

# 野海山田系のストークス幾何の決定アルゴリズムについて

本多尚文 (Naofumi HONDA)  
 北海道大学大学院理学研究院

## 1 序

野海山田系  $NY_l$  ( $l$  は 2 以上の整数) は 1 つのパレルベ階層で野海-山田 ([NY]) によって与えられた。 $NY_l$  は大きなパラメータ  $\eta$  を持つ  $t$  変数の  $l+1$  個の未知関数  $u_0(t), \dots, u_l(t)$  に関する非線形常微分方程式である。その具体的な形は、同じ講究録に掲載されている青木-本多 ([AH]) の論文に書かれているのでそれを参照して頂きたい。

非線形方程式  $NY_l$  は Lax pair をもち、その pair の第 1 番目の線形方程式系を  $NYL_l$  と表す事にする。 $NYL_l$  は  $x$  変数の  $l+1$  個の未知関数  $\psi_0(x), \dots, \psi_l(x)$  の連立方程式で、変数  $t$  をパラメータとして持つ。

$$(NYL_l) \quad \frac{d\psi}{dx} = \eta A_t(x)\psi.$$

ここで  $A_t(x)$  は  $t$  に依存した  $l+1$  次 of 正方行列で以下の形である。

$$A_t(x) = \frac{-1}{x} \begin{pmatrix} e_0 & u_1(t) & 1 & & & & & & \\ 0 & e_1 & u_2(t) & 1 & & & & & \\ & & \dots & & & & & & \\ & & & \dots & & & & & \\ & & & & e_{l-2} & u_{l-1}(t) & 1 & & \\ x & & & & & e_{l-1} & u_l(t) & & \\ xu_0(t) & x & & & & & & e_l & \end{pmatrix}.$$

但し  $\{u_k(t)\}$  は  $NY_l$  の解であり、 $\{e_k\}$  は  $NY_l$  の定数からある規則で定まる定数とする。

WKB 解析の 1 つの問題として、非線形方程式  $NY_l$  のストークス幾何を決定する事が挙げられる。非線形方程式を線形化する事で、線形方程式と同様に非線形方程式の形式的なストークス曲線を描く事が出来る。しかし、この曲線はあくまで形式的なものであるから、曲線上の点  $t_0$  で実際にストークス現象が起きるか確認する必要がある。確認の手段として、線形方程式  $NYL_l$  のパラメータ  $t = t_0$  におけるストークス幾何を描き、ある種の不連続性(もしくは縮退)を持つかどうかで判定するという方法が知られている。

この観点で  $NY_l$  のストークス幾何を決定しようという試みの過程で、佐々木 ([Sa1],[Sa2]) は、 $NYL_l$  のストークス幾何に様々な不可思議な現象が起こるのを発見した。例えば、

1.  $t_0$  が  $NY_l$  の形式的なストークス曲線上にあるとき、 $t_0$  が変わり点に十分近ければ、 $t = t_0$  における  $NYL_l$  のストークス幾何では、単純変わり点と2重変わり点がストークス曲線で結ばれるという縮退が起きる事が証明されている (竹井 [T])。一方、 $t_0$  が変わり点から離れると、もはやストークス曲線で結ばれる通常変わり点は存在しなくなってしまう。
2.  $t_0$  が  $NY_l$  の形式的なストークス曲線上ではないにもかかわらず、 $t = t_0$  における  $NYL_l$  のストークス幾何で2つの仮想変わり点が new Stokes curve で結ばれ、更に、napping とよばれる仮想変わり点のある種の不連続現象が見られる ( $NY_l$  における西川現象)。

佐々木は、これらの現象を精力的に研究しある程度の解決を与えた。解決を困難にしているのは、ひとえに、線形方程式  $NYL_l$  のストークス幾何が非常に複雑だからである。複雑になる大きな理由は線形方程式  $NYL_l$  が高階方程式であり、古典的な通常変わり点とストークス曲線の他に、仮想変わり点と new Stokes curves も必要になるためである ([AKT])。特に、仮想変わり点は病的なほど多く、必然的にそれらから発生する new Stokes curves も極めて多数存在する。しかし、実際の所、現象に直接寄与する仮想変わり点は極少数であると考えられる。つまり、不必要な仮想変わり点を排除する必要があるわけである。

不必要な仮想変わり点を排除する方法は幾つか考えられる。1つは仮想変わり点の定義の束縛条件を多くする事で仮想変わり点の数を少なくする事である。しかし、このアプローチは現在の所上手くいっていない (もちろん、筆者は期待している)。もう1つの方法は、ほとんどの仮想変わり点は、その点から派生する2つの new Stokes curves が常に点線 (ストークス曲線には点線部と実線部があり、点線部はストークス現象が発生しない部分である) となっている事に注目する事である。そのような仮想変わり点は、それらが与える new Stokes curves がストークス現象に寄与しないのであるから、実質存在しないように扱える。

