数理解析研究所講究録
第 1648 巻 2009 年 57-67

Degenerated Schlesinger Systems from the Viewpoint of Twistor Theory

Hironobu KIMURA (Kumamoto University: 木村 弘信, 熊本大学)
and
Damiran TSEVEENAMIJIL (Mongolian State University of Education)

§1. はじめに

2 階非線型微分方程式

$$q'' = R(t, q, q'), \quad (R \text{ は } q,\ q' \text{ について有理的})$$

のなかで，動く分岐点を持たないものとして，6 個の Painlevé 方程式 $P_{\mathrm{I}}, \ldots, P_{\mathrm{VI}}$ が得られ，またそれらは，$\mathbb{P}^1$ 上の 2 階線形常微分方程式の monodromy 保存変形によって得られることは良く知られている．これらはある種の極限操作によって P_{VI} からすべて得ることができ，その退化の scheme は

(1)

$$\begin{tikzcd}
 & & P_{\mathrm{III}} \arrow[dr] & & \\
P_{\mathrm{VI}} \arrow[r] & P_{\mathrm{V}} \arrow[ur] \arrow[dr] & & P_{\mathrm{II}} \arrow[r] & P_{\mathrm{I}} \\
 & & P_{\mathrm{IV}} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

というダイアグラムで表わされる．良く知られているように，Painlevé 方程式達は，それらに含まれるパラメータがある特別な値をとるときに (従って P_{I} は除く) Riccati 方程式の解で表わされる特殊解を持ち，それらは Gauss の超幾何関数とその合流型関数である Kummer, Bessel, Hermite (-Weber), Airy 関数の log 微分で与えられる．

(2)

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{Bessel} \arrow[dr] & \\
\text{Gauss} \arrow[r] & \text{Kummer} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{Airy} \\
 & & \text{Hermite} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

一方，Painlevé 方程式とは独立に，これらの超幾何関数の一族は Grassmann 多様体 Gr(2, 4) 上で定義された一般超幾何関数として理解され，この一般超幾何関数は GL(4) のある極大可換部分群を指定することによってすべて統一的に扱われる．これらのダイアグラム (1), (2) には 4

の分割達についてのダイアグラム

$$
(3)\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & 2+2 \arrow[dr] & \\
1+1+1+1 \arrow[r] & 2+1+1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 4 \\
 & & 3+1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

が対応する．

この 4 の分割の意味を P_{VI} についてもっと詳しく説明しよう．P_{VI} は，他の Painlevé 方程式と同様に，Hamilton 方程式

$$
\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p},\quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q} \tag{4}
$$

の形に書くことができる．ここで，Hamiltonian H は

$$
\begin{aligned}
t(t-1)H = q(q-1)(q-t)p^2 - \{&\kappa_0(q-1)(q-t) \\
&+\kappa_1 q(q-t)+(\kappa_t-1)q(q-1)\}p-\kappa(q-t)
\end{aligned} \tag{5}
$$

で与えられる．この方程式に対して 4 の分割 $1+1+1+1$ を対応させるのは，P_{VI} が $\mathbb{P}^1$ 上の 2 階線型常微分方程式

$$
\begin{aligned}
y''&+\left(\frac{1-\kappa_0}{x}+\frac{1-\kappa_1}{x-1}+\frac{1-\kappa_t}{x-t}-\frac{1}{x-q}\right)y' \\
&+\left(\frac{\kappa}{x(x-1)}-\frac{t(t-1)H}{x(x-1)(x-t)}+\frac{q(q-1)p}{x(x-1)(x-q)}\right)y=0
\end{aligned} \tag{6}
$$

の monodromy 保存変形を記述していることによる．実際，方程式 (6) は $\mathbb{P}^1$ 上に 4 個の確定特異点 $x=0,1,t,\infty$ を持ち，そこにおける特性指数は次の Riemann scheme で与えられる．

$$
\begin{bmatrix}
x=0 & x=1 & x=t & x=\infty & x=q \\
0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\
\kappa_0 & \kappa_1 & \kappa_t & \alpha+\kappa_\infty & 2
\end{bmatrix}
$$

