

## 変数分離の簡単な模型

京都大学大学院人間・環境学研究科 高崎金久 (Kanehisa Takasaki)

Graduate School of Human and Environmental Studies

Kyoto University

### 1 はじめに

Sklyanin のレビュー [1] をきっかけとして、「変数分離法」という古典的な手法が現代的な可積分系の視点から広く関心を集めるようになった。Sklyanin 自身はもともと量子力学系に対する変数分離の理論を構築することを目標にしていたが、そのその過程で古典力学系の変数分離の理論の理解も深まることになった。

このような変数分離の現代的理論は可積分系の Lax 表示を用いるのが特徴である。そのため道具立てなどがかなり大がかりになる傾向にある。特に、量子可積分系の変数分離は（一部の特別な場合を別にすれば）非常に複雑で技術的な手続きを伴うもので、その全体像をおおざっぱに説明することも容易ではない。

以下では古典力学の場合に話を限り、さらにある非常に簡単な例を用いて変数分離の考え方を解説する。これは一種の「おもちゃ模型 (toy model)」であるが、簡単でありながら変数分離の典型的な仕組みを示す含蓄の深い例であるように思われる。さらに、このおもちゃ模型を動機として行われたいくつかの研究などを紹介する<sup>1</sup>。

---

<sup>1</sup>ここで取り上げる話題と密接に関連する内容を 2002 年に Montreal で開催された研究会の報告集に寄稿した [2]。ここでは取り上げない話題や参考文献も紹介しているので、あわせて参照されたい。

## 2 Hamilton-Jacobi 方程式における変数分離

### 2.1 Hamilton-Jacobi 理論

以下ではもっぱら自励 Hamilton 系, すなわち正準変数  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  と Hamiltonian  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  によって

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad (j = 1, \dots, N)$$

と表される力学系を考察の対象とする.

Hamilton-Jacobi 理論によれば, Hamilton-Jacobi 方程式

$$H(\mathbf{q}, \nabla S) = E, \quad \nabla S = \left( \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_N} \right),$$

の完全解 (complete solution) を求めることができれば, この系の運動は完全に決まる。「完全解」とは  $I_1 = E$  以外に  $N - 1$  個の任意定数  $I_2, \dots, I_N$  に依存する解  $S = S(\mathbf{q}, \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{I} = (I_1, \dots, I_N)$ , で正則性条件

$$\text{rank} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial I_k} \right)_{j,k=1,\dots,N} = N$$

を満たすものである.

このような完全解は

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad \phi_j = \frac{\partial S}{\partial I_j}$$

によって正準変換  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\phi, \mathbf{I})$  を定める. この正準変換によって前述の Hamilton 系はいわゆる「作用・角変数」の Hamilton 系

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad \phi_j = \frac{\partial S}{\partial I_j}$$

に変換される. 後者は直線運動をする力学系であり, それを正準変換によってもとの力学変数に変換すればもとの系の解が得られることになる.

以上のことを幾何学的に言い換えれば, Hamilton-Jacobi 方程式の解は相空間において Hamiltonian の等位面

$$H^{-1}(E) = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mid H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = E\}$$

に含まれる Lagrange 部分多様体

$$L_I = \{(q, \nabla S(q, I)) \mid q \in M\}$$

を定める. 完全解はそのような Lagrange 多様体による相空間の葉層構造 (Lagrange 葉層構造) を表す. さらによい状況では, この葉層構造は相空間  $X$  からパラメータ空間  $B$  ( $I_1, \dots, I_N$  はその座標である) へのファイバー構造 (Lagrange ファイバー構造) を定める. このような葉層構造やファイバー構造は可積分系の幾何学的な定式化 [3] ではおなじみのものである.

## 2.2 変数分離の概念

完全解を求めるために従来用いられてきた事実上唯一の方法が変数分離 (separation of variables) である. Hamilton-Jacobi 方程式における「変数分離」とは, 「分離座標」と呼ばれる適当な正準座標  $(\lambda, \mu) = (\lambda_1, \dots, \lambda_N, \mu_1, \dots, \mu_N)$  において

$$S = \sum_{j=1}^N S_j(\lambda_j)$$

という「変数分離形」の解を求めることを意味する. もう少し詳しく言えば,  $(\lambda, \mu)$  座標で書いた Hamilton-Jacobi 方程式

$$F\left(\lambda_1, \dots, \lambda_N, \frac{\partial S}{\partial \lambda_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial \lambda_N}\right) = E$$

にこの解の表示を代入し, 得られた方程式

$$F(\lambda_1, \dots, \lambda_N, S'_1(\lambda_1), \dots, S'_N(\lambda_N)) = E, \quad S'_j(\lambda_j) = \frac{\partial S_j(\lambda_j)}{\partial \lambda_j},$$

