数理解析研究所講究録
第 1645 巻 2009 年 241-247

複合ジェットの安定性に及ぼす速度不連続の影響

阪大 基礎工
吉永隆夫 (Takao Yoshinaga)
Dept. Mechanical Science, Osaka Univ.

1 はじめに

気体または液体のコア部と液体の円筒部からなる複合ジェットは，不安定性によりコア部がカプセル化される現象を応用した食品，製薬，インクジェット印刷などの分野において重要である [1, 2]．このような複合ジェットの安定性の応用に関して，二重円筒ノズルから放出された気-液複合ジェットによるカプセル形成の実験が Kendall [3] により行われた．実験では球殻が下流域で周期的かつ自然発生的に形成される様子が示されている．このとき，コア部の円筒部に対する流速比が増加するにつれて，その球殻の生成周期が短くなることが示された．そして，その速度比が大きすぎても小さすぎても生成される球殻はうまく分離せず，最適な速度比が存在することが示されている．

この球殻形成周期と速度比の関係は Lee と Wang[4, 5] による現象論的なモデルによりある程度は説明された．彼らのモデルでは，コア流体の運動を考えない一端が閉じた円筒シートにおいて，空間平均されたコア圧力の時間的な変化の下で不安定性による新たな崩壊までの時間が調べられており，そこから球殻生成周期を算出している．

しかしながら，不安定性によるジェット崩壊の過程において，コア部の半径が 0 に近づくにつれてコア流速や圧力に急激な変化が現れるため，コア流体の運動はたとえ密度の小さいガスであっても，ジェットの崩壊のみならずその後のカプセル形成にも大きな影響を及ぼす．そこで，本研究ではコア部と円筒部の両流体運動を考慮した複合ジェットモデルを用いて，崩壊から球殻形成に至る過程を非線形安定性の観点から調べることにより，カプセル形成のより普遍的なメカニズムが存在することを明らかにする．解析では非粘性流体に対して長波近似のもとで得られた非線形発展方程式を解くことにより，ジェットの崩壊現象に及ぼす円筒-コア間の流速比の影響を調べ，球殻形成周期や球殻の大きさを明らかにする．また，球殻形成のための最適の速度比についても述べる．

2 定式化

図1に示すような複合ジェットを軸対称座標系 (z,r) で考える．$j=1,2$ がそれぞれコア部，円筒部を表すとし，流体の速度成分を (u_j,v_j), 界面での表面張力係数を σ_j，流体の密度を ρ_j，ジェット半径および圧力を h_j，p_j で表す．また，円筒部の中心面半径を R $(=h_1/2+h_2/2)$，厚みを b $(=h_2-h_1)$ とする．流体は非圧縮，非粘性と仮定し，ジェット外部の流体運動は考えず一定の圧力 p_3 のみがジェット表面にかかっており，重力の影響は無視する．

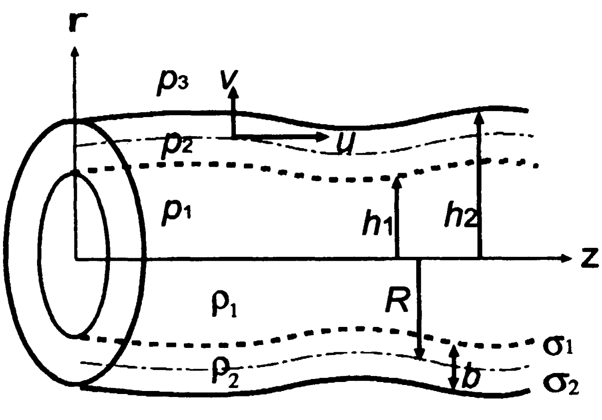


図 1: 複合ジェットモデル

基礎方程式はコア部 $(0<r<h_1)$，中空円筒部 $(h_1<r<h_2)$ に対して，それぞれ以下の連続の式および運動方程式を用いる $(j=1,2)$：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}_j=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}_j}{\partial t}+(\boldsymbol{u}_j\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_j=-\frac{1}{\rho_j}\nabla p_j, \tag{2}$$

ここで, $\boldsymbol{u}_j=(u_j,v_j)$.