ここで α は Fuchs の関係式

$$
2\alpha+\kappa_0+\kappa_1+\kappa_t+\kappa_\infty+2=3
$$

で定まり，$x=q$ は見掛けの特異点，すなわち微分方程式の解がこの特異点の近傍で 1 価となるものである．$x=q$ が見掛けの特異点であるという条件から，H は (5) の形に決まる．このとき P_{VI} が方程式 (6) の monodromy 保存変形で得られるという意味は次の通りである．

$X=\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,t,\infty\}$ に 1 点 x_0 をとり，これを固定する．x_0 における基本解 $Y(x)$ をとる．このとき $Y(x)$ に付随する monodromy 表現 $\rho\colon \pi_1(X,x_0)\to \mathrm{GL}(2)$ が $\gamma\in\pi_1(X,x_0)$ に沿った $Y(x)$ の解析接続 γ_*Y を再び Y を用いて表すときに

$$
\gamma_*Y=Y\cdot\rho(\gamma)
$$

によって定まる $\rho(\gamma)\in\mathrm{GL}(2)$ を γ の定める基本群の元に対応させることによって定まる．いま，t を $t=t_0$ の近傍で変化させたときに，基本群 $\pi_1(X,x_0)$ の生成元は t_0 のときのものと同じものがとれるが，Y は t に依存して変化し，従ってその monodromy 表現行列も t に依存して連続的に変わりうる．このとき次が知られている．

定理 1.1. $(q(t),p(t))$ が P_{VI} を満たすための必要十分条件は x_0 におけるある基本解 Y が存在してそれにより定まる monodromy 表現行列が t に依存しないことである.

以上が P_{VI} に 4 の分割 $1+1+1+1$ が対応する理由である. P_{VI} に対応する 4 の分割が $2+1+1$ であることは, monodromy 保存変形において変形される線形方程式が, Poincaré rank 1 の不確定特異点 1 個と 確定特異点 2 個を持つことを表わしている.

一方, 一般超幾何関数の場合には, 4 の分割は GL(4) (あるいは $\mathfrak{gl}(4)$) の正則元の集合に入る自然な stratification の stratum を指定するデータを表わしている. この正則元のなかで Jordan 標準形の形をしているものを考え, その中心化部分群をとると上に述べた極大可換部分群が得られるのである (詳しくは §2 を見よ). したがって Painlevé 方程式と一般超幾何関数の場合では, 4 の分割の意味は異なっている.

この 2 つの状況を結び付けたのは Mason と Woodhouse [2] である. 彼らは, 反自己双対 Yang-Mills 方程式の解で一般超幾何関数の構成に現れる群によって不変なものが, 群を指定する分割に対応する Painlevé 方程式の解であることを示した. 更に [3] では, Schlesinger 系も, 一般化された反自己双対 Yang-Mills 方程式の特殊解として得られることを Twistor 理論の Ward 対応を用いて示している. 関連した仕事で, 日本人によるものとしては, 川向・新田 [1], 増田 [4], 村田 [5], 大山 [6] の各氏のものがある.

