数理解析研究所講究録
第 1648 巻 2009 年 53-56

正則直線束に関するベルグマン核について

九州大学大学院数理学研究院　神本　丈 (Joe Kamimoto)
Faculty of Mathematics, Kyushu University

M を n 次元コンパクトケーラー多様体とし，$(L,h)\to M$ を正則直線束とし，L^N を L の N 回テンソル積とする．最近，複素幾何学の多くの問題が，$N\to\infty$ としたときの L^N の正則切断の解析に関連させることにより解決されている．このことは，多変数複素解析学において，正則関数の境界挙動の解析が重要であることと対応している．この論説では，Zelditch [6] と Catlin [2] らにより得られた漸近展開を紹介し，その結果に類似するものとして，半正定値の場合について考える．

1. Tian-Yau-Zeldtich の漸近展開

この節では，$(L,h)\to M$ は正のエルミート正則直線束であると仮定する．g を M 上のケーラー計量とし，$\omega_g := \mathrm{Ric}(h)$ とする．$N\in\mathbb{N}$ に対して，h は L^N 上のエルミート計量 h_N を誘導する．正則切断全体 $H^0(M,L^N)$ に内積

$$\langle s_1,s_2\rangle=\int_M h_N(s_1(z),s_2(z))dV_g \quad \text{for } s_1,s_2\in H^0(M,L^N)$$

$(dV_g=1/n!\omega_g^n)$ を入れると，$H^0(M,L^N)$ は有限次元の内積空間となる．その次元を d_N+1 とする．$\{S_0^N,\dots,S_{d_N}^N\}$ を $H^0(M,L^N)$ の正規直交基底とするとき，L^N の切断 $K_N(z)$ を次のように定義する．

$$K_N(z)=\sum_{j=0}^{d_N}\|S_j^N(z)\|_{h_N}^2=\sum_{j=0}^{d_N}h_N(S_j^N(z),S_j^N(z)).$$

$K_N(z)$ を $H^0(M,L^N)$ のベルグマン核と呼ぶ．次の定理は，Tian-Yau-Zelditch の漸近展開と呼ばれるもので，最近，複素幾何学の様々な問題に応用されている．

定理 1 ([5],[6],[2]).

$$K_N(z)\sim N^n\left(a_0+\frac{a_1(z)}{N}+\frac{a_2(z)}{N^2}+\cdots\right)\quad as\ N\to\infty.$$

上の定理の $\sim$ の意味を正確に書くと次のようになる．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，ある定数 $C_{R,k} > 0$ が存在して，次が成り立つ．

$$\left\| K_N(z) - \sum_{j=0}^{R-1} a_j(z) N^{N-j} \right\|_{C^k} \leq C_{R,k} N^{n-R}.$$

上の漸近展開は，有界強擬凸領域のベルグマン核とセゲー核の領域の定義関数に関する漸近展開に対応している．それらの漸近展開は，C. Fefferman [3] や Boutet de Monvel-Sjöstrand [1] らにより計算されている．[1] では，ベルグマン核とセゲー核をフーリエ積分作用素を用いて表し，シンボルの漸近展開が，目的の漸近展開を導くことを示している．Zelditch [6] と Catlin [2] は，幾何学的な議論により，定理の $K_N(z)$ の漸近展開がまさしくそのシンボルの漸近展開にあたることを示した．

2. 半正定値の場合

この節では，前節の場合を一般化して，(L, h) の曲率形式が半正定値となる場合を考えよう．この場合は，新たに特異点論的な議論が必要となる．以下に，ニュートン図形などの概念が現れるが，それらの説明は次の節で行う．

半正定値な場合で，正定値性が失われているような点におけるベルグマン核の漸近展開は，私が知る限り現在までのところ得られていない．ここでは，M 全体に関する大域的な場合は難しいので，局所的な場合について考える．

U を M 上の小さな領域とし，固定しておく．このとき，正則切断全体 $H^0(U, L^N)$ に内積

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_U h_N(s_1(z), s_2(z)) dV$$

を入れる．ただし，dV は U 上の局所座標に関する標準的な体積要素とする．$\{S_k^N\}_{k=0}^{\infty}$ を $H^0(U, L^N)$ の完全正規直交系とするとき，$H^0(U, L^N)$ の局所ベルグマン核を次で定義する．

$$\tilde{K}_N(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \|S_j^N(z)\|_{h_N}^2.$$

z_0 を M 上の点とし，その小さな開近傍 U をとる．L 上に曲率形式が半正定値となる計量 h を考えるわけであるが，次が成り立つように U 上に局所座標を導入する．z_0 を原点とし，U 上の実数値関数 $\varphi(z)$ が存在して，$h(z) = e^{-\varphi(z)}$ かつ $\varphi(0) = d\varphi(0) = 0$ をみたす．さらに，φ に次の条件 (a),(b),(c) を仮定する．

(a) $\varphi(e^{i\theta_1} z_1, \ldots, e^{i\theta_1} z_n) = \varphi(z)$ for $z \in U, \theta_j \in \mathbb{R}$.

