

## 弾性支持された接続剛体系を移動する非線形局在モード

阪大院・基礎工 渡辺 陽介 (Yosuke WATANABE),

淡田 聡二郎 (Sojiro AWATA),

杉本 信正 (Nobumasa SUGIMOTO)

Graduate School of Engineering Science, Osaka University

### 1 はじめに

長大構造物は、製造工程や強度等の要請から、しばしば自身の中に空間周期構造をもつ。このような周期構造における波動、振動現象を振動工学の立場から考察するために、筆者らはこれまでに**接続剛体系**と呼ばれる力学モデルを提案してきた [1]。接続剛体系は、形状や性質が等しい多数の剛体のはり（またはパネル）が、それぞれの両端で連結部を介して隣のはりと連結された構造である。連結部では、隣り合う二つのはりがなす相対的な回転角に応じて復元モーメントを与える「回転バネ」が仕込まれているものとし、特に非線形的な応答をする回転バネを考えることにより、系に陽に非線形性を与えている。さらに本稿では、系と、系を支える基盤（弾性体）や周囲流体との相互作用を考慮して、各はりの質量中心に平衡位置からの変位に対して復元力を与える「支持バネ」（線形バネ）が取り付けられた系（「**弾性支持された接続剛体系**」）を解析モデルとする（図 1）。本系は、例えば、多数の床板が橋脚によって支えられている大橋や、板状のユニット

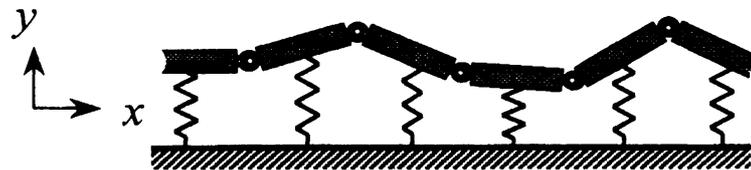


図 1: 弾性支持された接続剛体系

の接続が海面に浮いているメガフロート等、周期構造をもつ巨大構造物の、最も単純化された力学モデルであり、これらの構造物に生じるたわみ波（横波）の現象の解析に適していると言える。弾性支持の存在は、線形波の伝播周波数の上限に加え、下限を与える。この接続剛体系に対して、両端が自由な境界条件の下、適当な初期形状を与えて数値計算を行なうと、空間的に局在し、時間について周期的な局在振動（**非線形局在モード (Intrinsic Localized Mode: ILM)**）が、線形波の伝播周波数帯の外側（上または下）に現れる [2]。本稿では特に、系の形状が全体として左右非対称な初期条件を与えることにより、移動する ILM が存在することを示し、初期条件と移動パターンとの関係について明らかになったことを報告する。

### 2 解析モデルと数値計算

#### 2.1 基礎方程式

考える系は有限個 ( $N$  個) の剛体はりからなるとし、ここでは簡単のため、各はりの形状や質量は等しく一様であるとする。もし系が無限個のはりからなるとすれば、空間的に完全な周期構

造を有することになる。系の運動を支配する方程式は、 $N$  個の剛体はりに関する、左右  $x$  方向と上下  $y$  方向の運動方程式、質量中心に関する回転の方程式、および  $N-1$  個の連結部における、変位の連続の幾何学的条件の式により記述される。連結部の回転バネによる復元モーメントの大きさは、相対的な回転角に比例する線形項とその 3 乗に比例する非線形項の和の形で表され、支持バネによる復元力は常に  $y$  方向のみに作用すると仮定する。また系の運動（各はりの運動）は図 1 に示す  $x-y$  平面内に限定されているとする。図 1 より明らかのように、任意の時刻のはりの中心軸の形状は、その時刻での各はりの角度  $\phi_j(t)$  ( $j = 1, \dots, N$ ) により、一意に定まる。

まず支配方程式を適当な量を用いて無次元化する。その際、2つの無次元パラメータ  $\kappa, \eta$  を導入する。 $\kappa$  と  $\eta$  はそれぞれ、回転バネの非線形性の強さ、支持バネの剛さを表し、系の振動現象を支配する重要なパラメータとなる。波数  $k$ 、角振動数  $\omega$  をもつ正弦波の伝播を仮定すると系の線形分散関係は、 $\eta$  をパラメータとして

$$\omega = \sqrt{\frac{48 \sin^4(k/2) + 3\eta \cos^2(k/2)}{3 - 2 \sin^2(k/2)}} \quad (1)$$