さて, このような状況で, 一般超幾何関数について知られていることを, Schlesinger 系およびその退化した系に対して実現できないだろうかと考えるのは自然な期待であろう. たとえば一般超幾何関数に対しては合流の操作が構成されているし, "Kummer の 24 個の解" を与える Gauss の超幾何方程式の対称性に相当するものや, Kummer の合流超幾何関数の第 2 変換公式は, 一般化された意味の Weyl 群の作用によるものと理解することができる. 合流は, たとえば Gauss の超幾何の場合でいうと, $\mathfrak{gl}(4)$ の正則元のなす集合に入る stratification の strata の隣接関係の実現と理解することができる. ただ, この合流操作は古典的な超幾何関数の level では非常に見通しの悪いものになっている. その理由の一つは, 例えば Gauss の超幾何関数に対応する一般超幾何関数は Grassmann 多様体の開集合である商空間 $\mathrm{GL}(2)\backslash Z$ (Z は任意の 2-minor が 0 でない 2×4 行列全体) で定義されているが[1], Gauss の超幾何関数自身は, その商空間である $\mathbb{P}^1$ 上の一般の位置にある 4 点の配置のなす空間 $\mathrm{GL}(2)\backslash Z/H$ ($H\subset \mathrm{GL}(4)$ は対角行列からなる Cartan 部分群) の一つの実現の上で定義されていることにある. 対称性ついても同様のことが言える.

そこで, 本稿では, Schlesinger 方程式 (Painlevé 方程式も含む) とその退化した方程式を Grassmann 多様体上で定義されたものと見るにはどのようにするかということを考察したい. この formulation を用いて Schlesinger 方程式に対する合流の操作や対称性の群については機会を改めて論じる.

§2. GL($N+1$) の正則元と極大可換部分群

$G=\mathrm{GL}(N+1)$ とおく. G の自分自身への随伴作用

$$\mathrm{Ad}_g\colon G\to G,\quad a\mapsto \mathrm{Ad}_g(a)=gag^{-1}$$

[1]というより, むしろ Z 上で定義されていると見た方が都合が良いと思う

を考える．この作用による $a \in G$ の軌道を $O(a)$, 固定化部分群を $Z_G(a)$ と書く．

$$O(a) = \{gag^{-1} \in G \mid g \in G\},$$
$$Z_G(a) = \{g \in G \mid \mathrm{Ad}_g(a) = a\} = \{g \in G \mid ga = ag\}.$$

群 $Z_G(a)$ は a と可換な G の元全体からなる部分群，つまり a の中心化部分群である．$O(a)$ と $Z_G(a)$ は共に複素多様体で $\dim G = \dim O(a) + \dim Z_G(a)$ である．

定義 2.1. $a \in G$ が正則元であるとは，$\dim O(a)$ が最大になること，すなわち $\dim Z_G(a)$ が最小の値 $N+1$ になること．

命題 2.2. $a \in G$ が正則元であるための必要十分条件は a の Jordan 標準形の Jordan 細胞の固有値がすべて相異なることである．すなわちある $N+1$ の分割 $\lambda = (n_1, \dots, n_\ell)$ が存在して a は次の 形の行列に相似である．

$$a \sim \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_\ell \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} a_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a_k \end{pmatrix}, \quad a_i \neq a_j.$$

命題 2.3. $a \in G$ が命題 2.2 の Jordan 標準形の形をしているとする．このとき a の固定化部分群は

$$Z_G(a) = J(n_1) \times \cdots \times J(n_\ell) \tag{7}$$

である．ここで

$$J(n) = \left\{ \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & h_1 \\ & & & h_0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{GL}(n) \tag{8}$$

は n 次の Jordan 群と呼ばれる．(8) で与えられる元を $[h_0, h_1, \dots, h_{n-1}]$ で表わす．

命題 2.3 において正則元の中心化群として現れる群は，Jordan 標準形を定める $N+1$ の分割 λ にのみ依存して決まる．そこで，以下，この群を H_λ と表わすことにする．H_λ は G の極大可換部分群である．

さて，群 H_λ の構造を明確にするために，ある関数系を導入しておく．

定義 2.4. T を不定元とする．このとき $x = (x_0, x_1, \dots)$ の関数 $\theta_m(x)$ を

$$\log(x_0 + x_1 T + x_2 T^2 + \cdots) = \sum_{m=0}^{\infty} \theta_m(x) T^m \tag{9}$$