を  $\lambda_j$  のみを含む微分方程式

$$f_j(\lambda_j, S'_j(\lambda_j), I) = 0 \quad (j = 1, \dots, N)$$

に分離する. このとき同時に新たな定数  $I_2, \dots$  が入り込む (その仕組みについてはあとで示す例を参照されたい).  $I$  はこれらの定数と  $E$  の組  $(E, I_2, \dots)$  を表す. 完全解を得るには  $E$  を含めてちょうど  $N$  個の定数が現れる必要がある. これらの方程式を  $S'_j(\lambda_j)$  について解けば (これは陰関数の問題である) 正規形の常微分方程式

$$S'_j(\lambda_j) = g_j(\lambda, I)$$

になり, それを積分して

$$S_j(\lambda_j) = \int^{\lambda_j} g_j(\lambda, \mathbf{I}) d\lambda$$

という解が得られる. それらの和

$$S = \sum_{j=1}^N \int^{\lambda_j} g_j(\lambda, \mathbf{I}) d\lambda$$

がもとの Hamilton-Jacobi 方程式の解を与える. 正則性条件が満たされればこれは完全解である.

## 2.3 Liouville 可積分性との関係

すでに注意したように, Hamilton-Jacobi 方程式の完全解は Lagrange 部分多様体  $L_I$  による相空間の葉層構造 (あるいはファイバー構造) を定める. 変数分離によって完全解が得られる場合には, 変数分離した方程式

$$f_j(\lambda_j, \mu_j, \mathbf{I}) = 0 \quad (j = 1, \dots, N)$$

が  $L_I$  の定義方程式と見なせるので,  $L_I$  は 2次元相空間内の曲線

$$C_j = \{(\lambda_j, \mu_j) \mid f_j(\lambda_j, \mu_j, \mathbf{I}) = 0\}$$

の直積

$$L_I = C_1 \times \dots \times C_N$$

として表せる. これを変数分離可能な Hamilton 系の幾何学的定義と考えてもよい.

これから「Liouville 可積分性」との関係もわかる. Hamiltonian  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  をもつ自励 Hamilton 系に対して関数独立な  $N$  個の第 1 積分  $H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \dots, H_N(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  が存在して (Hamiltonian 自体をそのうちの 1 個, たとえば  $H = H_1$  として選ぶことができる) 互いに包合的, すなわち Poisson 括弧に関して可換

$$\{H_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}), H_k(\mathbf{q}, \mathbf{p})\} = 0$$

であるとき, Hamilton 系は Liouville 可積分であるという. ところで, 見方を変えて, 前述の変数分離した Lagrange 部分多様体の定義方程式

$$f_j(\lambda_j, \mu_j, \mathbf{I}) = 0 \quad (j = 1, \dots, N)$$

を  $(\lambda, \mu)$  に対して  $I$  を (陰関数として) 定める方程式と見なせば, 相空間上の関数  $I_j = F_j(\lambda, \mu)$  が定まる. 少し計算をすれば, これらがもとの系の Hamiltonian  $F(\lambda, \mu)$  に対する包摂的な第 1 積分であることが確かめられる. こうして, 変数分離可能系は Liouville 可積分系の特別な場合と見なせることになる.

厳密に言えば, この結論はやや不正確である. なぜなら, Liouville 可積分性の定義における第 1 積分は相空間全体で定義された関数でなければならないからである. 上の  $F_j(\lambda, \mu)$  は陰関数として定まるので, 相空間上大域的に定義されたものとは限らないし, 多価性が生じる可能性もある. その意味で, これは完全な意味での Liouville 可積分系であるとは限らず, あくまでそれに準じるものと考えなければならない.

### 3 原型となる模型

#### 3.1 Calogero の可解粒子系

変数分離の簡単な模型として

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{e^{\mu_j}}{\prod_{k \neq j} (\lambda_j - \lambda_k)}$$

という Hamiltonian によって定義される Hamilton 系を考える. ここで  $(\lambda, \mu) = (\lambda_1, \dots, \lambda_N, \mu_1, \dots, \mu_N)$  は正準変数である. さらに,

$$B(\lambda) = \prod_{j=1}^n (\lambda - \lambda_j)$$

という多項式を用いれば, この Hamiltonian は

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{e^{\mu_j}}{B'(\lambda_j)}$$

とも表せる. 以下ではこの表示が重要な意味をもつ.

この Hamilton 系は 1978 年頃に Calogero[4] によって一種の可解粒子系として見

出された<sup>2</sup>.  $\mu_j$  を消去してニュートンの運動方程式を求めれば

$$\ddot{\lambda}_j = 2 \sum_{k \neq j} \frac{\dot{\lambda}_j \dot{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k}$$

となる. Calogero は多項式  $B(\lambda)$  が時間変数  $t$  に関して

$$\ddot{B}(\lambda) = 0$$

という方程式に従って変化する (すなわち 1 次式

$$B(\lambda) = B_0(\lambda) + tB_2(\lambda)$$

である) ときの根  $\lambda_j$  の運動を記述するものとしてこの運動方程式を導き, それを上 Hamilton 系に書き直した. その後, 多項式  $B(\lambda)$  を三角多項式や楕円函数に置き換えた形の変種も見出されている.