この2番目のアプローチでは、ストークス曲線の実線部破線部を決定するアルゴリズムが極めて重要になる。New Stokes curves の実線部、破線部を決定するアルゴリズムは青木-河合-竹井によって、new Stokes curves や仮想変わり点を導入した重要な論文 ([AKT]) の中で与えられている。この [AKT] によるアルゴリズムは、局所的なストークス幾何の実線破線を決定する際に極めて有効である。他方、ある程度大域的な領域で、ストークス幾何のストークス曲線の実線破線を決定する際には、幾つかのあいまいな点があり多少の困難を伴う。

佐々木が上に述べた不可思議な現象を完全に解析しきれなかった理由の1つは、ある程度大域的な領域で現象を把握する必要があるからである。本稿では、[AKT] のアルゴリズムを土台とした、ある程度大域的な領域でのストークス

クス幾何の実線破線を決定する為の条件と、その一意性について述べる事とする。実線破線を決定する条件は、次の (1), (2), (3) を満たしている事が重要であると思われる。

1. 既に与えられている [AKT] のアルゴリズムと両立する。
2.  $t$  を動かして  $NYL_t$  のストークス幾何の連続変形を調べるのであるから、ある種の連続性を持っている。この事は、コンピューターを用いた具体的な計算に於いても重要である。コンピューターでの計算は常に誤差を伴うからである。
3. この実線破線を決定する条件で定まった  $NYL_t$  のストークス幾何で、様々な現象を上手く説明できる。

本稿の実線破線の決定条件は以上の条件を満たすモデルの1つである。しかし、筆者は本稿で与える実線破線決定条件が完全なものであると主張する気はない。実際、完全 WKB 解析は急速に発展している途中であり、すべての事柄が解明されたわけではない。真のストークス幾何を与える完全なアルゴリズムを与える事は非常に困難に思われる(もちろん筆者にとってである)。むしろ、現在知られている捉えがたい複雑な現象に対して、統一的な視点と明解な説明を与える事が出来るモデルを、現状の完全 WKB 解析の理論と両立する形で構築できるか、という事を問題にしている事を強調しておきたい。

最後に、講演では実線破線決定条件を導入したのち、このモデルで線形方程式  $NYL_t$  の縮退は有効双方向2分木という概念で捉える事が出来る事を話した。また、有効双方向2分木の様々な性質や変形を紹介した。本稿を書き始めてみると、実線破線決定条件の部分で規定ページ数に至ってしまった。最初、実線破線決定条件の説明を大幅に省略しようかとも考えたが、それでは理解するのが困難なものに仕上がりがそうであったので、有効双方向2分木の理論の部分は残念ながら割愛することにした。有効双方向2分木については、この後の日仏合同シンポジウムの報告集で報告する予定なので、そちらを見て頂きたい。

## 2 復習

最初に、古典的な通常変わり点とストークス曲線の定義を復習する。 $A(x)$  を有理型関数を要素とするサイズ  $n$  の行列とし、 $v(x)$  を未知関数とする線形方程式系

$$\eta^{-1} \frac{dv}{dx} = A(x)v$$

を考える。 $\Lambda(\lambda, x) = \det(\lambda I - A(x))$  とし、 $\Lambda(\lambda, x)$  の判別式を  $D(x)$ 。また、 $\lambda$  の多項式  $\Lambda(\lambda, x) = 0$  に対し、 $\mathbb{C}$  に適当なカットを入れて根を  $1, 2, \dots, n$  の

添字を用いて

$$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x)$$

で表す。この添字付けをカット平面上で固定する。もちろん、適切なリーマン面を設定することで、多価性を処理できるのであるが、リーマン面の構成が比較的複雑で読者にメリットがあるとは思われないので、このような直接的方法をとる。以下、次の単純な条件下で考える。

- $D(x)$  は恒等的に 0 ではない。
- 任意の  $x$  に対して  $\Lambda(\lambda, x) = 0$  の根は、高々 1 個の 2 重根と残りは全て単根からなる。

通常変わり点とは  $D(x) = 0$  の根の事である。特に、 $D(x) = 0$  の根が 1 位の零点の時は単純変わり点、2 位の零点であれば 2 重変わり点と言う。 $x_0$  が通常変わり点のとき、 $\Lambda(\lambda, x_0) = 0$  は 2 重根を持つが、重根となる根が  $\lambda_i$  と  $\lambda_j$  であるとき変わり点  $x_0$  のタイプは  $(i, j)$  であるという事にする。このとき、 $\lambda_i(x)$  と  $\lambda_j(x)$  は、 $x_0$  が単純変わり点ならば  $x_0$  で 2 価の分岐をする多価正則関数、 $x_0$  が 2 重変わり点ならば  $x_0$  の近傍で正則である事に注意する。

