながら衝突する点粒子と見なし, 厳密な 2 ソリトン解からソリトンの漸近軌道を解析的に求めて effective force を計算することにする。

以下では連立非分散方程式のソリトン解とソリトン相互作用について簡単に紹介し, 連立非分散方程式の漸近的な軌道から effective force を求め, 最後にまとめを述べる。

2 連立非分散方程式

2.1 ソリトン解

式 (1) において, $J = (0, 0, 1)$ ととると運動方程式は

$$\begin{aligned}\partial_\tau^2 X - \partial_\sigma^2 X &= -(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z)X, \\ \partial_\tau^2 Y - \partial_\sigma^2 Y &= -(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z)Y, \\ \partial_\tau^2 Z - \partial_\sigma^2 Z &= (\partial_\tau X + \partial_\sigma X)X + (\partial_\tau Y + \partial_\sigma Y)Y,\end{aligned}\tag{2}$$

になる。ソリトン解を求めるため, 変換

$$X = \operatorname{Re}\left(\frac{Q}{F}\right), \quad Y = \operatorname{Im}\left(\frac{Q}{F}\right), \quad Z = \sigma + 2(\partial_\tau - \partial_\sigma) \log F,\tag{3}$$

を行い, 双線形方程式

$$\begin{aligned}(D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)F \cdot Q &= 0, \\ (D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)F \cdot Q^* &= 0, \\ (D_\tau - D_\sigma)^2 F \cdot F - \frac{1}{2}Q^*Q &= 0,\end{aligned}\tag{4}$$

を得る。ここで $*$ は複素共役を表し, $D_s (s = \tau, \sigma)$ は双線形演算子である。1 ソリトン解は

$$F = 1 + b^2 e^{\eta + \eta^*}, \quad Q = e^\eta,$$

で与えられる。ただし, 位相と係数は

$$\eta = k\sigma + \omega\tau + \delta + i\theta, \quad b = \frac{1}{2(\omega^* + \omega - k^* - k)},$$

である。ただし, k は複素波数, ω は複素振動数で分散関係

$$\omega^2 - k^2 = -1,$$

を満足し, δ と θ はそれぞれ並進と回転に関する実数の初期位相である。3次元では, 位相速度 v と角速度 Ω を導入して, 位相 η を $\eta = \xi + i\zeta, \xi = \gamma(\sigma - v\tau) + \delta, \zeta = \Omega(\tau - v\sigma) + \theta$ とすれば,

$$\begin{aligned}X &= A \cos \zeta \operatorname{sech} \xi, \\ Y &= A \sin \zeta \operatorname{sech} \xi, \\ Z &= Z_0 + \sigma - A \tanh \xi,\end{aligned}$$

が3次元空間のソリトン解となる。因子 γ と振幅 A は

$$\gamma = \sqrt{\frac{1 - (1 - v^2)\Omega^2}{1 - v^2}}, \quad A = 2\gamma(1 + v),$$

である。この解は3次元空間中を角速度 Ω で回転しながら、位相速度 v で伝播するソリトンを表す。小さい Ω ではループになるが、大きい Ω ではループを形成しない。2ソリトン解は

$$\begin{aligned} Q &= e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + c_1^2 e^{\eta_1 + \eta_1^* + \eta_2} + c_2^2 e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_2^*}, \\ F &= 1 + b_1^2 e^{\eta_1 + \eta_1^*} + b_{12}^{*2} e^{\eta_1^* + \eta_2} + b_{12}^2 e^{\eta_1 + \eta_2^*} + b_2^2 e^{\eta_2 + \eta_2^*} + d_{12}^2 e^{\eta_1 + \eta_1^* + \eta_2 + \eta_2^*}, \end{aligned} \quad (5)$$

である。係数は

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2(\omega_n^* + \omega_n - k_n^* - k_n)} \quad (n = 1, 2), \quad b_{12} = \frac{1}{2(\omega_1 + \omega_2^* - k_1 - k_2^*)}, \\ c_1 &= 2(\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2)b_1 b_{12}^*, \quad c_2 = 2(\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2)b_2 b_{12}, \\ d_{12} &= 4|\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2|^2 b_1 b_2 |b_{12}|^2, \end{aligned}$$

であり、位相と分散関係は次式で与えられる。

$$\eta_n = k_n \sigma + \omega_n \tau + \delta_n + i\theta_n, \quad \omega_n^2 - k_n^2 = -1 \quad (n = 1, 2)$$