Morosi と Tondo [5] はこの系を変数分離というまったく異なる観点から取り上げた. 彼らのおもな関心は双 Hamilton 構造<sup>3</sup>にあったのだが, ここではその問題には立ち入らず, もっぱら変数分離の側面に焦点を絞る.

### 3.2 変数分離の手順

この系の Hamilton-Jacobi 方程式は

$$\sum_{j=1}^N \frac{\exp \partial S / \partial \lambda_j}{B'(\lambda_j)} = E$$

となる. この方程式は以下に示すような手順で変数分離できる. 特に, この場合にはもとの座標  $(\lambda, \mu)$  自体が分離座標になっている.

- $S$  を変数分離形  $S = \sum_{j=1}^N S_j(\lambda_j)$  に仮定すれば Hamilton-Jacobi 方程式は

$$\sum_{j=1}^N \frac{\exp S'_j(\lambda_j)}{B'(\lambda_j)} = E$$

となる.

<sup>2</sup>ちなみに, これは有名な Calogero-Moser 系とはまったく別のもので, Calogero-Moser 系の可積分変形の変形としてよく知られている Ruijsenaars-Shneider 系の特別な場合 (有理型模型) が退化したものと見なせる.

<sup>3</sup>近年 Falqui, Magri, Pedroni らの研究 [6] によって, 変数分離と双 Hamilton 構造との間には密接な関係があることが明らかになっている.

- Lagrange の補間公式を  $\lambda^{N-n}/B(\lambda)$  ( $n = 1, \dots, N$ ) に適用すれば

$$\sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j^{N-n}}{B'(\lambda_j)(\lambda - \lambda_j)} = \frac{\lambda^{N-n}}{B(\lambda)}$$

となる. この等式の両辺を  $\lambda = \infty$  で Laurent 展開して留数を拾い出せば

$$\sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j^{N-n}}{B'(\lambda_j)} = \delta_{n,1} \quad (n = 1, \dots, N)$$

という恒等式が得られる.

- 上の恒等式からの帰結として,

$$A(\lambda) = E\lambda^{N-1} + u_2\lambda^{N-2} + \dots + u_N$$

という多項式は  $u_2, \dots, u_N$  の値によらず

$$\sum_{j=1}^N \frac{A(\lambda_j)}{B'(\lambda_j)} = E$$

という等式を満たす.

- 特に,  $S_j(\lambda_j)$  が

$$\exp S'_j(\lambda_j) = A(\lambda_j) \quad (j = 1, \dots, N)$$

という方程式を満たせば前述の Hamilton-Jacobi 方程式が成立する. こうしてもとの Hamilton-Jacobi 方程式が  $N$  個の常微分方程式に分離され, その過程で  $N - 1$  個の任意定数  $u_2, \dots, u_N$  が現れる.

- 上の常微分方程式を

$$S'_j(\lambda_j) = \log A(\lambda_j)$$

と書き直して積分すれば

$$S_j(\lambda_j) = \int^{\lambda_j} \log A(\lambda) d\lambda$$

という形で解が得られる. こうして Hamilton-Jacobi 方程式の解

$$S = \sum_{j=1}^N \int^{\lambda_j} \log A(\lambda) d\lambda$$

が得られる.  $I = (E, u_2, \dots, u_N)$  に関して正則性条件が成立することは容易に確かめられるので, これは完全解である.

### 3.3 この解の解釈

幾何学的に解釈すれば、完全解の表す Lagrange 部分多様体  $L_I$  は

$$C = \{(\lambda, \mu) \mid e^\mu = A(\lambda)\}.$$

という曲線（これ自体が  $I$  に依存して決まることに注意されたい）の  $N$  個の直積

$$L_I = C \times \cdots \times C$$

として表せる。正準共役変数の組  $(\lambda_j, \mu_j)$  は Hamilton 系に従って運動する限りこの曲線  $C$ （可積分系の理論の「スペクトル曲線」に相当する）の上を動き続けることになる。

$(\lambda_j, \mu_j)$  が  $C$  の上にあることを表す方程式

$$e^{\mu_j} = A(\lambda_j) \quad (j = 1, \dots, N)$$

を改めて  $E = u_1$  と  $u_2, \dots, u_N$  に対する連立 1 次方程式と読み替えれば、その解  $u_n = H_n(\lambda, \mu)$  は包摂的な第 1 積分の組を与える。Lagrange 補間公式によれば、 $H_n(\lambda, \mu)$  は

$$B(\lambda) = \lambda^N + v_1 \lambda^{N-1} + \cdots + v_N.$$

の係数  $v_1, \dots, v_N$  ( $\lambda$  の対称関数となる) を用いて

$$H_n(\lambda, \mu) = - \sum_{j=1}^N \frac{e^{\mu_j}}{B'(\lambda_j)} \frac{\partial v_n}{\partial \lambda_j},$$

と表せる。特に  $n = 1$  の場合には  $v_1 = -\lambda_1 - \cdots - \lambda_N$  であるから

$$H_1(\lambda, \mu) = H(\lambda, \mu)$$

となって、もとの Hamiltonian が得られる。

### 3.4 模型の変形

上の Hamilton 系の変形として Calogero は

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{e^{\mu_j} - c\lambda_j^N}{B'(\lambda_j)}$$

( $c$  は定数) というものも考えている. 前述の変数分離の手順は  $A(\lambda)$  を

$$A(\lambda) = c\lambda^N + \sum_{n=1}^N u_n \lambda^{N-n}.$$

に修正すればそのままこの系にも当てはまる.