一方，$r=h_1,h_2$ における境界条件として以下の運動学的条件と界面での応力連続条件が用いられる $(j=1,2)$：

$r=h_1$：

$$\frac{\partial h_1}{\partial t}=v_j-u_j\frac{\partial h_1}{\partial z}\quad, \tag{3a}$$

$$p_1=p_2+\sigma_1\kappa_1, \tag{3b}$$

$r=h_2$：

$$\frac{\partial h_2}{\partial t}=v_2-u_2\frac{\partial h_2}{\partial z}, \tag{3c}$$

$$p_2=p_3+\sigma_2\kappa_2, \tag{3d}$$

ここで，κ_j は曲率で以下のように与えられる：

$$\kappa_j=h_j^{-1}\left[1+(\partial h_j/\partial z)^2\right]^{-1/2}-(\partial^2 h_j/\partial z^2)\left[1+(\partial h_j/\partial z)^2\right]^{-3/2}.$$

以下では撹乱の波長がコア部半径や円筒部厚みに比べて十分長い場合を考る．そのとき，コア部の物理量 u_1，p_1 がジェット半径の２乗 r^2 で展開でき，円筒部の物理量 u_2，v_2，

p_2 が厚みに関係する量 $(r-R)$ で冪展開できるとして (長波近似) 以下のように表す：

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u_1^{(0)} + r^2 u_1^{(2)} + \cdots, \quad p_1 = p_1^{(0)} + r^2 p_1^{(2)} + \cdots. \\
u_2 &= u_2^{(0)} + u_2^{(1)}(r-R) + u_2^{(2)}(r-R)^2 + \cdots, \\
v_2 &= v_2^{(0)} + v_2^{(1)}(r-R) + v_2^{(2)}(r-R)^2 + \cdots, \\
p_2 &= p_2^{(0)} + p_2^{(1)}(r-R) + p_2^{(2)}(r-R)^2 + \cdots,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

ここで，係数は z と t の関数である．

これらの展開を基礎方程式と境界条件に代入し，円柱部半径および円筒部厚みの２乗程度の微小量を無視する．この結果，v_1 は u_1 を用いて表すことができ，R, b 及び u_1, u_2, v_2, h_1 の最低次の項に関する以下のような逓減された非線形発展方程式を得る (上付き添え字は省く)：

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{\partial (bu_2)}{\partial z} - \frac{bv_2}{R}, \tag{5a}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = v_2 - u_2\frac{\partial R}{\partial z}, \tag{5b}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -u_1\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial z}, \tag{5c}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -u_2\frac{\partial u_2}{\partial z} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\Delta P}{b}\frac{\partial R}{\partial z}\right), \tag{5d}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = -u_2\frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\Delta P}{b}, \tag{5e}$$

および，以下の p_1 の方程式で与えられる：

$$A_1\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} + A_2\frac{\partial p_1}{\partial z} + A_3 p_1 + A_4 = 0. \tag{5f}$$

ここで，$A_1 \sim A_4$ は b, R, u_1, u_2, v_2 の関数であり，

$$P = \frac{1}{2}(p_1+p_3) - \frac{1}{2\,\mathrm{Wb}}(\sigma\kappa_1 - \kappa_2), \quad \Delta P = -(p_1-p_3) + \frac{1}{\mathrm{Wb}}(\sigma\kappa_1+\kappa_2),$$

は表面張力の効果を考慮した p_1 と p_3 の平均圧力及び圧力差にそれぞれ相当する．上式では，代表長さ H，速度 U，時間 H/U，圧力 $\rho_2 U^2$ を用いて無次元化されており，また，無次元パラメータとして $\mathrm{Wb} = \rho_2 H U^2/\sigma_2$, $\rho = \rho_1/\rho_2$, $\sigma = \sigma_1/\sigma_2$ が導入されている．かくして問題は上の逓減された非線形方程式をを解くことに帰着される．

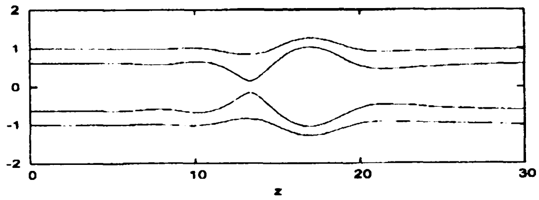
特に，無限に長い定常ジェットの場合，半径と流速が一定値をとり，$h_1 = \bar{h}_1$，$h_2 = \bar{h}_2$, $u_1 = \bar{u}_1$, $u_2 = \bar{u}_2$，$\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 0$, $p_1 = \bar{p}_1$ で与えられる．このとき，v_2 の式から $\Delta P = 0$ となるので，$\bar{p}_1$ は以下のように与えられる：

$$\bar{p}_1 = p_3 + \frac{1}{\mathrm{Wb}}\left(\frac{\sigma}{\bar{R} - \bar{b}/2} + \frac{1}{\bar{R}+\bar{b}/2}\right), \tag{6}$$