によって定める．

関数 $\theta_m(x)$ のいくつかを書いてみれば

$$\begin{aligned}
\theta_0(x) &= \log x_0,\\
\theta_1(x) &= \frac{x_1}{x_0},\\
\theta_2(x) &= \frac{x_2}{x_0} - \frac{1}{2}\Big(\frac{x_1}{x_0}\Big)^2,\\
\theta_3(x) &= \frac{x_3}{x_0} - \Big(\frac{x_1}{x_0}\Big)\Big(\frac{x_2}{x_0}\Big) + \frac{1}{3}\Big(\frac{x_1}{x_0}\Big)^3,\\
\theta_4(x) &= \frac{x_4}{x_0} - \frac{1}{2}\Big\{\Big(\frac{x_2}{x_0}\Big)^2 + 2\Big(\frac{x_1}{x_0}\Big)\Big(\frac{x_3}{x_0}\Big)\Big\} + \Big(\frac{x_1}{x_0}\Big)^2\Big(\frac{x_2}{x_0}\Big) - \frac{1}{4}\Big(\frac{x_1}{x_0}\Big)^4.
\end{aligned}$$

となる．このとき $J(n)$ の構造は以下のように記述される．

命題 2.5. 写像 $J(n) \to \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^{n-1}$ を

$$[h_0, h_1, \dots, h_{n-1}] \mapsto (h_0, \theta_1(h), \dots, \theta_{n-1}(h))$$

と定義すると，これは群同型を与える．ただし，$\mathbb{C}^{n-1}$ は通常のベクトルの和についての加法群を表わす．

§3. Twistor 理論と Monodromy 保存変形

N 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^N$ の斉次座標を $x = (x_0, x_1, \dots, x_N)$ とする．$[x]$ で斉次座標 x を持つ点を表わす．

定義 3.1. 群 H_λ の $\mathbb{P}^N$ への右からの作用 $\mathbb{P}^N \times H_\lambda \to \mathbb{P}^N$ を

$$([x], h) \mapsto [xh] \tag{10}$$

で定義する．

分割 $\lambda = (n_1, \dots, n_\ell)$ に応じて，斉次座標 x をブロックに分けて

$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(\ell)}), \quad x^{(k)} = (x_0^{(k)}, \dots, x_{n_k-1}^{(k)}) \tag{11}$$

と表わせば、$h = (h^{(1)}, \dots, h^{(\ell)})$, $h^{(k)} \in J(n_k)$ の作用は

$$[xh] = [x^{(1)}h^{(1)}, \dots, x^{(\ell)}h^{(\ell)}]$$

と書かれる．

定理 3.2. 開集合 $U \subset \mathbb{P}^N$ と rank が r の正則ベクトル束 $\pi\colon E \to U$ で次の性質をみたすものがあるとする．

(1) U は H_λ の作用で不変 $(x \in U, g \in H \to xg \in U)$ である．
(2) H_λ の無限小作用は E に持ち上げることができる．

このとき H_λ の E への無限小作用は E における平坦な接続 ∇ を定める．局所的に ∇ は次のように表わせる．

$$\nabla = d - \Big(\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=0}^{n_k-1} A_j^{(k)}(x)\, d\theta_j(x^{(k)})\Big)\wedge \tag{12}$$

次に，この平坦接続と monodromy 保存変形と結び付けることを考える．

分割 λ に応じて $z\in \mathrm{Mat}(2,N+1)$ を

$$z=(z^{(1)},\dots,z^{(\ell)}),\quad z^{(k)}=(z_0^{(k)},\dots,z_{n_k-1}^{(k)})\in \mathrm{Mat}(2,n_k)$$

と表す．$\mathrm{Mat}(2,N+1)$ の開集合 Z を

$$Z=\left\{z\in \mathrm{Mat}(2,N+1)\;\middle|\;\begin{matrix}\det(z_0^{(k)},z_1^{(k)})\neq 0,\\ \det(z_0^{(k)},z_0^{(l)})\neq 0\end{matrix}\quad (1\le k\neq l\le \ell)\right\}$$