と求められる。曲線 (1) は  $k$  について周期的であるが、実際の最も短い波長がはりの長さの 2 倍 ( $k = \pi$ :  $\pi$  モード) であることから、 $|k| \leq \pi$  が有意な  $k$  の範囲となる。線形波の伝播帯は  $\eta$  の値が大きいほど高周波数領域に出る。本稿で特に考察した  $\eta = 40$  の場合の線形波伝播帯は  $6 \leq \omega \leq \sqrt{48}$  であり、後述するように、本系に励起された ILM の主要な角振動数は  $\sqrt{48}$  よりも大きく、本質的に非線形モードであることを示している。

### 3 数値解析

#### 3.1 初期条件と境界条件

本研究では、全体として  $\pi$  モードで振動している系に励起される非線形局在モードについて詳しく調べる。先行する研究により、接続剛体系に生じる ILM の振る舞い（系内での移動の様子）は、初期条件（初期形状：初期に与える波形の、局在部の系内での位置）に強く依存することが分かっている [3]。以下では初期の局在位置をパラメータとして数値計算を行い、弾性支持された接続剛体系における ILM の様子を調べる。図 2 に初期形状の局在部付近の概形を示す。 $\phi_j(0)$  は

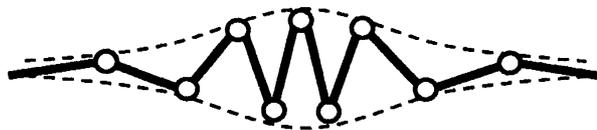


図 2: 初期形状の概形（局在部付近）

$$\phi_j(0) = (-1)^j A \operatorname{sech}[\alpha(j - c + L)]$$

の形で与える。ここで  $A$  と  $\alpha$  は任意パラメータであり、それぞれ、角度振幅、変調による局在の幅を表す。 $c = (N + 1)/2$  は系の中心位置である。本研究では  $A = \pi/180$ ,  $\alpha = 0.6$ ,  $N = 64$  とする。 $L$  は整数で、初期に与える局在部の、 $c$  からのずれを表すパラメータである。また全ての  $j$  について  $d\phi_j(0)/dt = 0$  とする。系の両端で自由境界条件を課し、計算には 4 次の Runge-Kutta 法を用いる。

### 3.2 計算結果

以下の計算では  $\kappa = 1400$ ,  $\eta = 40$  に固定する.  $L$  をパラメータとして数値計算を行なったときの代表的な結果 ( $L = 0, 1, 16, 20, 27, 30, 31$  の場合) を以下に示す. まず  $L = 0$  の場合は, 図 3 か