$x_0$  をタイプ  $(i, j)$  の通常変わり点、 $l: [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  を  $x_0$  を端点とする  $\mathbb{C}$  内の滑らかな曲線とする。 $l$  に対して

- 条件 (\*)  $\lambda_i(x)$  と  $\lambda_j(x)$  は  $x_0$  から  $l$  に沿って解析接続可能 (つまり、分岐点や特異点にぶつからない) で、また、 $l$  上  $x_0$  以外で同じ値をとらない

を仮定しよう。条件 (\*) より、 $x_0$  の近傍で局所的に記述された定義式

$$(1) \quad \text{Im}(\lambda_i(x) - \lambda_j(x))dx$$

は、実解析的な滑らかさを持つ非退化な実微分形式  $\omega$  として  $l \setminus \{x_0\}$  に沿って接続出来る。

**Definition (積分曲線)**  $x_0$  を端点とする滑らかな曲線  $l$  が条件 (\*) と  $l^*\omega = 0$  を満たすとき、 $l$  を通常変わり点  $x_0$  から派生する積分曲線と呼ぶ。

**Definition (ストークス曲線)** 通常変わり点  $x_0$  から派生するストークス曲線  $l$  とは、 $[0, 1)$  もしくは  $[0, 1]$  の  $\mathbb{C}$  へのはめ込み  $l$  で、 $l$  を  $[0, 1)$  に制限すると変わり点  $x_0$  から派生する積分曲線を与えるものの中で極大なものとする。

ストークス曲線  $l$  上の点  $x$  に対し、 $x$  の近傍で  $l$  を与える実微分形式が根  $\lambda_{i'}$  と  $\lambda_{j'}$  を用いて式 (1) で与えられるとき、ストークス曲線  $l$  の  $x$  におけるタイプは  $(i', j')$  であるという。

ストークス曲線の定義から、ある通常変わり点  $x_0$  から派生するストークス曲線が、他の単純変わり点  $x_1$  に流れこみ、 $x_1$  での単純変わり点のタイプ

と  $x_1$  でのストークス曲線のタイプが共通の添字を持つような場合、ストークス曲線は  $x_1$  より先に伸びる事はなく、 $x_1$  をもう一方の端点とする事に注意する。

次に、仮想変わり点を定義しよう。仮想変わり点は、「ポレル解を満たす、(対象とする方程式系から定まる) 偏微分方程式系の陪特性曲線の自己交差点」と定義されているが、今回は以下の定義を採用する。 $E$  を考えている方程式系の特異点の集合としよう。例えば、 $NYL_l$  の場合は  $\{0\}$  である。

**Definition** (仮想変わり点)  $x$  がタイプ  $(i, j)$  (但し  $i \neq j$ ) の仮想変わり点であるとは、 $x$  を始点及び終点とする  $C \setminus E$  内の区分的に滑らかな閉曲線  $C$  と  $C$  上の連続関数  $\mu(x)$  が存在し、以下の条件 (1), (2) を満たす時を言う。

1. 各  $x \in C$  に対して  $\mu(x)$  は特性方程式  $\Lambda(\mu, x) = 0$  の根である。また、 $C$  の始点の近傍では  $\mu = \lambda_i$ 、 $C$  の終点の近傍では  $\mu = \lambda_j$  が成り立つ。

2. 積分関係式  $\int_C \mu(x) dx = 0$  が成立する。

定義の条件 (1) は、基本的に  $\lambda_j$  が  $\lambda_i$  の  $C$  に沿った解析接続である事を意味している。但し、もし  $C$  が  $x_0$  でタイプ  $(k, l)$  の通常変わり点を通り、 $\mu(x_0) = \lambda_k(x_0) = \lambda_l(x_0)$  ならば、 $x_0$  で  $\lambda_k$  と  $\lambda_l$  を交換可能である。

さて、仮想変わり点  $v$  に対して、通常変わり点の時と同様の方法で、 $v$  から派生する積分曲線や  $v$  から派生するストークス曲線を定義する事が可能な事は明らかであろう。仮想変わり点から派生するストークス曲線を通常変わり点から派生するストークス曲線と明示的に区別する時には **new Stokes curve** と呼ぶ事にする。また、以後、変わり点と呼ぶ時は通常変わり点、仮想変わり点の区別をしない。