2.2 連立非分散方程式の2ソリトン相互作用

ここでは回転が無く位相速度の大きさが同じで逆向きの正面衝突のみを考える。回転しない場合の平面内での基本的な相互作用パターンは、(1). 相対位相速度が小さいときには重ならず弾くように相互作用する (図1左)、(2). 相対位相速度が大きいときには小さいソリトンが大きいソリトンの中を回る (図1中)、(3). 振幅が正と負の場合には小さいソリトンが一時的に消失し、大きなソリトンの振幅が増大する (図1右)。ソリトン同士が同一平面内に無い場合にも同様の相互作用をするが、相互作用はほぼ同一平面内で行う。ここでは互いに直行する平面内にソリトンがいる場合を示した (図2, 3)。

3 連立非分散方程式のソリトンの軌道

図1を見るとソリトンの軌道が変化していることがわかる。この軌道の変化をソリトンに作用する「力」によって説明することはできないであろうか？

このため、厳密解を用いてソリトンの軌道を求める。第2.2節と同様に、左から右に向かう大きなソリトン (soliton-1) の速度を $v_1 = v$ ($v > 0$)、右から左に向かう小さなソリトン (soliton-2) の速度を $v_2 = -v$ とすれば、

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{1-v^2}} = \gamma, \\ A_1 &= 2\gamma(1+v), \quad A_2 = 2\gamma(1-v), \\ \eta_1 &= \gamma(\sigma - v\tau) + \delta_1, \quad \eta_2 = \gamma(\sigma + v\tau) + \delta_2, \\ \xi_1 &= \theta_1, \quad \xi_2 = \theta_2, \end{aligned}$$

となるので、初期位相 θ_n の適当な選択により、式(5)の従属変数 F は

$$F = \beta(\tau) + \cosh 2\gamma\sigma,$$

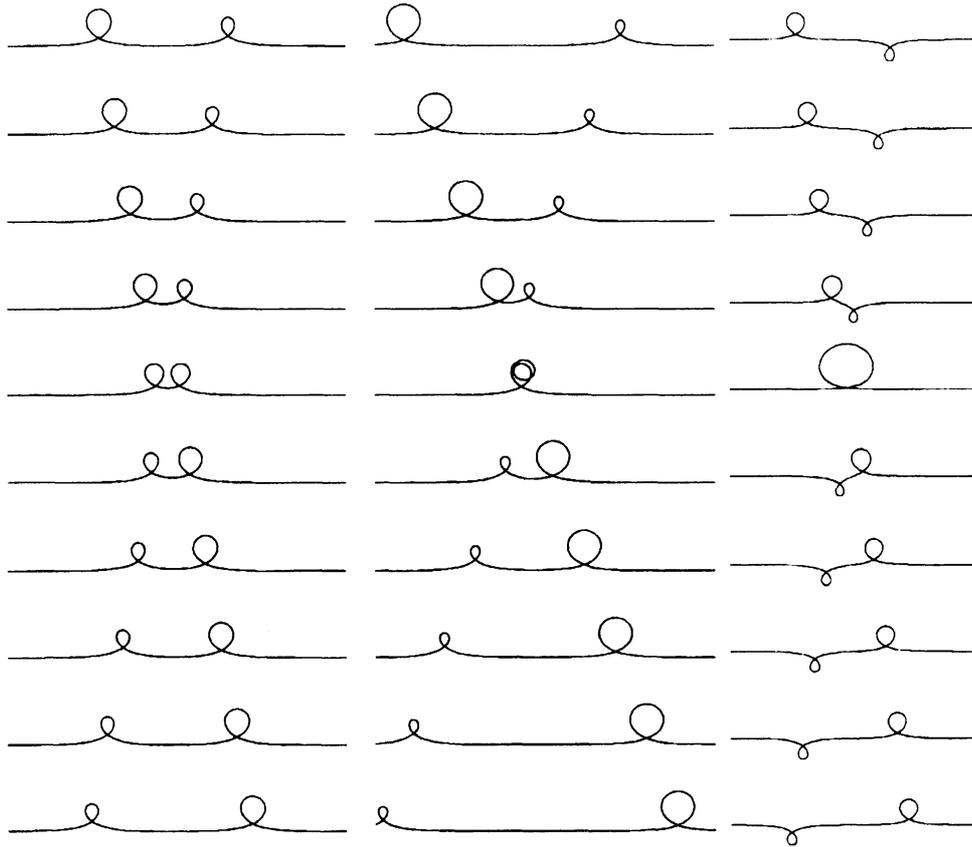


図1 $v = 0.12$ $v = 0.24$ $v = 0.12$

になる。ここで

$$\beta = \cosh 2\gamma v\tau + (1 - v^2) \cos \theta_{12},$$

および θ_{12} は初期位相の差 $\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$ である。ソリトンの位置をソリトンのピークの位置とすれば、方程式