と定める．さらに、正則写像 $\Phi\colon \mathbb{P}^1\times Z\to \mathbb{P}^N$ を

$$([\zeta],z)\mapsto [\zeta z]=[\zeta z^{(1)},\dots,\zeta z^{(\ell)}] \tag{13}$$

によって定義する．ここで $\zeta=(\zeta_0,\zeta_1)$ を $\mathbb{P}^1$ の斉次座標である．$\vec{\zeta}=(1,\zeta)$ という記号も用いる．

定理 3.3. $U\in\mathbb{P}^N$ はある line を含む開集合とし，$\pi\colon E\to U$ を U 上の rank r の正則ベクトル束で次の性質を満たすものとする．

(1) U は群 H_λ の $\mathbb{P}^N$ への作用で不変である．
(2) H_λ の U への作用はベクトル束 E への無限小作用に持ち上がる．
(3) E は U に含まれる line 上自明である．

このとき，E の無限小作用から得られる E の平坦接続 ∇ は，写像 $\Phi\colon\mathbb{P}^1\times Z\to\mathbb{P}^N$ によって得られる Φ^*E 上の平坦接続 $\Phi^*\nabla$ によって次の形の微分方程式の monodromy 保存変形を与える．

$$\frac{dy}{d\zeta}=\Big(\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=0}^{n_k-1}A_j^{(k)}(z)\frac{d\theta_j(\vec{\zeta}z^{(k)})}{d\zeta}\Big)y. \tag{14}$$

注意 3.4. Mason と Woodhouse の論文 [2], [3] では，定理 3.2, 3.3 に相当する命題が，∇ の具体的な形 (12) と方程式 (14) 抜きで述べられている．具体的な表示としては，以下で述べる Schlesinger 方程式のみが扱われている．合流等の議論をするときに 定理 3.2, 3.3 が重要になる．

命題 3.5. 方程式 (14) の monodromy 保存変形は $\mathbb{P}^1\times Z$ 上の平坦接続

$$\Phi^*\nabla=d-\Big(\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=0}^{n_k-1}A_j^{(k)}(z)d\theta_j(\vec{\zeta}z)\Big)\wedge \tag{15}$$

によって与えられる．

§4. いくつかの例の導出

ここでは命題 3.5 を用いて Painlevé 方程式や Schlesinger 方程式を導いて見よう．

§4.1. Schlesinger 系. $N+1$ の分割として $\lambda=(1,\dots,1)$ をとる．さらに $Z\subset \mathrm{Mat}(2,N+1)$ の部分集合

$$Z'=\left\{z=\begin{pmatrix}-t_0 & -t_1 & \dots & -t_N\\ 1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}\,\middle|\, t_i\neq t_j \quad (i\neq j)\right\}$$

を考える．λ に対応する群 $H=H_\lambda$ は対角行列からなる G の Cartan 部分群で，H は Z に作用する．この作用による商空間 Z/H を考えると Z' はこの一つの実現になっている．写像 $\Phi\colon \mathbb{P}^1\times Z'\to\mathbb{P}^N$ を

$$([\zeta],z)\mapsto[\zeta z]=(\zeta z_0:\dots:\zeta z_N) \tag{16}$$

で定義する．定理 3.3 の平坦接続を ∇ とし，この写像によって $\mathbb{P}^1\times Z'$ によって引き戻したもの $\Phi^*\nabla=d-\Phi^*\omega\wedge$ の接続行列 $\Phi^*\omega$ は local に

$$\Phi^*\omega=\sum_{j=0}^{N}\widetilde{A}_j(t)d\log(\zeta-t_j),\qquad \sum_i A_i=0$$