## 4 変種の模型 (その 1)

### 4.1 有理関数のモジュライ空間上の力学系

武部と筆者 [7] は上の例に対して 3 種類の変種 (有理型・双曲型・楕円型) を考察した. このうち有理型の模型は有理関数のモジュライ空間上の「Atiyah-Hitchin 構造」と呼ばれるシンプレクティック構造に関連して得られるものである<sup>4</sup>. 有理関数を  $B(\lambda)/A(\lambda)$  として表すときの分子と分母の多項式  $A(\lambda), B(\lambda)$  が前述の変数分離に現れた多項式に相当する.

Calogero の可解粒子系の場合と違ってここではこれらの多項式を

$$A(\lambda) = \lambda^N + \sum_{n=2}^N u_n \lambda^{N-n},$$

$$B(\lambda) = \lambda^{N-1} + \sum_{n=2}^N v_n \lambda^{N-n}.$$

と選ぶ.  $u_2, \dots, u_N, v_2, \dots, v_N$  がモジュライ空間の座標を与える. なお,  $A(\lambda)$  には  $\lambda^{N-1}$  の項があってもよいが, その係数  $u_1$  は全運動量に対応するものなので  $u_1 = 0$  としても一般性は失われない.

Atiyah-Hitchin 構造は

$$\Omega = \sum_{j=1}^N d \log B(\alpha_j) \wedge d\alpha_j$$

という 2 次微分形式で定まる. ここで  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  は  $A(\lambda)$  の根である. 言い換えれば  $A(\lambda)$  は

$$A(\lambda) = \prod_{j=1}^N (\lambda - \alpha_j)$$

<sup>4</sup>Donaldson [8] によれば, Yang-Mills 方程式のモノポール解のモジュライ空間はこのような有理関数のモジュライ空間と同一視できる. Atiyah-Hitchin 構造は Atiyah と Hitchin [9] によってこのモジュライ空間の上に導入されたシンプレクティック構造 (あるいは Poisson 構造) である.

と因数分解されるわけだが,  $u_1 = 0$  としているのでこれらの根は

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_N = 0$$

という束縛条件に従う. その意味で  $\Omega$  は一見シンプレクティック形式に見えるが実際には退化している. そもそも考えている力学系の相空間は  $u_2, \dots, u_N, v_2, \dots, v_N$  を座標とする  $2N - 2$  次元空間なので, 必要なシンプレクティック形式は階数が  $N - 1$  のはずである. じつは, 簡単な計算によって  $\Omega$  が

$$\Omega = \sum_{j=1}^{N-1} d \log A(\lambda_j) \wedge d\lambda_j$$

と表せることがわかる. これを正準座標で書いたシンプレクティック形式と解釈すれば,  $\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}$  と

$$\mu_1 = \log A(\lambda_1), \dots, \mu_{N-1} = \log A(\lambda_{N-1})$$

が正準座標をなすことになる.

この  $\mu_1, \dots, \mu_{N-1}$  の決め方は Calogero の可解粒子系の変数分離において出会った関係式

$$e^{\mu_j} = A(\lambda_j) \quad (j = 1, \dots, N - 1)$$

と実質的に同じ形をしている. その場合の高次 Hamiltonian の構成方法にならって, この関係式を  $u_2, \dots, u_{N-1}$  に関する連立方程式と見なせば, その解  $u_n = H_n(\lambda, \mu)$  は

$$H_n(\lambda, \mu) = - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{e^{\mu_j} - \lambda_j^N}{B'(\lambda_j)} \frac{\partial v_n}{\partial \lambda_j}$$

と表せる. 特に最低次の Hamiltonian は

$$H(\lambda, \mu) = H_2(\lambda, \mu) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{e^{\mu_j} - \lambda_j^N}{B'(\lambda_j)}$$

となる. 構成法から, これらの Hamiltonian は包会的であり,  $(\lambda, \mu)$  を分離座標として一斉に変数分離可能である.

この系は新しいものではなく, じつはよく知られた可積分系である「有限非周期的戸田格子」と同値である. 有限非周期的戸田格子に対しては Moser の解法と呼ば

れるものがあり [10], それを有理函数のモジュライ空間上の可積分系として見直せることも以前からよく知られていた [11, 12, 13, 14]. Moser の方法では  $B(\lambda)/A(\lambda)$  を

$$\frac{B(\lambda)}{A(\lambda)} = \sum_{j=1}^N \frac{\rho_j}{\lambda - \alpha_j}$$

というように部分分数展開して, その留数

$$\rho_j = \frac{B(\alpha_j)}{A'(\alpha_j)}$$

と  $\alpha_j$  を力学変数として用いる. これらは一種の「スペクトルデータ」として時間発展に関して単純な時間発展をするので, それから戸田格子の本来の力学変数を復元すること (逆スペクトル問題) によって戸田格子の解が得られる. このモーザーの解法を変数分離の観点から解釈し直せば上で説明したようなことになる.