### 3 構成的変わり点

仮想変わり点の定義から直接仮想変わり点を求めるのは困難である。しかし、論文 [AKKSST] によって非常に良いアルゴリズムが提示されている。

変わり点  $x_0$  と  $x_1$ 、それらの変わり点から派生するストークス曲線が一点  $x$  で交っており、 $x$  でのストークス曲線のタイプは、それぞれ  $(i, j)$  と  $(j, k)$  であるとする (添字  $j$  が共通である事に注意する)。積分曲線を考えたときと同様にして  $x$  の近傍で、タイプ  $(i, k)$  に関する実微分形式  $\text{Im}(\lambda_i - \lambda_k) dx$  を考え、 $x$  を通るその積分曲線  $l_{s_0, s_1, x}$  を定める。

**定理 (VTP を求めるアルゴリズム) [AKKSST]**

$l_{s_0, s_1, x}$  上の点  $v$  が以下の積分関係式

$$\int_x^{x_0} \lambda_i - \lambda_j dx + \int_x^{x_1} \lambda_j - \lambda_k dx + \int_x^v \lambda_k - \lambda_i dx = 0$$

を満たせば、 $v$  は仮想変わり点である。但し、すべての積分は対応するストークス曲線に沿って実行するものとする (もちろん、被積分関数も積分路に沿って解析接続されたものを考える)。

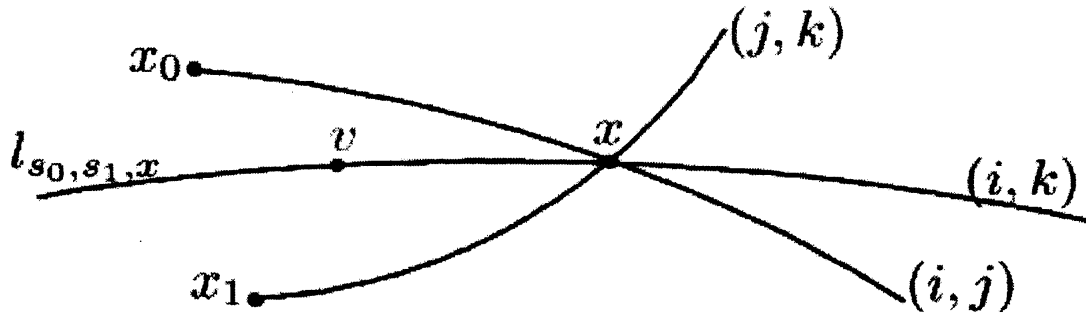


図 1: 仮想変わり点を求めるアルゴリズム

2つのストークス曲線が交わる時、交点上で2つのストークス曲線のタイプに共通添字がない場合、**disjoint** に交わるという。以後、“2つのストークス曲線が交わる”、もしくは、“その交点”とは、交点が **disjoint** でない場合を意味する事にする。

このアルゴリズムを用いると、仮想変わり点のなかでも特に扱い易い構成的変わり点の集合と、構成的変わり点のレベルの概念を導入出来る。 $U$  を  $\mathbb{C}$  内の連結な開集合とする。 $T(U)$  で  $U$  に含まれる変わり点全体の集合とする。また、 $v \in T(U)$  に対して  $S(v)$  で  $v$  から派生するストークス曲線 (の1つ) を表す事とする。

**Definition**  $U$  上の構成的変わり点の集合  $CT(U)$  とは以下の条件を満たす  $T(U)$  の部分集合とする。

1.  $U$  内の通常変わり点は全て  $CT(U)$  に属する。
2. 任意の  $x_0, x_1 \in CT(U)$  と、そのストークス曲線  $S(x_0)$  と  $S(x_1)$  の  $U$  内にある任意の交点  $x$  に対し、VTP を求めるアルゴリズムによる仮想変わり点  $v$  が  $U$  内に存在するとき、 $v \in CT(U)$  (但し、アルゴリズムの積分曲線は  $U$  内の  $x$  を含む連結成分のみを考える)。
3.  $CT(U)$  は (1),(2) を満たす、集合の包含関係に関する  $T(U)$  の極小の集合である (実際は最小の集合)。

$v \in CT(U)$  は通常変わり点から何回か VTP を求めるアルゴリズムを適用すると得られるが、その最小の回数を  $v$  のレベルと呼ぶ。特に通常変わり点はレベル 0 である。レベル  $k$  以下の  $CT(U)$  の元全体の集合を  $CT_k(U)$  で表す。 $CT_k(U)$  は  $CT_0(U)$  から次の規則に従って帰納的に構成されるとしても良い。