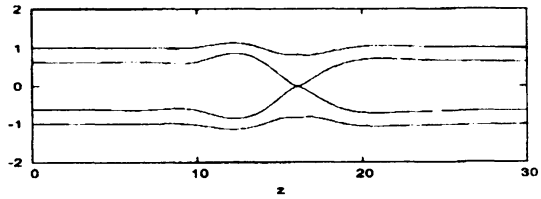
ここで，$\bar{R} = (\bar{h}_1 + \bar{h}_2)/2$，$\bar{b} = \bar{h}_2 - \bar{h}_1$．次節では，上で示した定常解に撹乱が加わった場合の初期値境界値問題の数値解を調べる．

3 数値解析結果

(a) $\bar{u}_1/\bar{u}_2 = 1.4$:

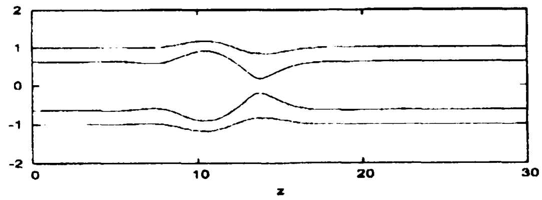


$\omega = 0.9$ ($\phi = 0, t_b = 16.41, z_b = 16.0$)

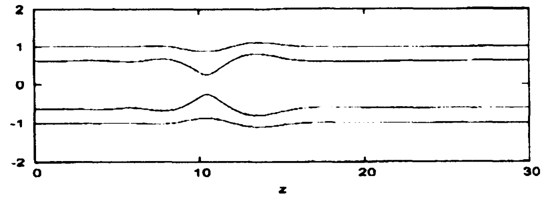


$\omega = 1.06$ ($\phi = \pi, t_b = 17.00, z_b = 13.4$)

(b)$\bar{u}_1/\bar{u}_2 = 4.2$:

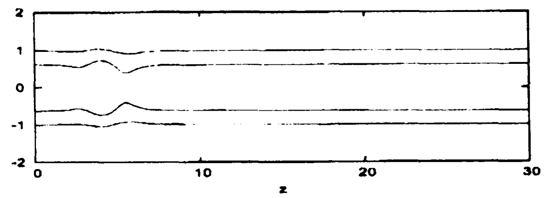


$\omega = 1.03$ ($\phi = 0, t_b = 13.68, z_b = 13.8$)

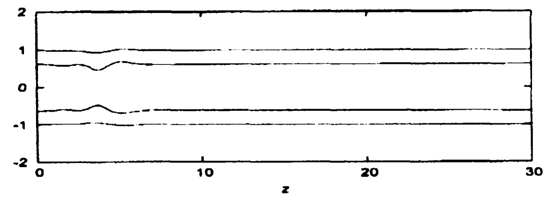


$\omega = 1.31$ ($\phi = \pi, t_b = 13.18, z_b = 10.4$)

(c) $\bar{u}_1/\bar{u}_2 = 12.6$:



$\omega = 2.11$ ($\phi = 0, t_b = 5.69, z_b = 5.4$)



$\omega = 2.61$ ($\phi = \pi, t_b = 5.23, z_b = 3.6$)

図 2: 速度比に対する崩壊形状.

Kendall [3] は，ジェットによる殻形成の典型的な形状を円筒部に対するコア部の三つの速度比 $\bar{u}_1/\bar{u}_2$ に対して示している．小さな速度比 ($\bar{u}_1/\bar{u}_2 = 1.4$) の場合，生成殻は分離せず長い液糸で結ばれているのに対し，大きな速度比 ($\bar{u}_1/\bar{u}_2 = 12.6$) では間隔が短すぎ団子状になり，この場合も生成殻は分離しない．しかし，最適な速度比 ($\bar{u}_1/\bar{u}_2 = 4.2$) の場合，形成殻は一つ一つ分離して現れることが示されている．

比較のために，実験で用いられた以下のパラメータに対して数値解析を行った：$\rho = 0.001$, $\sigma = 1$, $\bar{h}_2 = 1$, $\bar{h}_1 = 0.625$, Wb $= 32.5$. 解析の初期値境界値は，$z = 0, t \geq 0$ で u_1 のみに $u_1 = \bar{u}_1 + \eta \sin(\omega t + \phi)$ の撹乱を与え，他の変数には $\bar{u}_2 = 1, \bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 0$ のような定常解を用いる．また，速度 u_1 の‘跳び’が現れないよう $\phi = 0$ または π とする．計算では，速度比 $\bar{u}_1/\bar{u}_2$，振幅 η および位相 ϕ が与えられたとき，コア部半径が 0 になる (とみなせる) 時間 (又は距離) が最小とするような ω と，そのときの崩壊時間 t_b (又は崩壊距離 z_b) を求める．このようにして最も‘危険’な ω を求めることができるが，この ω が非線形の意味