上の条件により，$\varphi(z)$ は $|z_1|, \ldots, |z_n|$ により決まる関数である．よって，$\mathbb{R}_+^n$ 上の関数 f を，$f(|z_1|, \ldots, |z_n|) = \varphi(z)$ となるように定める．

(b) f のニュートン図形はどの座標軸とも交わる.

この条件は, (D'Angelo の意味での)「有限型」に対応するものである.

(c) f は非退化な主要部を持つ.

この条件は, ニュートン図形が, 重要な情報をもつことを保障するものである.

以上を $(L, h) \to M$ に仮定したとき, 次が得られる.

定理 2.

$$\tilde{K}_N(z_0) \sim \frac{N^{2/d_f}}{(\log N)^{m_f-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=(m_f-n)j}^{\infty} a_{j,k}(z_0) N^{-j/m} (\log N)^{-k} \quad as\ N \to \infty.$$

ただし, d_f, m_f の定義は次の節にある. 初項 $a_{0,0}(z_0)$ は f の主要部のみにより決まる正の数である. $m \in \mathbb{N}$ は, 原点を f の孤立特異点とみなしたときに, トーリック多様体の理論を用いた特異点解消によるプロセスから決まる数である.

上の定理は, 論文 [4] の Theorem 3.6 に対応している. 証明も本質的にその論文の中にある. また, 漸近展開の意味であるが, 2変数の漸近展開とみなさなければならない. 詳しくは, 同論文 [4] を参照のこと.

3. ニュートン図形

ここでは, 前の節で使ったニュートン図形に関する概念について説明する.

f を $\mathbb{R}^n$ 内の領域 U 上で定義された実数値 C^∞ 関数とする. さらに, f は原点で孤立臨界点を持ち, (i.e. $df(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$), $f(0) = 0$ を仮定する.

f は原点で次のようなテーラー級数展開を持つとする.

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha x^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

ここで, 指数の集合として, f の**台**を $S_f = \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n; c_\alpha \neq 0\}$ と定めると, f の**ニュートン多角形**は次のように定義される.

$$\Gamma_+(f) = \bigcup \{\alpha + \mathbb{R}_+^n; \alpha \in S_f\} \text{ の } \mathbb{R}_+^n \text{ における凸包.}$$

f の**ニュートン図形** $\Gamma(f)$ は, ニュートン多角形 $\Gamma_+(f)$ のコンパクトな面の集合とする. さらに, f の**主要部**は,

$$f_0(x) = \sum_{\alpha \in \Gamma(f)} c_\alpha x^\alpha$$

で定義される多項式である.

直線 $\{(d,\ldots,d); d\in\mathbb{R}\}$ とニュートン図形 $\Gamma(f)$ の交わる点を Q とする．f の**ニュートン距離** d_f は，Q の座標 $(d_f,\ldots,d_f)$ により決まる正の実数である．さらに，**ニュートン多重度** m_f は，点 Q に集まる $\Gamma(f)$ 上の $n-1$ 次元平面の数を表す．

$\Gamma(f)$ 上の任意の平面 γ に対して，$(\mathbb{R}\setminus\{0\})^n$ 上 $df_\gamma=0$ とならないとき，f は**非退化な主要部を持つ**という．ただし，$f_\gamma(x):=\sum_{\alpha\in\gamma}c_\alpha x^\alpha$ とする．

注意：前の節では，$\mathbb{R}^n_+$ 上での議論であったが，原点でのテーラー展開を考えて，$\mathbb{R}^n$ 上に拡張すればよい．

References

[1] L. Boutet de Monvel and J. Sjöstrand: Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö, Soc. Math. de France Astérisque **34-35** (1976), 123–164.

[2] D. Catlin: The Bergman kernel and a theorem of Tian, Analysis and geometry in several complex variables, Katata, 1997, Trends in Math, Boston, NY: Birkhäuser, 1999, 1–23.

[3] C. Fefferman: The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains, Invent. Math. **26** (1974), 1–65.

[4] J. Kamimoto: Newton polyhedra and the Bergman kernel, Math. Z. **246** (2004), 405–440.

[5] G. Tian: On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds, J. Differential Geom. **32** (1990), 99–130.

[6] S. Zelditch: Szegö kernels and a theorem of Tian, Int. Math. Res. Not. **6** (1998), 317–331.