規則 任意の  $x_0, x_1 \in CT_k(U)$  とそのストークス曲線  $S(x_0)$  と  $S(x_1)$  の  $U$  内の任意の交点  $x$  に対し、VTP を求めるアルゴリズムで得られる  $U$  内の仮想変わり点  $v$  全体の集合を  $N(U)$  とする。  $CT_{k+1}(U) = CT_k(U) \cup N(U)$  とおく。

$U$  上の変わり点の集合  $T(U)$  の部分集合  $V$  が与えられると、 $V$  に属する任意の変わり点から派生する  $U$  内のストークス曲線 (但し、変わり点を含む  $U$  内の連結成分のみ考える) の全体の集合  $S(V, U)$  が考えられる。 $V$  と  $S(V, U)$  は  $U$  内に1つの幾何を与える。このストークス幾何を  $G(V, U)$  と記すことにする。特に  $V$  が  $U$  上のレベル  $k$  の構成的変わり点の集合  $CT_k(U)$  のとき、 $G(CT_k(U), U)$  を  $U$  上のレベル  $k$  のストークス幾何と呼ぶことにする。

## 4 実線破線決定条件

前節でレベル  $k$  のストークス幾何を導入したが、本節ではそのストークス幾何のストークス曲線に実線部破線部を定める条件を導入しよう。

$s$  を変わり点  $x_0$  から派生するストークス曲線。 $x$  を  $s$  上の点とし、 $s$  の  $x$  でのタイプは  $(i, j)$  とする。

**Definition (タイプに入る順序)**

積分不等式

$$\operatorname{Re} \int_{x_0}^x \lambda_i - \lambda_j dx < 0$$

が成り立つとき、 $s$  の  $x$  でのタイプの順序は  $i < j$  であると表す。

$s_0$  と  $s_1$  は2つのストークス曲線で  $x$  で交わるものとする。 $x$  でのそれぞれのタイプは  $(i, j)$  と  $(k, l)$  であるとする。

**Definition (ordered crossing)** 添字の組  $(i, j)$  と  $(k, l)$  が唯1つの共通な添字を持ち、これらの添字に

$$i < j = k < l, \quad i < j = l < k, \quad k < l = j < i, \quad \text{etc...}$$

のように順序がつくとき (つまり、共通の添字に対して、残りの2つの添字は1つは小さく、1つは大きい)、 $s_0$  と  $s_1$  は  $x$  で **ordered crossing** と言い、それ以外の場合は、non ordered crossing という。例えば

$$i = k, i < j, k < l.$$

これらの概念は実線破線を決定する上で最も基本的な概念であり、[AKT] によって導入された。更に、3本のストークス曲線が1点で交わる場合を考えよう。3つの変わり点  $v, v_0, v_1$  とそれらから派生する3本のストークス曲線  $S(v), S(v_0), S(v_1)$  が1点  $x$  で交わっているとす。

**Definition**  $S(v), S(v_0), S(v_1)$  が、交点  $x$  で結ばれているとは、3つの相異なる添字  $i, j, k$  を用いて、 $S(v_0), S(v_1), S(v)$  の  $x$  でのタイプを  $(i, j), (j, k), (i, k)$  と表す事が出来、更に、次の積分関係式が満たされる時を言う。

$$\int_x^{v_0} \lambda_i - \lambda_j dx + \int_x^{v_1} \lambda_j - \lambda_k dx + \int_x^v \lambda_k - \lambda_i dx = 0.$$

交点  $x$  で結ばれているという関係は、パラメータ  $t$  の変化に対して安定である。つまり、一般的な状況の元で、 $t$  が連続的に動くとき、3つのストークス曲線も連続的に動くが、3本の曲線は常に  $x$  の連続変化点で交わり、そこで結ばれている。3つの変わり点  $v, v_0, v_1$  とそれらから派生する3本のストークス曲線  $S(v), S(v_0), S(v_1)$  が1点  $x$  で交わっているという同じ状況で、

**Definition (Coherent)**  $S(v)$  が  $S(v_0), S(v_1)$  に関して交点  $x$  で coherent とは、

1.  $S(v), S(v_0), S(v_1)$  は、交点  $x$  で結ばれている。
2.  $S(v_0), S(v_1)$  は  $x$  で ordered crossing。

が満たされる時を言う。

$U$  を連結な開集合、 $V$  を  $U$  上の変わり点の集合  $T(U)$  の部分集合、 $S$  を  $V$  の各変わり点から派生する  $U$  内のストークス曲線全体の集合とする。 $G(V, U)$  を以上のデータから構成されるストークス幾何とする。以下常に有限性条件を仮定する。