$$\partial_\sigma^2 Z = 0, \quad (\partial_\sigma^3 Z > 0) \tag{6}$$

から求めることができる。すなわち、

$$v[-\beta \cosh 2\gamma\sigma + v^2(\cosh^2 2\gamma\sigma - 2)] \sinh 2\gamma v\tau - (\beta^2 - v^2\beta \cosh 2\gamma\sigma - 2v^4) \sinh \gamma\sigma = 0$$

を解けばよい。この超越方程式は $2\gamma\sigma$ の双曲線関数を指数関数で表せば、 $e^{2\gamma\sigma}$ の4次方程式

$$v^2(v \sinh 2\gamma v\tau - \beta)e^{8\gamma\sigma} - 2(v\beta \sinh 2\gamma v\tau + \beta^2 - 2v^4)e^{6\gamma\sigma} - 6v^3 \sinh 2\gamma v\tau e^{4\gamma\sigma} - 2(v\beta \sinh 2\gamma v\tau - \beta^2 + 2v^4)e^{2\gamma\sigma} + v^2(v \sinh 2\gamma v\tau - \beta) = 0$$

になる。この方程式の厳密解を求めることができるが、非常に複雑なので、ソリトン同士が十分に離れている場合を考察し、漸近解を求める。

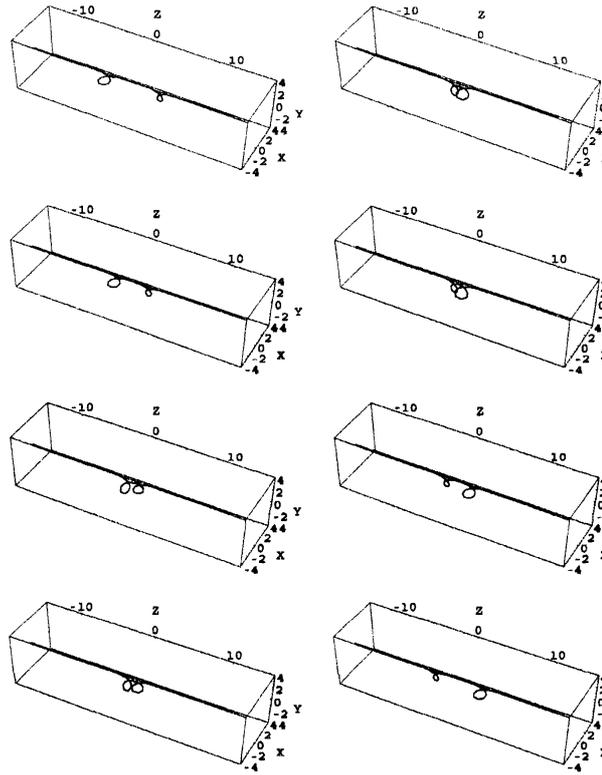


図2 $v_1 = 0.12, v_2 = -0.12$

まず、衝突前の、 $\tau \rightarrow -\infty$ の場合を考察する。それぞれのソリトンのピークは大きな右進行波 (soliton-1) 付近で

$$\sigma_1 \approx v\tau$$

小さな左進行波 (soliton-2) 付近で

$$\sigma_2 \approx -v\tau$$

と振る舞うので、主導次数項と次主導次数項を拾うと、soliton-1 と soliton-2 の位置をそれぞれ

$$e^{2\gamma\sigma_1} \approx \frac{v^2[1 + 2(1-v)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}]e^{2\gamma v\tau}}{1 + 2(1-v)(2+v)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}},$$

$$e^{2\gamma\sigma_2} \approx \frac{[1 + 2(2-v)(1+v)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}]}{v^2[1 + 2(1+v)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}]e^{2\gamma v\tau}}$$