と書かれる．以下面倒なので $\widetilde{A}_j$ も単に A_j と書く．従って，この接続が平坦である条件は $\Phi^*(d\omega-\omega\wedge\omega)=0$ で与えられ，それは Schlesinger 系

$$dA_i+\sum_{j\neq i}[A_i,A_j]\frac{dt_i-dt_j}{t_i-t_j}=0,\quad (i=0,\dots,N) \tag{17}$$

である．

§4.2. Painlevé P_{VI}. ここでは P_{VI} と同等な Schlesinger タイプの方程式のみを導こう．方針は一般の Schlesinger 系と同様である．$N+1=4$ で，その分割が $\lambda=(1,1,1,1)$ で与えられる場合を考える．λ に対応する極大可換部分群は 4 次の Cartan 部分群である．$Z\subset\mathrm{Mat}(2,4)$ の部分集合

$$Z'=\left\{z=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -t\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\,\middle|\, t\neq 0,1,\infty\right\}$$

を考える．Z' は $\mathbb{P}^1$ の一般の位置にある 4 点の配置空間 $\mathrm{GL}(2)\backslash Z/H$ の一つの実現である．写像 $\Phi\colon\mathbb{P}^1\times Z'\to\mathbb{P}^3$ を §4.1 のように定義すると，$\Phi^*\nabla$ の接続行列は local に

$$\Phi^*\omega=A_1\frac{d\zeta}{\zeta}+A_2\frac{d\zeta}{\zeta-1}+A_3\frac{d\zeta-dt}{\zeta-t}$$

で与えられる．この接続の平坦性条件 $\Phi^*\nabla^2=0$ は連立方程式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial y}{\partial\zeta}=\left(\dfrac{A_1}{\zeta}+\dfrac{A_2}{\zeta-1}+\dfrac{A_3}{\zeta-t}\right)y\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial t}=-\dfrac{A_3}{\zeta-t}y\end{cases}$$

の両立条件と同じものである．具体的には

$$\frac{dA_1}{dt}=\frac{[A_3,A_1]}{t},\quad \frac{dA_2}{dt}=\frac{[A_3,A_2]}{t-1},$$
$$\frac{dA_3}{dt}=\frac{[A_1,A_3]}{t}+\frac{[A_2,A_3]}{t-1}.$$

これから

$$A_1 + A_2 + A_3 = -A_4$$

が定数行列であることが従う．すなわち $\zeta = \infty$ の係数行列 A_4 が t に依らないという条件である．

§ 4.3. Painlevé P_{V}. 4 の分割が $(2,1,1)$ の場合を考える．対応する極大可換部分群 $H = H_{(2,1,1)}$ は

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & & \\ & h_0 & & \\ & & h_2 & \\ & & & h_3 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{GL}(4).$$

$Z \subset \mathrm{Mat}(2,4)$ の部分集合

$$Z' = \left\{ z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \neq 0, \infty \right\}$$

を考える．Z' は $\mathbb{P}^1$ の点の配置空間の類似である $\mathrm{GL}(2)\backslash Z/H_{(2,1,1)}$ の一つの実現である．写像 $\Phi \colon \mathbb{P}^1 \times Z' \to \mathbb{P}^3$ を § 4.1 のように定義する．すなわち

$$(\zeta, z) \mapsto (1 : \zeta : \zeta : \zeta + t).$$

この写像によって $\mathbb{P}^3$ 上の平坦接続

$$\nabla = d - (A_0 d\log x_1 + A_1 d\theta_1 + A_2 d\log x_2 + A_3 d\log x_3)\wedge$$

を引き戻して得られる $\Phi^*\nabla$ の接続行列は local に

$$\Phi^*\omega = A_1 d\zeta + A_2 \frac{d\zeta}{\zeta} + A_3 \frac{d\zeta + dt}{\zeta + t}$$

で与えられる．この接続の平坦性条件 $\Phi^*\nabla^2 = 0$ は連立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} = \Big(A_1 + \dfrac{A_2}{\zeta} + \dfrac{A_3}{\zeta + t}\Big) y \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{A_3}{\zeta + t} y \end{cases}$$

の両立条件と同じものである．具体的には

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= 0, \\ \frac{dA_2}{dt} &= \frac{[A_3, A_2]}{t}, \\ \frac{dA_3}{dt} &= [A_3, A_1] - \frac{[A_3, A_2]}{t}. \end{aligned}$$

を得る．これは P_{V} と同値な方程式であることが知られている ([1], [5]).