(有限性条件)  $V$  は有限個であり、 $S$  のストークス曲線達の  $U$  内の交点の個数も有限個である。また、自己回帰的ストークス曲線 (変わり点  $v$  から派生するストークス曲線でその変わり点  $v$  に戻ってしまう) は存在しない。

さて、実線破線を決定する条件を述べるが、まず、重要な注意を述べておく。 $v_1$  と  $v_2$  を変わり点とする。今後、2つのストークス曲線  $S(v_1), S(v_2)$  が幾何的に一致していても  $v_1 \neq v_2$  ならば、 $S(v_1)$  と  $S(v_2)$  は異なるものとする。つまり、ストークス曲線とは、変わり点  $v$  と  $v$  から派生する積分曲線  $s$  との組  $S(v) = (v, s)$  であると考える。 $S(v)$  の幾何的実体である積分曲線を表すときには  $[S(v)]$  と書く事とする。

#### 実線破線決定条件

ストークス幾何  $G(V, U)$  のストークス曲線の実線部、破線分は次の2条件を満たさなければならない。

1. 任意の  $v \in V$  に対して、 $S(v)$  は  $v$  の近傍で
  - (a)  $v$  が通常変わり点ならば実線。



(b)  $v$  が仮想変わり点ならば破線。

2. 任意の  $v \in V$  とそのストークス曲線  $S(v)$  に対して、 $x \in [S(v)]$  で  $S(v)$  の実線、破線が反転するのは次の場合であり、また、次の場合に限る。  
ある変わり点  $v_0, v_1$  とそれらから派生するストークス曲線  $S(v_0), S(v_1)$  が存在し、

(a)  $[S(v_0)], [S(v_1)]$  は  $x$  で交わり、 $S(v)$  は  $S(v_0), S(v_1)$  に関して  $x$  で coherent である。

(b)  $[S(v_0)], [S(v_1)]$  は  $x$  の近傍で実線である。

本稿で提示されているストークス幾何の図は、全てのストークス曲線  $S(v)$  に対して実線破線を決定した結果を平面上に重ね合わせたものを表示している。また、変わり点  $v$  で、 $v$  から派生する全てのストークス曲線が破線の場合は変わり点  $v$  と  $v$  から派生するストークス曲線を表示していない。

## 5 実線破線決定条件の適用例

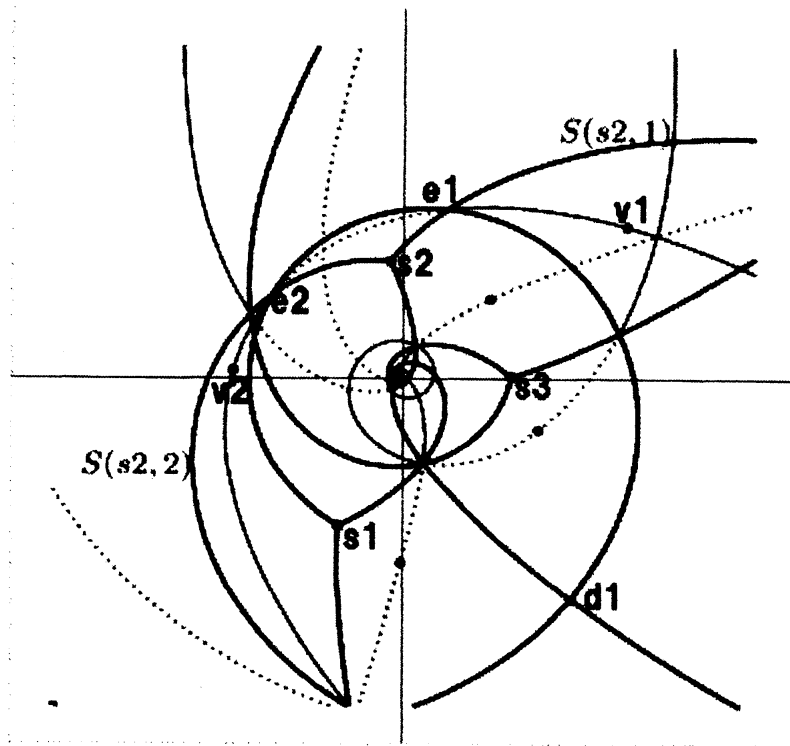


図 2:  $NYL_3$  のレベル 1 のストークス幾何 ( $t = t_1$ )