で最も不安定な崩壊を引き起こす周波数であると考えられる．

図2は，$\eta = 0.005$，$\phi = 0, \pi$ に対して上で述べた ω を用いたとき得られる崩壊形状を示している．このとき，速度比のいずれの場合も初期位相 $\phi = \pi$ が崩壊位置 z_b を小さいくしているが，一般には常に $\phi = \pi$ とは限らないことを注意しておく．速度比が大きくなるほど崩壊近傍ではコア半径が急激に減少するため，コア半径が完全に0になる瞬間を時間刻み範囲内で捕らることはできていない．また，解析ではこの0コア半径は特異点となるためため，このような時間が決まったとしても有効とはいえない．それでも，その誤差は十分小さいため t_b はほぼ崩壊時刻とみなせることを注意しておく．このようにして，速度比が増加するにつれて t_b, z_b は共に小さくなる，すなわち，コア部流速が増加するにつれて，より早くよりノズルに近いところで崩壊が始まる．そして，そのような状況は実験結果と良く一致している．

実験での球殻形成は自然発生的であることから，ここでは，ノズル近傍で与えられた広い周波数範囲の攪乱のうち，ある特定の周波数による攪乱が球殻形成に関与すると予想できる．そして，この周波数は上で求めた最も危険な周波数 ω（二つの位相に対して崩壊距離 z_b が小さくなるほう）である．このことを確認するため，数値的に得られた ω と実験結果 [3] や現象論モデルによる結果 [5] との比較を行う．

図3は Wb = 26.9 で他のパラメータは図2の場合と同様に選んだときの速度比に対する球殻の形成周波数の変化を示している．計算では $\eta = 0.0005$(実線) と 0.05(破線) の場合に対して，z_b を最小とする位相の ω を求めている．η のどちらの場合も速度比が大きくなるにつれて ω も大きくなるが，η が大きいほど全体的に ω は大きなっている．実験による測定結果○印は $\eta = 0.05$ の場合とよく一致している一方，現象論モデルによる結果□は $\eta = 0.0005$ の結果とよく一致している．η の大きさはコア流速に加えられた攪乱の大きさであるので，より大きな攪乱は ω を大きくするといえる．このことは，コア流体の運動を考慮していない現象論的モデルの結果が η が小さい場合の数値解と一致することと矛盾しない．

さらに，Wb = 32.5 の図2と Wb = 26.9 の図3との比較からもわかるように，Wb が大きいほど不安定な周波数は減少する．このことは，表面張力による不安定性により球殻が形成されることから，表面張力が小さいほど形成周波数が下がることを意味している．以上の結果から，数値的に求めた周波数 ω が殻形成周波数を決定し，その周波数は速度比の増加するほど，また Wb 数が減少するほど増加することがわかる．

最後に形成される球殻の大きさについて考える．形成周波数 ω から形成周期長さ λ が $\lambda = 2\pi\bar{u}_2/\omega$ のように決定されることから，最終的に形成される球殻の体積は，コア部と円筒部の速度差を考慮した長さ λ の一様なジェットの体積にほぼ等しいと見積もることができる．その結果，形成された球殻の外半径を R_2，内半径を R_1 は以下のように与えられる：

$$[h]\frac{R_2}{\bar{h}_2} = \Big[\frac{3\lambda}{4\bar{h}_2}\big(\frac{\bar{h}_1^2}{\bar{h}_2^2}(\frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2} - 1) + 1\big)\Big]^{(1/3)}, \quad \frac{R_1}{\bar{h}_2} = \Big[(\frac{3\lambda}{4\bar{h}_2})(\frac{\bar{h}_1^2\bar{u}_1}{\bar{h}_2^2\bar{u}_2})\Big]^{(1/3)}. \tag{7}$$

図4に式(7)により得られた R_1, R_2 及び $\lambda/2$ の速度比に対する変化が示されている．図で η が大きい場合 (実線) のほうが λ の値が全体的に小さくなり (実線)，その結果形成される球殻半径も小さくなる (実線)．しかしながら，η のいずれの場合も速度比が大きくな