§4.4. Painlevé P_{IV}. 4 の分割が $(3,1)$ の場合を考える．対応する極大可換部分群 $H=H_{(3,1)}$ は

$$H=\left\{\begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \\ & h_0 & h_1 & \\ & & h_0 & \\ & & & h_3 \end{pmatrix}\right\}\subset \mathrm{GL}(4)$$

で $Z\subset \mathrm{M}(2,4)$ の部分集合

$$Z'=\left\{z=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\;\middle|\; t\neq\infty\right\}$$

を考える．Z' は $\mathbb{P}^1$ の点の配置空間の類似である $\mathrm{GL}(2)\backslash Z/H_{(3,1)}$ の一つの実現である．写像 $\Phi\colon \mathbb{P}^1\times Z'\to\mathbb{P}^3$ を §4.1 のように定義する．すなわち

$$(\zeta,z)\mapsto(1:\zeta:0:\zeta+t).$$

この写像によって $\mathbb{P}^3$ 上の平坦接続

$$\nabla=d-(A_0 d\log x_0+A_1 d\theta_1+A_2 d\theta_2+A_3 d\log x_3)\wedge$$

を $\mathbb{P}^1\times Z'$ に引き戻して得られる $\Phi^*\nabla$ の接続行列は local に

$$\Phi^*\omega=A_1 d\zeta-A_2\zeta d\zeta+A_3\frac{d\zeta+dt}{\zeta+t}$$

で与えられる．この接続の平坦性条件 $\Phi^*\nabla^2=0$ は連立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial\zeta}=\Big(A_1-\zeta A_2+\dfrac{A_3}{\zeta+t}\Big)y \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}=\dfrac{A_3}{\zeta+t}y \end{cases}$$

の両立条件と同じものである．具体的には

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt}&=[A_2,A_3],\\ \frac{dA_2}{dt}&=0,\\ \frac{dA_3}{dt}&=[A_3,A_1+tA_2] \end{aligned}$$

を得る．これは P_{IV} と同値な方程式であることが知られている ([1], [5]).

§4.5. Painlevé P_{III}. 4 の分割が $(2,2)$ の場合を考える．対応する極大可換部分群 $H=H_{(2,2)}$ は

$$H=\left\{\begin{pmatrix} h_0 & h_1 & & \\ & h_0 & & \\ & & h_2 & h_3 \\ & & & h_2 \end{pmatrix}\right\}\subset \mathrm{GL}(4)$$

で $Z \subset M(2,4)$ の部分集合

$$Z' = \left\{ z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \neq 0, \infty \right\}$$

を考える．Z' は $\mathbb{P}^1$ の点の配置空間の類似である $\mathrm{GL}(2)\backslash Z/H_{(2,2)}$ の一つの実現である．写像 $\Phi\colon \mathbb{P}^1 \times Z' \to \mathbb{P}^3$ を §4.1 のように定義する．すなわち

$$(\zeta, z) \mapsto (1 : \zeta : \zeta : t).$$

この写像によって $\mathbb{P}^3$ 上の平坦接続

$$\nabla = d - (A_0 d\log x_0 + A_1 d\theta_1 + A_2 d\log x_2 + A_3 d\theta_1(x_2, x_3))\wedge$$