上図は  $NY_3$  のあるストークス曲線上の点  $t = t_1$  での  $NYL_3$  のレベル 1 のストークス幾何である。 $s_1$ 、 $s_2$  と  $s_3$  は単純変わり点、 $d_1$  は 2 重変わり点で、各変わり点から派生している太い実線はストークス曲線である。その他の  $v_1$ 、 $v_2$  等の点は仮想変わり点、細い実線および点線は new Stokes curves である。仮想変わり点  $v_1$  と  $v_2$  を結ぶ new Stokes curve  $l$  は実線部と破線部からなっている。 $l$  の実線部破線部が実線破線決定条件からどの様に決まるのか見てみる。

まず、変わり点  $d_1$  と  $s_1$  は 1 本のストークス曲線で結ばれている。これは、 $d_1$  から派生し  $s_1$  に至るストークス曲線  $S(d_1)$  と  $s_1$  から派生し  $d_1$  に至るストークス曲線  $S(s_1)$  が幾何的に重なっているからであるが、実線破線決定条件を考える時は  $S(d_1)$  と  $S(s_1)$  は異なるものと考え厳密に区別する事が重要である。同様にして、仮想変わり点  $v_1$  と  $v_2$  は new Stokes curve で結ばれているが、 $v_1$  から派生し  $v_2$  側にのびる new Stokes curve  $S(v_1)$  と  $v_2$  から派生し  $v_1$  側にのびる new Stokes curve  $S(v_2)$  は実線破線決定条件上は異なるものとする。従って、 $S(v_1)$  と  $S(v_2)$  の実線破線部をそれぞれ決定する事になる。

以上の注意のもとで、もう一度図 2 の状況を確認しておこう。変わり点  $s_2$  から右側に派生するストークス曲線を  $S(s_2, 1)$ 、左側に派生するストークス曲線を  $S(s_2, 2)$  としておく (図参照の事)。

1. ストークス曲線  $S(d_1)$ 、 $S(s_2, 1)$  に関してそれらの交点  $e_1$  から求めたレベル 1 の仮想変わり点が  $v_1$  である。言い換えると、 $S(v_1)$ 、 $S(d_1)$ 、 $S(s_2, 1)$  は交点  $e_1$  で結ばれている。また、同様に  $S(v_1)$ 、 $S(d_1)$ 、 $S(s_2, 2)$  は交点  $e_2$  で結ばれている。 $S(d_1)$  と  $S(s_2, 1)$  は  $e_1$  で non ordered crossing、 $S(d_1)$  と  $S(s_2, 2)$  は  $e_2$  で ordered crossing である。
2. 仮想変わり点  $v_2$  に対し、 $S(v_2)$ 、 $S(s_1)$ 、 $S(s_2, 1)$  は交点  $e_1$  で、 $S(v_2)$ 、 $S(s_1)$ 、 $S(s_2, 2)$  は交点  $e_2$  で結ばれている。また、 $S(s_1)$  と  $S(s_2, 1)$  は  $e_1$  で ordered crossing、 $S(s_1)$  と  $S(s_2, 2)$  は  $e_2$  で non ordered crossing である。

さて、 $S(v_1)$  の実線破線部を決定しよう。注意しなければいけない点は、 $S(v_1)$  の実線破線部を決定する為には、 $S(d_1)$ 、 $S(s_1)$ 、 $S(s_2, 1)$ 、 $S(s_2, 2)$  の実線破線部が決まっていけない事である。ここでは、論議を簡単にする為に、既に  $S(d_1)$ 、 $S(s_1)$ 、 $S(s_2, 1)$ 、 $S(s_2, 2)$  は全て実線であることは判っていると話をすすめる。

まず、 $S(v_1)$  は  $v_1$  の近傍では実線破線決定条件より破線である。よって、 $v_1$  から  $e_1$  までは破線である。交点  $e_1$  でどうなるか考える。交点  $e_1$  はストークス曲線  $S(d_1)$  と  $S(s_2, 1)$  の交点であり、また、 $S(s_1)$  と  $S(s_2, 1)$  の交点でもある。このうち、 $S(v_1)$ 、 $S(s_1)$ 、 $S(s_2, 1)$  は交点  $e_1$  で結ばれていないので影響はない。他方、 $S(v_1)$ 、 $S(d_1)$ 、 $S(s_2, 1)$  は交点  $e_1$  で結ばれているが、 $S(v_1)$

は  $S(d1), S(s2, 1)$  に対して  $e1$  で coherent でないから実線破線が反転する事はない。つまり、 $S(v1)$  は  $e1$  の近傍でも破線であり、 $v1$  から  $e2$  に至る部分は破線という事になる。