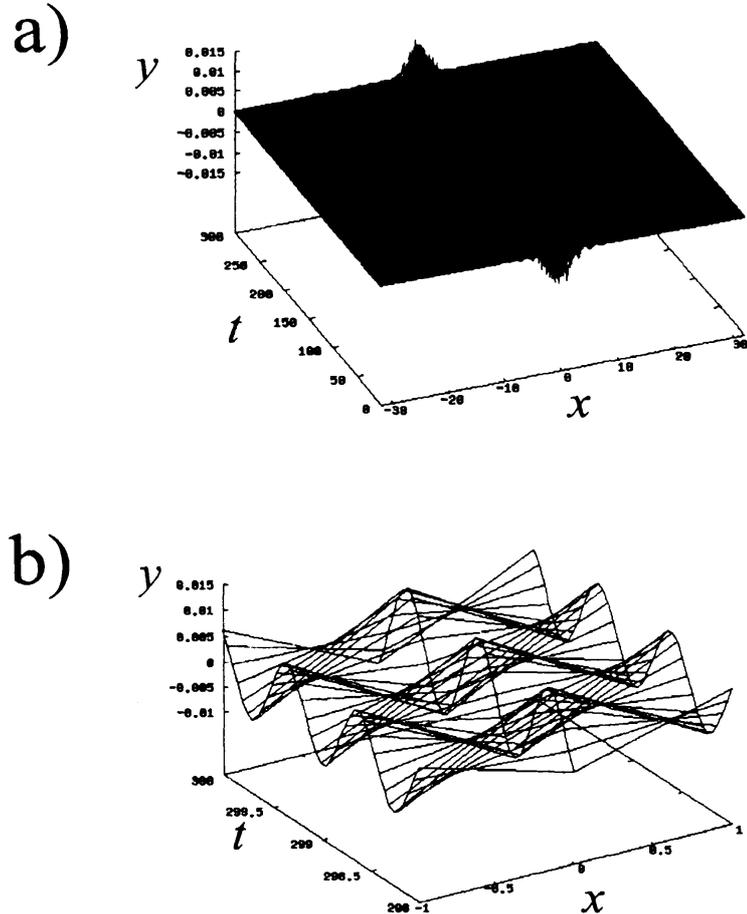


図 3: a) はり中心軸形状の時空間発展 ( $L = 0$ ), b) 局在部付近の拡大図 ( $t \sim 299$ ).

ら, 振幅の大きい規則的な振動が系の中央に定在し,  $t = 0$  で与えた波形, 振幅の大きさが, 十分時間が経過した後も維持されていることが分かる. 局在部の振動は準周期的であるが, メインの角振動数は 8.4 で, 前章で述べた線形波が伝播する振動数帯より高い値となっている. この  $L = 0$  の場合の, 系の中央に励起される定在振動が, これまで我々が「定在型 ILM」と呼んできた振動である [2, 4]. しかし, 後述するように, 本研究では系の中央以外 (端の方) で ILM が定在するパターンも見つかっており ( $L = 28, 29$ ), 以後, 共にこれらを定在型と呼ぶことにする.

次に  $L = 1$  とし, 初期に与える局在の位置をはり 1 本分だけずらす. 系の長手方向の「バランス」が崩れることにより, ILM は系内を「動く」ようになる (図 4).  $t = 0$  から時間の経過とともに, ILM は一方の端に寄っていき, 端に到達後 ( $t \sim 150$ ), 今度は系の内部へと戻り, ある位置まで戻ると ( $t \sim 200$ ) 再び端へ向かう動きを繰り返すことが分かる. あたかも ILM が系の端で「バウンド」を繰り返しているようである. 長時間の計算を行なうと, 端からのバウンドの距離と, バウンドの時間間隔は, 最終的に一定となることが分かる. 端でバウンドする ILM のこの動きは,  $L = 2, \dots, 27$  の場合についても定性的に同じである. バウンドの距離と時間間隔は,  $L$  の値が大

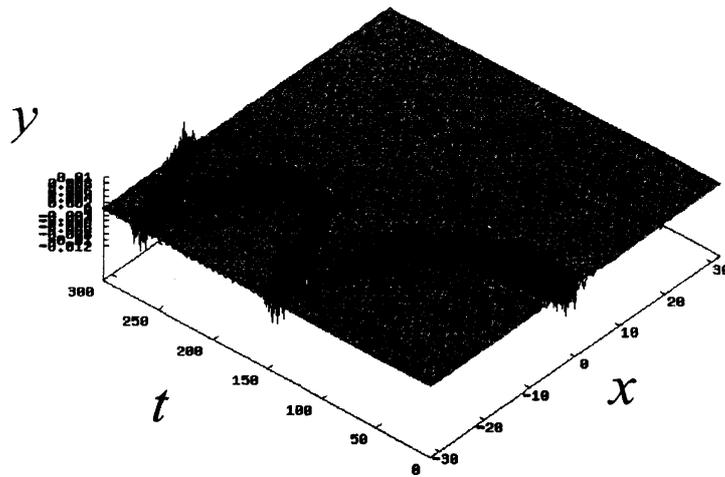


図 4: はり中心軸形状の時空間発展 ( $L = 1$ ).

きくなるにつれ, 小さくなるのが計算により示すことができる (図 5) .

$L$  の値の増加とともに, 「動き」が小さくなる ILM は,  $L = 28$  の場合について動かなくなり, 系内のある位置 ( $j = 3, 4$  のはりが最大振幅をとる) で定在する ( $L = 29$  の場合も同様) . この場合の ILM の角振動数は 9.2 で,  $L = 0$  の場合よりも大きな値となっている.  $L = 30$  の場合に (図 6 a (注: 他の図とは  $x$  軸方向の縮尺, 表示が異なる)) ILM が再びバウンドするようになることから, この定在型 ILM は系の長手方向のバランスにより生じたと考えられる.