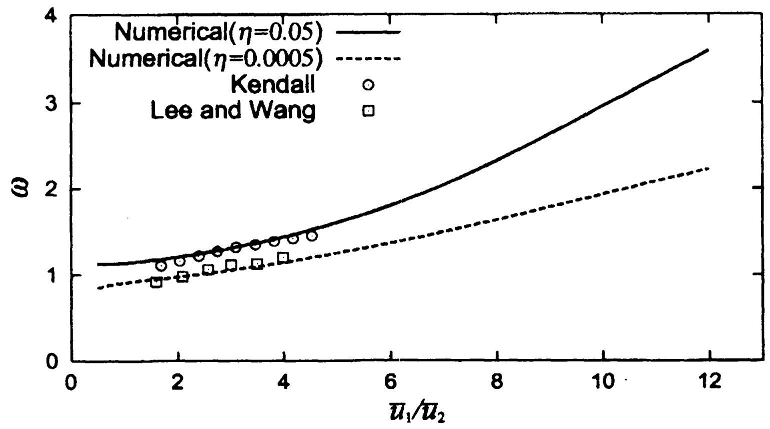


図 3: 速度比に対する殻形成周波数の変化.

ると球殻半径および厚みは一定値に近づく傾向にある. R_1, R_2 の実験値●, ○印および R_2 のモデルによる結果□印は, 共に数値計算結果とよい一致を示していることがわかる. 一方, 球殻形成周期長さ λ に関しては, 球殻が数珠繋ぎにならないためには少なくとも $\lambda/2 > R_1$ となることが必要がある. そのため, 球殻が分離して生成されるためには, 速度比は少なくともこれらの曲線が交差する位置での速度比よりも小さくなくてならないことがわかる. そのような臨界速度比は約 6 であり, その値以上では実験データが得られていないことからこの結果は妥当であるといえる.

4 結論

半無限ジェットにおける攪乱の非線形発展を調べることにより以下の結論を得る：

(i) ノズル出口で与える攪乱周波数に対してジェットの時空間発展を調べた結果, ジェットの最小崩壊時間 t_b(距離 z_b) を与える攪乱周波数 ω が存在する.

(ii) コアの円筒部に対する速度比および攪乱振幅が増加するにつれて ω は増加する. また, Wb が増加するにつれて ω は減少する.

(iii) ω を用いて得られる殻生成周期および殻半径は実験や現象論的モデルでの結果とうまく一致する.

このことから, ω はジェト崩壊を引き起こす非線形の意味での最も不安定な周波数であるといえる. このことは, ある特定の周波数攪乱が崩壊に最も寄与し, 殻形成周期や形成される殻形状はその周波数により決定される. それゆえ, 複合ジェットにおける殻形成メカニズムは非線形不安定を調べることにより説明できる.

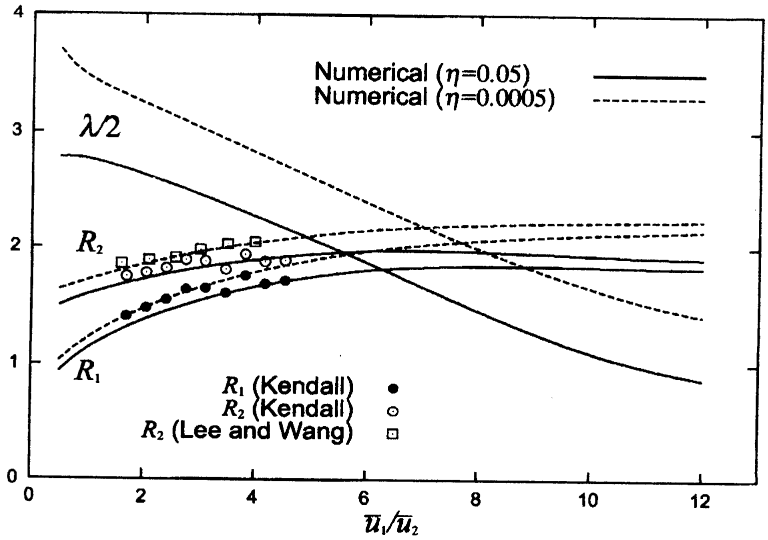


図 4: 速度比に対する球殻形成波長 λ と球殻の外半径 R_1 と内半径 R_2.

参考文献

[1] Lefebvre, A.H., *Atomization and sprays* (Hemisphere, New York, 1989).

[2] Lin, S. P., *Breakup of liquid sheets and jets* (Cambridge, 2003) pp.172-200.

[3] Kendall, J. M., "Experiments on annular liquid jet instability and on the formation fo liquid shells," Phys. Fluids, **29**, 2086 (1986).

[4] Lee, C. P. and Wang, T. G., "A theoretical model for the annular jet instability," Phys. Fluids **29**, 2076 (1986).

[5] Lee, C. P. and Wang, T. G., "A theoretical model for the annular jet instability-Revisited," Phys. Fluids **A 1**, 967 (1989).