と求めることができる。次に、衝突後の $\tau \rightarrow +\infty$ の場合を考察すると、soliton-1 付近で

$$\sigma_1 \approx v\tau$$

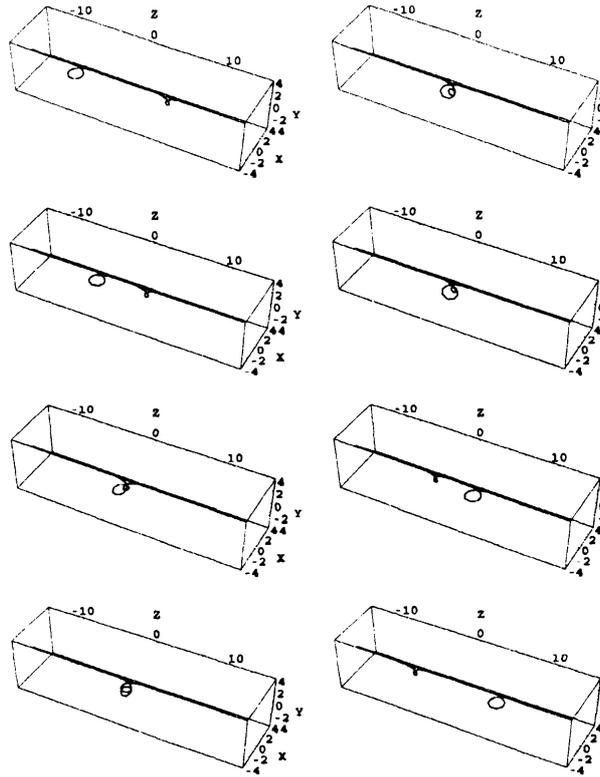


図3 $v_1 = 0.24, v_2 = -0.24$

soliton-2 付近で

$$\sigma_2 \approx -v\tau$$

であることに注意して、主導次数項と次主導次数項を拾うと

$$e^{2\gamma\sigma_1} \approx \frac{1 + 2(1-v)(2+v) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}}{v^2 [1 + 2(1-v) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}] e^{-2\gamma v\tau}}$$

$$e^{2\gamma\sigma_2} \approx \frac{v^2 [1 + 2(1+v) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}] e^{-2\gamma v\tau}}{1 + 2(1+v)(2-v) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}}$$

を得ることができる。これにより近似ではあるが解析的な解を得た。

ソリトンの漸近的な軌道がわかったので時間 τ に関する2階の導関数を求めるのだが、その前にソリトンの τ - Z 空間での相対座標 $r = Z_2 - Z_1$ と質量を定義しておく。ここで、 Z_n は τ - Z 空間でのソリトン位置で

$$Z_n = \sigma_n + Z_0 + 2(\partial_\tau - \partial_\sigma) \ln F|_{\sigma=\sigma_n}, \quad n = 1, 2, \quad (7)$$

である。相対座標は衝突前では、

$$r = -2v\tau + \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{1 + 4(2-v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}}{1 + 4 \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}} - \frac{1}{2\gamma} \ln v^4 - 4\gamma, \quad (8)$$

衝突後では

$$r = -2v\tau + \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{1 + 4 \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}}{1 + 4(2 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}} + \frac{1}{2\gamma} \ln v^4 + 4\gamma, \quad (9)$$

である。ここで、両式の第3項および第4項は初期位相に関わる因子である。ソリトンの運動量はそれぞれ

$$P_{z1} = 2A_1v, \quad P_{z2} = -2A_2v$$

で与えられる。ここで

$$A_1 = 2\gamma(1 + v), \quad A_2 = 2\gamma(1 - v)$$

である。質量の定義としては $\partial P/\partial v$ のような定義 [5] も可能であるが、どちらにも v が掛かっているなのでその係数を質量とすれば、

$$m_1 = 2A_1 = 4\gamma(1 + v), \quad m_2 = 2A_2 = 4\gamma(1 - v)$$

を得る。

4 Effective force

ソリトン粒子の Newton の運動方程式は、衝突前には

$$m_1 \partial_\tau^2 \sigma_1 \approx - \frac{16\gamma^2 v^2 (1+v)(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}}{[1 + 2(1-v)(3+v) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}]^2}, \quad (10)$$

$$\approx - \frac{16\gamma^2 v^2 (1+v)(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}}{1 + 4(1-v)(3+v) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}}, \quad (11)$$

$$m_2 \partial_\tau^2 \sigma_2 \approx \frac{16\gamma^2 v^2 (1-v)(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}}{[1 + 2(1+v)(3-v) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}]^2} \quad (12)$$

$$\approx \frac{16\gamma^2 v^2 (1-v)(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}}{1 + 4(1+v)(3-v) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}} \quad (13)$$