を $\mathbb{P}^1 \times Z'$ に引き戻して得られる $\Phi^*\nabla$ の接続行列は local に

$$\Phi^*\omega = A_1 d\zeta + A_2 \frac{d\zeta}{\zeta} + A_3 d\frac{t}{\zeta}$$

で与えられる．この接続の平坦性条件 $\Phi^*\nabla^2 = 0$ は連立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} = \left(A_1 + \dfrac{A_2}{\zeta} - \dfrac{tA_3}{\zeta^2} \right) y \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{A_3}{\zeta} y \end{cases}$$

の両立条件と同じものである．具体的には

$$\frac{dA_1}{dt} = 0,$$
$$\frac{dA_2}{dt} = [A_3, A_1],$$
$$\frac{dA_3}{dt} = \frac{[A_2, A_3]}{t}.$$

を得る．これは P_{III} と同値な方程式であることが知られている ([1], [5]).

§4.6. Painlevé P_{II}. 4 の分割が (4) の場合を考える．対応する極大可換部分群 $H = H_{(4)}$ は

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ & h_0 & h_1 & h_2 \\ & & h_0 & h_1 \\ & & & h_0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{GL}(4)$$

で $Z \subset \mathrm{M}(2,4)$ の部分集合

$$Z' = \left\{ z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \neq 0, \infty \right\}$$

を考える．Z' は $\mathbb{P}^1$ の点の配置空間の類似である $\mathrm{GL}(2)\backslash Z/H_{(4)}$ の一つの実現である．写像 $\Phi\colon \mathbb{P}^1 \times Z' \to \mathbb{P}^3$ を §4.1 のように定義する．すなわち

$$(\zeta, z) \mapsto (1 : \zeta : t : 0).$$

この写像によって $\mathbb{P}^3$ 上の平坦接続

$$\nabla = d - (A_0 d\log x_0 + A_1 d\theta_1 + A_2 d\theta_2 + A_3 d\theta_3)\wedge$$

を $\mathbb{P}^1 \times Z'$ に引き戻して得られる $\Phi^*\nabla$ の接続行列は

$$\begin{aligned}\theta_1(x) &= \frac{x_1}{x_0},\\ \theta_2(x) &= \frac{x_2}{x_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2,\\ \theta_3(x) &= \frac{x_3}{x_0} - \left(\frac{x_1}{x_0}\right)\left(\frac{x_2}{x_0}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^3\end{aligned}$$

に注意すれば，local に

$$\Phi^*\omega = A_1 d\zeta + A_2(dt - \zeta d\zeta) + A_3(-d(\zeta t) + \zeta^2 d\zeta)$$

で与えられる．この接続の平坦性条件 $\Phi^*\nabla^2 = 0$ は，連立方程式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial y}{\partial \zeta} = (A_1 - \zeta A_2 + (-t + \zeta^2)A_3)y\\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = (A_2 - \zeta A_3)y\end{cases}$$

の両立条件と同じものである．具体的には

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dt} &= [A_2, A_1 - tA_3],\\ \frac{dA_2}{dt} &= [A_3, A_1],\\ \frac{dA_3}{dt} &= 0\end{aligned}$$

を得る．これは P_{II} と同値な方程式であることが知られている ([1], [5])．

参考文献

[1] H. Kawamuko and T. Nitta, A private communication.

[2] L.J. Mason and N.M.J. Woodhouse, *Twistor theory and the Schlesinger equations*, Applications of analytic and geometric methods to nonlinear differential equations (Exeter, 1992), 17–25, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. **413**, Kluwer Acad. Publ., Doldrecht, 1993.

[3] L.J. Mason and N.M.J. Woodhouse, *Self-duality and the Painlevé transcendents*, Nonlinearity **6** (1993), 569–581.

[4] T. Masuda, Talks at RIMS conferences, 2003, 2006.

[5] Y.Murata, A private communication.

[6] Y. Ohyama, *Isomonodromy deformations and twistor theory*, Contemporary Math. **309** (2002), 185–193.

E-mail address, (H. K.): `hiro@sci.kumamoto-u.ac.jp`