Krichever と Vaninsky [15] は可積分系の代数幾何学的解法の視点から実質的に同じことを示している. 代数幾何学的解法との関係を見るには作用・角変数を書き下してみればよい. 今の場合の Hamilton-Jacobi 方程式の完全解は

$$S = \sum_{j=1}^{N-1} \int^{\lambda_j} \log A(\lambda) d\lambda$$

で与えられる. これから作用変数 (保存量)  $u_2, \dots, u_N$  の共役変数として角変数

$$\phi_n = \frac{\partial S}{\partial u_n} = \sum_{j=1}^{N-1} \int^{\lambda_j} \frac{\lambda^{N-n}}{A(\lambda)} d\lambda$$

が得られる. これは代数幾何学的解法で用いられる Abel-Jacobi 写像 (スペクトル曲線上の因子を Jacobi 多様体の点に写す) の類似物と見なせる. すなわち  $\lambda_j$  の組が因子に,  $\phi_n$  が Jacobi 多様体の座標に相当する. 実際, 周期的戸田格子の場合にはスペクトル曲線として

$$y^2 = A(\lambda)^2 - 4C$$

という形の方程式で定義される超楕円曲線が現れて, 上の  $\phi_n$  の表示に相当するものが

$$\phi_n = \sum_{j=1}^{N-1} \int^{\lambda_j} \frac{\lambda^{N-n}}{\sqrt{A(\lambda)^2 - 4C}} d\lambda$$

という形になる.

ちなみに, 少し設定を変えれば, いわゆる相対論的戸田格子の有限非周期的な場合についても同様の取り扱いができる [2].

## 4.2 双曲型模型と楕円型模型

双曲型模型と楕円型模型では有理型模型の多項式函数の組が双曲線函数の組

$$A(\lambda) = \prod_{j=1}^N \sinh(\lambda - \alpha_j), \quad B(\lambda) = \prod_{j=1}^N \sinh(\lambda - \lambda_j).$$

や楕円函数の組

$$A(\lambda) = \prod_{j=1}^N \sigma(\lambda - \alpha_j), \quad B(\lambda) = \prod_{j=1}^N \sigma(\lambda - \lambda_j).$$

に置き換わる. すなわち,  $\lambda$  の代わりに双曲線函数  $\sinh \lambda$  や Weierstrass の  $\sigma(\lambda)$  を考える.  $A(\lambda)$  を適当な函数の組  $f_n(\lambda)$  の線形結合

$$A(\lambda) = f_0(\lambda) + \sum_{n=1}^N u_n f_n(\lambda)$$

の形に展開し,

$$e^{\mu_j} = A(\lambda_j)$$

という等式を  $u_n$  に対する連立 1 次方程式と見なして解けば, 包含的な Hamiltonian の組が決まる.

## 4.3 量子可積分系

Odesskii と Rubtsov [17] は「Feigin-Odesskii 代数」あるいは「楕円代数」と呼ばれる代数に関連してある種類の可積分系を論じている. それは上に述べた楕円型模型とよく似たもので,  $A(\lambda)$  の展開に用いる函数系の選び方が少し異なることを別にすれば, 構成の基本的な考え方は同じである. 彼らはさらにその量子化も論じている. 量子化においては

$$\mu_j \rightarrow \hbar \partial / \partial \lambda_j$$

という置き換えを行う。これによって Hamiltonian に現れる  $e^{\mu_j}$  は  $e^{\hbar\partial/\partial\lambda_j}$  という差分作用素に変わる。一般にはこれによって作用素の順序づけの問題が生じるが、今の場合にはこの問題を避けることができ、量子力学的な意味での可換な保存量が得られる。

変数分離の観点から見れば、Odesskii と Rubtsov の示したものは量子論的な意味で変数分離可能な Hamilton 系である。量子論的な変数分離については Sklyanin がその手がかりを与えて以来 [1] さまざまな研究が行われているが、その取り扱いには概して技術的に厄介である。その意味で、Odesskii と Rubstov の例は例外的に簡単に扱えるものでありながら、含蓄が深い。

#### 4.4 この枠組みに入るかどうか分からない例

Calogero は前述の可解粒子系の一般化を探る過程 [4, 16] で

$$\begin{aligned}
 1. \quad H &= \sum_{j=1}^N \frac{e^{\mu_j}}{\prod_{k \neq j} \tanh(\lambda_j - \lambda_k)}, \\
 2. \quad H &= \sum_{j=1}^N \frac{e^{\mu_j}}{\prod_{k \neq j} \sigma(\lambda_j - \lambda_k)}
 \end{aligned}$$