$L = 31$  のとき ILM の移動の様子は,  $L = 30$  までの場合と比べて大きく異なり, 系内をほぼ一定の速さで往復し続けるようになる (図 6 b) . またこのとき, 両端のはりが比較的大きな振幅で振動し, その角振動数は線形波伝播振動数帯よりも小さな値を取ることが分かる.  $L = 32$  の場合も定性的に同じ結果が得られる.

## 4 おわりに

本稿では, 弾性支持された連接剛体系 (すなわち  $\eta \neq 0$  の場合) に励起された ILM の移動の様子を, 初期条件における局在の位置をパラメータとして, 数値的に詳しく調べた.  $\eta \neq 0$  の場合の ILM の移動のパターンは初期条件に強く依存し, 一般に, 十分時間が経過した後は, 一方の端での, 「一定の」バウンドを繰り返すことが分かった. これは, 支持がない場合 ( $\eta = 0$ ) には, ILM がバウンドを繰り返し最終的に一方の端に捕捉されるのとは大きく異なる結果である [3]. また本研究では, 特別な場合として, 系の中央以外の位置で定在する ILM の存在が明らかとなったが, これは  $\eta = 0$  の場合には見られなかった新しいパターンである. ILM の移動には, 系の長手方向の「バランス」が大きく関係していると考えられ, 系の長さの有限性, すなわち「端の存在」の影響が有意に現れていると言える.  $\eta$  の値の違いによる, ILM の移動に関する定量的な差異は, 系の端での, 一定となったバウンドに現れ, 同じ初期条件に対し,  $\eta$  の値が大きいほど, バウンドの距離が短く, 時間間隔が長くなることが分かった.

本研究では「高い」振動数をもつ ILM に絞って数値計算および議論を行なったが,  $\eta \neq 0$  の場合には線形波伝播振動数帯の下側に「低い」振動数をもつ ILM が存在する場合があるので, 今後, この ILM の移動の特性についても調べてみる必要がある.