衝突後には、

$$m_1 \partial_\tau^2 \sigma_1 \approx \frac{16\gamma^2 v^2 (1+v)(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}}{[1 + 2(1-v)(3+v) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}]^2} \quad (14)$$

$$\approx \frac{16\gamma^2 v^2 (1+v)(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}}{1 + 4(1-v)(3+v) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}}, \quad (15)$$

$$m_2 \partial_\tau^2 \sigma_2 \approx - \frac{16\gamma^2 v^2 (1-v)(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}}{[1 + 2(1+v)(3-v) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}]^2} \quad (16)$$

$$\approx - \frac{16\gamma^2 v^2 (1-v)(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}}{1 + 4(1+v)(3-v) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}}, \quad (17)$$

になる。これらは τ - Z では、衝突前に

$$\mu \frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{16(1-v^2) \cos \theta_{12}}{e^{-2\gamma v \tau} + 8(3-v^2) \cos \theta_{12}}, \quad (18)$$

衝突後には、

$$\mu \frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{-16(1-v^2) \cos \theta_{12}}{e^{2\gamma v \tau} + 8(3-v^2) \cos \theta_{12}}, \quad (19)$$

である。これらの計算では、式 (10) と (11) の様に高次の項を無視した。従って、衝突の前後で、 $\cos \theta_{12} > 0$ の場合には、斥力が働き、 $\cos \theta_{12} < 0$ の場合には、引力が働き、 $\cos \theta_{12} = 0$ の場合には力が働かないことがわかる。すなわち、回転しない場合には位相速度に関係なく正の振幅同士では斥力が働き、特に、相対位相速度が遅い場合には斥力によりソリトン同士が停止しするが (図 1 左)、その後、斥力によって離れて行くと考えることができる。相対位相速度が大きいときには停止にまでは至らず大きいソリトンの内部に突入してしまう (図 1 中)。正と負の振幅では引力で加速され激しく衝突する (図 1 右) と解釈できる。これらからこの方法でソリトンの相互作用を少なくとも定性的あるいは半定量的に説明できるといえる。なお、式 (18) と (19) は

$$\mu \frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{-8(1-v^2) \cos \theta_{12} \tanh 2\gamma v \tau}{\cosh 2\gamma v \tau + 4(3-v^2) \cos \theta_{12}} \quad (20)$$

で一つの式にまとめることができるが、 $\cos \theta_{12} < 0$ で特異性が存在する。これらの特異性に対応する現象は小さな soliton-2 が一時的に消失する現象を除いて観測されない。しかもこの現象は $\theta_{12} = \pi$ 付近の狭い領域でしか観測されないし、ソリトンの消失が特異性と関係するのかどうかは不明である。衝突が起こる $\tau = 0$ 付近では今回の近似で無視した高次の項は決して小さくはない。よって、この特異性は厳密解では消失あるいは緩和されると考えられる。

5 Summary

ソリトン粒子と見なして、連立非分散方程式のソリトン粒子間の effective force を求めた。連立非分散方程式のソリトン衝突では平面内の正の振幅同士ではソリトン間に斥力が、正と負の振幅の衝突ではソリトン間に引力が働く。ソリトンのループ面が直行する場合、すなわち、 $\cos \theta_{12} = 0$ のときには力が働かないことを示した。つまり、ソリトン間の effective force はソリトン間の初期角度の差 θ_{12} に依存する。一見、力が働かないときには位相シフトが無いのが自然なように思えるが、図 2, 3 の様にそれなりの相互作用をしているので、位相シフトはゼロにはならない。従って、この方法により、ソリトンの軌道の変化や衝突の様子などソリトン相互作用を定性的あるいは半定量的に説明できることがわかった。以前の方法ではソリトンの大きさを考慮しているのでソリトンが重複しているような場合には計算することができなかったが、この方法は原理的には近距離での effective force を求めることも可能であるし、従来の方と組み合わせることも可能である。一方で、この方法は厳密解に基づいているので非可積分系のように 2 ソリトン解が知られていない方

程式には適用できない。しかし、原理的には KdV 方程式のような可積分方程式に適用可能と思われる。

参考文献

- [1] H. Kakuhata and K. Konno, J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 757.
- [2] H. Kakuhata and K. Konno, Theor. Math. Phys. **65** (2002) 713.
- [3] 例えば, M. J. Ablowitz and H. Segur; "SOLITONS AND THE INVERSE SCATTERING TRANSFORM", SIAM, 1981.
- [4] 角畠浩, 紺野公明, 「ソリトンの有効相互作用」, 数理解析研究所講究録 1543 「波動現象の数理と応用」, p.181, 京都大学数理解析研究所, 2007 年
- [5] F. Abdullaev, S. Darmanyan and P. Khabibullaev, *Optical Solitons*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1993.