というような可解粒子系を見出している。これらは多項式の代わりに双曲線関数や楕円関数が時間に関して単純な時間発展に従うときの零点の運動を記述するものとして得られる。その意味で前述のような関数の組  $A(\lambda), B(\lambda)$  に伴う変数分離可能系の枠組みで理解できることが予想されたが、それを示すことがまだできていない（むしろ、そうではないという感触を得ている）。

## 5 変種の模型（その2）

前節で示した変種は  $A(\lambda), B(\lambda)$  の関数の形や型を変えることによって得られたものである。これらの模型では  $e^{\mu}$  は共通だった。本節ではこれを別のものに変えることを考えてみよう。

## 5.1 古典に学ぶ

じつは、19世紀以来知られている古典的な変数分離可能系の多くは  $e^\mu$  を  $\mu^2$  に置き換えた形の Hamiltonian をもつ。典型的なものは

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{a(\lambda_j)\mu_j^2 - c(\lambda_j)}{B'(\lambda_j)}$$

という形をしている。  $B(\lambda)$  はここでも  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  を根とする多項式であり、  $a(\lambda)$  と  $c(\lambda)$  は力学変数を含まない1変数函数（有理式など）である。この形の Hamiltonian も前述の Hamiltonian とほとんど同じ手順で変数分離ができる。この場合に現れる分離曲線  $C$  は

$$C = \{(\lambda, \mu) \mid a(\lambda)\mu^2 = A(\lambda)\}$$

というものになる。  $A(\lambda)$  は  $c(\lambda)$  にある多項式を加えたものになる。  $a(\lambda)$  と  $A(\lambda)$  が多項式・有理式ならば  $C$  は超楕円曲線となる。19世紀以来知られている古典的な変数分離可能系（代表的なものとして2次曲面上の測地運動、Euler・Lagrange・Kowalevskaya のコマ、Neumann 系、理想流体中の剛体運動、などがある）の多くが超楕円函数によって解ける理由はここにある [18]。19世紀末にはこの型の変数分離可能な Hamiltonian 系の系統的な構成・分類の試みが Stäckel [19] によって行われたので、これらを Stäckel 型 Hamiltonian と呼ぶこともある。Moser [20] はこのような有限自由度の可積分系の変数分離を現代的な視点から見直した。

他方、1970年代にはさまざまな可積分系の代数幾何学的解が盛んに論じられた [18]。そこでは Lax 形式や Baker-Akhiezer 函数の概念を駆使する現代的な手法が用いられた。その一方では、それらを古典的な変数分離の観点から解釈することも行われた [21]。これらの研究は Sklyanin [1] が変数分離の研究を進める際の一つの鍵となった。

たとえば、KdV 方程式の超楕円函数解の背後には

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{\mu_j^2 - c(\lambda_j)}{B'(\lambda_j)}$$

という形の Stäckel 型 Hamiltonian がある。  $c(\lambda)$  は  $\lambda$  の  $N$  次以上の項からなる定数係数の多項式である。その係数は解を特徴づける定数の一部ではあるが、完全

解に必要な積分定数とは別のものである。完全解に必要な定数は変数分離の過程で現れる。分離曲線は

$$C = \{(\lambda, \mu) \mid \mu^2 = A(\lambda)\}$$

という形の超楕円曲線となる。ここで  $A(\lambda)$  は  $c(\lambda)$  に  $N-1$  次の多項式を加えたもの

$$A(\lambda) = c(\lambda) + \sum_{n=1}^N u_n \lambda^{N-n}$$

であり、その係数  $u_1, \dots, u_N$  が完全解の積分定数となる。この分離曲線はもちろん超楕円函数の背後にある超楕円曲線と同じものである。

他方、これも代表的なソリトン方程式である  $N$ -周期的な戸田格子は

$$H = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{e^{\mu_j} + e^{-\mu_j} - c\lambda^N}{B'(\lambda_j)}$$

という形の変数分離可能な Hamiltonian と対応している ( $c$  は 0 でない定数)。ただし  $B(\lambda)$  は

$$B(\lambda) = \prod_{j=1}^{N-1} (\lambda - \lambda_j)$$

という多項式である。  $e^{\mu_j}$  や  $\mu_j^2$  の代わりに  $e^{\mu_j} + e^{-\mu_j}$  が現れることに注意されたい。  $e^{-\mu_j}$  の項を落とせばこれはすでに触れた有限非周期的戸田格子に対応する Hamiltonian になる。この Hamiltonian の変数分離に伴って現れる分離曲線は

$$C = \{(\lambda, \mu) \mid e^{\mu} + e^{-\mu} = A(\lambda)\}$$

というものになる。  $A(\lambda)$  は

$$A(\lambda) = c\lambda^N + \sum_{n=2}^N u_n \lambda^{N-n}$$

という多項式である。  $(\lambda, e^{\mu})$  を座標と見れば  $C$  は超楕円曲線である。この超楕円曲線は周期的戸田格子の代数幾何学的解法においてスペクトル曲線として現れるものに一致する。