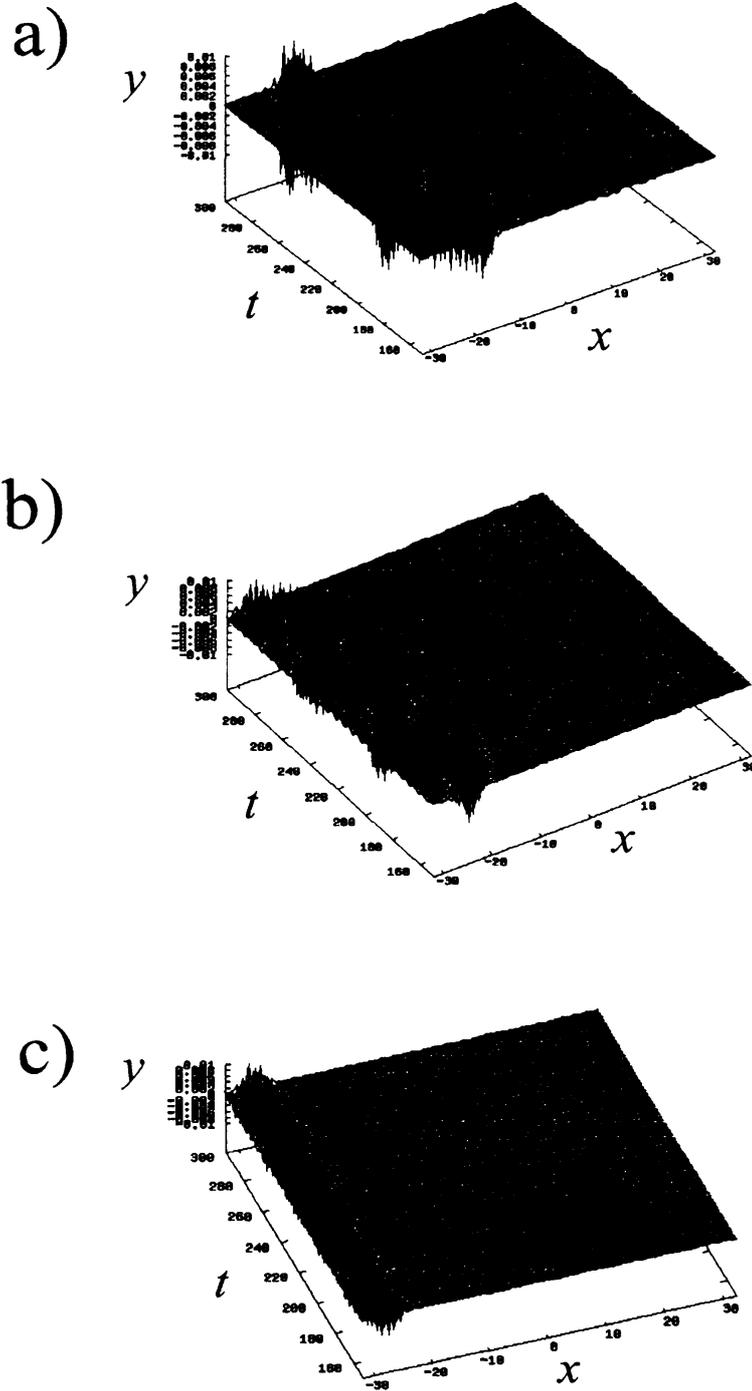
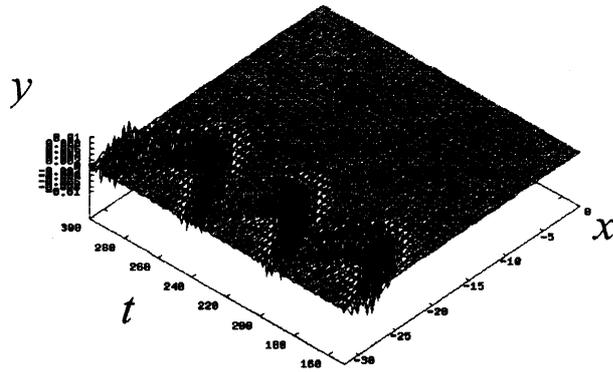


図 5: はり中心軸形状の時空間発展 a)  $L = 16$ , b)  $L = 20$ , c)  $L = 27$ .

a)



b)

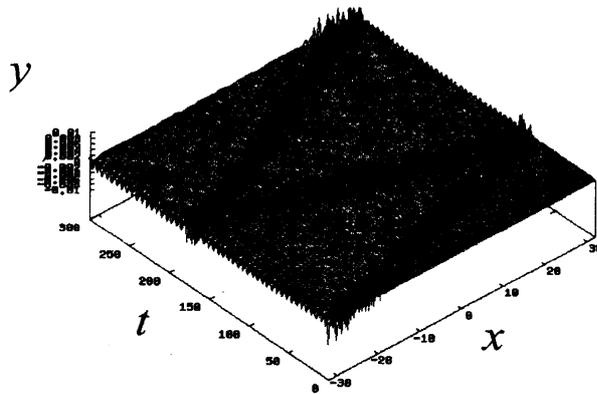


図 6: はり中心軸形状の時空間発展 a)  $L = 30$ , b)  $L = 31$ .

## 参考文献

- [1] Y. Watanabe and N. Sugimoto, "Flexural wave propagation in a spatially periodic structure of articulated beams," *Wave Motion*, **42**, 155-167 (2005).
- [2] 渡辺陽介, 杉本信正, 喜多成充, "弾性支持された接続剛体系における定在型非線形局在モード," 『日本物理学会講演概要集』, 第 **62** 巻第 2 号第 2 分冊, 278 (2007).
- [3] 渡辺陽介, 濱田和幸, 杉本信正, "接続剛体系を移動する非線形局在モード," 『戸田格子 40 周年 非線形波動研究の歩みと展望』, 九州大学応用力学研究所研究集会報告 **19ME-S2**, 145-150 (2008).
- [4] Y. Watanabe, K. Hamada, N. Sugimoto, "Localized oscillations of a spatially periodic and articulated structure," *Wave Motion*, **45**, 100-117 (2007).