## 5.2 もう一つの楕円型変種

$A(\lambda), B(\lambda)$  を多項式から双曲（三角）函数や楕円函数に置き換えることによって新たな変数分離可能系が得られたことを思い出そう。  $\lambda$  方向を楕円函数にまで一般化できるならば、  $\mu$  方向も楕円函数にまで一般化できないだろうか？ 具体的に言えば、  $e^\mu$  を Weierstrass の  $\wp$  函数に置き換えて

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{a(\lambda)\wp(\mu_j) - c(\lambda)}{B'(\lambda_j)}$$

というような Hamiltonian を考える。 対応する分離曲線は

$$C = \{(\lambda, \mu) \mid a(\lambda)\wp(\lambda) = A(\lambda)\}$$

というものになる。  $A(\lambda)$  を適当な函数の線形結合

$$A(\lambda) = f_0(\lambda) + \sum_{n=1}^N u_n f_n(\lambda)$$

として表して、その係数  $u_n$  を

$$a(\lambda)\wp(\mu_j) = A(\lambda_j) \quad (j = 1, \dots, N)$$

という連立1次方程式によって  $(\lambda, \mu)$  の関数  $u_n = H_n(\lambda, \mu)$  と見なせば、これまでと同様の議論によって変数分離可能で包含的な Hamiltonian の組が得られる。

$e^\mu$  や  $\mu^2$  を  $\wp(\mu)$  に置き換えるのはいささか常軌を逸したアイデアだが、以下に説明するように「楕円函数の退化」によって  $e^\mu$  や  $\mu^2$  が得られることを考えると、まったくナンセンスとも言えない。

## 5.3 楕円函数の退化に伴って得られる Hamiltonian

幾何学的に言えば、楕円函数の退化は楕円曲線が有理曲線に退化することに対応する。退化前の楕円函数  $z = \wp(\mu)$  は不完全楕円積分

$$\mu = \int_{\infty}^z \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}$$

の逆函数である。対応する楕円曲線は Weierstrass の標準形

$$y^2 = 4z^3 - g_2z - g_3$$

で定義される。右辺の3次式

$$4z^3 - g_2z - g_3 = (z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)$$

の根  $e_1, e_2, e_3$  を合流させることによって楕円曲線が（一般には特異点をもつ）有理曲線に退化する。

退化に伴って不完全楕円積分（したがってその逆函数としての楕円函数）は初等関数になる。これにはさまざまなパターンが考えられるが、ここでは次の5通りの場合に注目したい。

$$\begin{aligned} 1) \quad \mu &= \int^z \frac{dz}{2\sqrt{z(z-1)}} && \longleftrightarrow z = \coth^2 \mu \\ 2) \quad \mu &= \int^z \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} && \longleftrightarrow z = 2 \cosh \mu \\ 3) \quad \mu &= \int^z \frac{dz}{2\sqrt{z}} && \longleftrightarrow z = \mu^2 \\ 4) \quad \mu &= \int^z \frac{dz}{z} && \longleftrightarrow z = e^\mu \\ 5) \quad \mu &= \int^z dz && \longleftrightarrow z = \mu \end{aligned}$$

これらはある意味でいずれも「由緒正しい」退化の仕方である。すなわち、ここに登場した函数は Calogero-Moser 系や Ruijsenaars-Shneider 系の研究ではすでにおなじみのものであり、Painlevé 方程式と関係があることもわかっている [22]。特に、退化前の楕円函数と合わせて全部で6通りの函数があることは Painlevé 方程式に VI 型から I 型までであることと対応している。

Hamiltonian の構造函数  $\wp(\mu)$  をこれらの函数に置き換えれば、そのうちの大半はすでに知られている変数分離可能 Hamiltonian になる。4) からは Calogero の可解粒子系や有限非周期的戸田格子が復元される。3) は Stäckel 型 Hamiltonian や KdV 方程式の超楕円函数解の場合に他ならない。さらに、 $2 \cosh \mu$  が  $2 \cosh \mu = e^\mu + e^{-\mu}$  と表せることに注意すれば、2) には周期的戸田格子が含まれる。 $\wp(\lambda)$  を構造函数とする前述の Hamiltonian は少なくともさまざまな模型を統一する枠組みとして役に立つだろう。

上の退化リストの 1) と 5) からはあまり見慣れない Hamiltonian が得られる。5) を構造函数とする Hamiltonian

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{a(\lambda)\mu_j - c(\lambda)}{B'(\lambda_j)}$$

は退化しすぎた感じがするが、それでも何か面白い例を含んでいるかもしれない。他方、1) を構造関数とする Hamiltonian

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{a(\lambda) \tanh^2(\mu_j) - c(\lambda)}{B'(\lambda_j)}$$

は古典的な 2), 3), 4) の場合に比べてもはるかに手強い対象である。仮にこれが既知の可積分系に対応することがわかったとしても、それはそれで大変興味深い結果と言えるだろう。

さらに一步踏み出して、これらの Hamiltonian の量子化を考えたらどうなるだろうか。すでに  $e^\mu$  の場合には Odesskii と Rubtsov による試みがあり、それを見れば他の場合もほぼそのまま扱えそうに思われる。もっとも、形式的な量子化に伴って

$$\rho(\hbar\partial/\partial\lambda_j), \quad \tanh^2(\hbar\partial/\partial\lambda_j), \quad \dots$$

などのものすごい作用素が現れるので、これらを（擬微分作用素として）正当化することが必要になる。

## 参考文献

- [1] E.K. Sklyanin, Separation of variables – new trends –, Prog. Theor. Phys. Suppl. **118** (1995), 35–60.
- [2] K. Takasaki, Integrable systems whose spectral curves are the graph of a function, CRM Proceedings vol. **37** (American Mathematical Society, 2004), pp. 211–222.
- [3] R. Donagi and E. Markman, Spectral covers, algebraically completely integrable Hamiltonian systems, and moduli of bundles, Lect. Notes. Math. vol. **1620** (Springer-Verlag, 1995), pp. 1–119.
- [4] F. Calogero, Motion of poles and zeros of nonlinear and linear partial differential equations, and related solvable many-body problems, Nuovo Cimento **B43** (1978), 177–241; Classical Many-Body Problems Amenable to Exact

- Treatments. Lecture Notes in Physics monographs (Springer-Verlag, 2001), Section 2.3, pp. 163–227.
- [5] C. Morosi and G. Tondo, On a class of dynamical systems both quasi-bi-Hamiltonian and bi-Hamiltonian. *Phys. Lett. A* **247** (1998), 59–64; Bi-Hamiltonian manifolds, quasi-bi-Hamiltonian systems and separation variables, *Proceedings of the XXX Symposium on Mathematical Physics (Toruń, 1998)*, *Rep. Math. Phys.* **44** (1999), 255–266.
- [6] G. Falqui, F. Magri and M. Pedroni, A bihamiltonian approach to separation of variables in mechanics, in *Proceedings of the Workshop on Nonlinearity, Integrability and All That: Twenty Years after NEEDS '79* (World Scientific, 2000), pp. 258–266.  
G. Falqui and M. Pedroni, Separation of variables for bi-Hamiltonian systems, *Math. Phys. Anal. Geom.* **6** (2003), 139–179.
- [7] K. Takasaki and T. Takebe, An integrable system on the moduli space of rational functions and its variants, *J. Geom. Phys.* **47** (2003), 1–20.
- [8] S.K. Donaldson, Nahm's equations and the classification of monopoles, *Commun. Math. Phys.* **96** (1984), 387–407.
- [9] M. Atiyah and N. Hitchin, *The geometry and dynamics of magnetic monopoles* M. B. Porter Lectures. (Princeton University Press, Princeton, 1988).
- [10] J. Moser, Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential, in *Dynamical Systems, Theory and Applications*, Lecture Notes in Physics Vol. 38 (Springer-Verlag, 1975), pp. 467–497.
- [11] P.S. Krishnaprasad, Symplectic mechanics and rational functions, *Ricerche Automat.* **10** (1979), 107–135.
- [12] Y. Nakamura, Geometry of rational functions and nonlinear integrable systems. *SIAM J. Math. Anal.* **22** (1991), 1744–1754; The level manifold of a

- generalized Toda equation hierarchy, *Trans. Amer. Math. Soc.* **333** (1992), 83–94.
- [13] L. Faybusovich, M. Gekhtman, Hamiltonian and system-theoretic properties of the HR-algorithm, *J. Math. Syst., Est. & Control* **13** (1993), 129–146.
- [14] L. Faybusovich, M. Gekhtman, Poisson brackets on rational functions and multi-Hamiltonian structure for integrable lattices, *Phys. Lett. A* **272** (2000), 236–244.
- [15] I. Krichever and K.L. Vaninsky, The periodic and open Toda lattice, [hep-th/0010184](https://arxiv.org/abs/hep-th/0010184).
- [16] F. Calogero and J.-P. Francoise, A novel solvable many body problem with elliptic interactions, *IMRN* **15** (2000), 775–786.
- [17] A. Odesskii and V. Rubtsov, Integrable systems associated with elliptic algebras, in *Elliptic Integrable Systems* (ed. M. Noumi and K. Takasaki), *Rokko Lectures in Mathematics* vol. 18 (Kobe University, 2005), pp. 111–132.
- [18] B.A. Dubrovin, I.M. Krichever and S.P. Novikov, Integrable systems I, in *Encyclopedia of Mathematics, Dynamical System IV* (Springer-Verlag, Berlin, 1990).
- [19] P. Stäckel, Über die Integration der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung mittelst Separation der Variablen (Habilitationsschrift, Univ. Halle-Wittenberg, 1981).
- [20] J. Moser, Geometry of quadrics and spectral theory, in *Chern Symposium 1979* (Springer-Verlag, 1981), pp. 147–188.
- [21] M.A. Adams, J. Harnad and J. Hurtubise, Darboux coordinates and Liouville-Arnold integration in loop algebras, *Commun. Math. Phys.* **155** (1993), 385–413.
- [22] K. Takasaki, Painlevé-Calogero correspondence, *J. Math. Phys.* **42** (3) (2001), 1443–1473, ならびにその引用文献を参照されたい.