次に交点  $e2$  を考える。交点  $e2$  はストークス曲線  $S(d1)$  と  $S(s2, 2)$  の交点であり、また、 $S(s1)$  と  $S(s2, 2)$  の交点でもある。このうち、 $S(v1), S(s1), S(s2, 2)$  は交点  $e2$  で結ばれていないので影響はない。他方、 $S(v1), S(d1), S(s2, 2)$  は交点  $e2$  で結ばれており、 $S(v1)$  は  $S(d1), S(s2, 2)$  に対して  $e2$  で coherent、かつ、 $S(d1), S(s2, 2)$  は  $e2$  の近傍で実線である。よって、 $S(v1)$  の実線破線は  $e2$  で反転する事となる。つまり、 $e2$  以降は実線となる。

まとめると、 $S(v1)$  は  $v1$  から  $e2$  までが破線、それ以降は実線である。同様に  $S(v2)$  は  $v2$  から  $e1$  までが破線、それ以降は実線である。図 2 は  $S(v1)$  と  $S(v2)$  を重ねて表示しているの、 $l$  は  $e1$  から  $e2$  の部分が破線でそれ以外は実線という結果になるわけである。

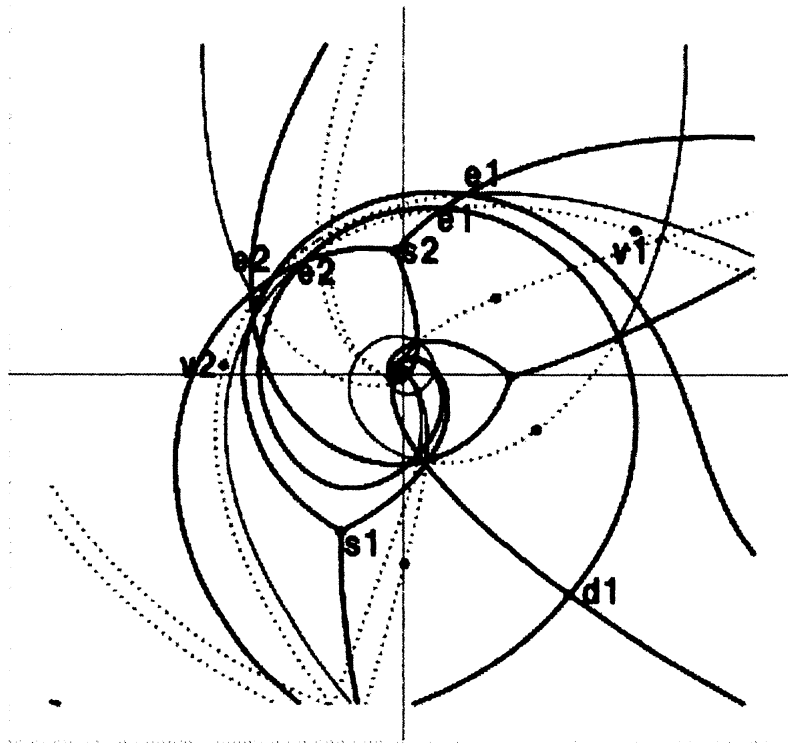


図 3:  $NYL_3$  のレベル 1 のストークス幾何 ( $t = t_2$ )

さて、良い機会であるので、実線破線決定条件が  $t$  の変化に対して安定である事をこの例から見ておく事にしよう。

$t = t_1$  は  $NY_3$  のストークス曲線上の点であったが、 $t$  をストークス曲線から少し離れた点  $t_2$  に変化させてみよう。 $t = t_1$  で重なっていた  $S(d1)$  と  $S(s1)$  は  $t = t_2$  では分離して本来の 2 本のストークス曲線となる。この時、

$S(s_2, 1)$  及び  $S(s_2, 2)$  との交点  $e_1, e_2$  もそれに応じて2つに分離する。大切な点は、3つのストークス曲線がある点  $e$  で（正則横断的に）交わり、それらが  $e$  で結ばれているならば、 $t$  を多少動かしても、やはり3つのストークス曲線は  $e$  が連続的に変化した1点で交わり、その点で結ばれるという関係は保たれる事である。

つまり、 $t$  をストークス曲線からはずすと、 $v_1$  と  $v_2$  を結ぶ new Stokes curves も  $S(v_1)$  と  $S(v_2)$  に分離するが、 $S(v_1), S(d_1), S(v_2, 1)$  及び  $S(v_1), S(d_1), S(v_2, 2)$  は交点 ( $e_1$  と  $e_2$  の連続変化点) で結ばれるという関係を保ちながら変化する。

実線破線の決定は、その交点で結ばれるようなストークス曲線たちのみから決定し、また、ordered crossing、non ordered crossing であるという関係は  $t$  の微小な変化で変わらない。よって、 $S(v_1)$  の実線部及び破線部は、 $t$  が連続的に動くとき、それぞれ連続的に変化し、安定であると考えられる。実際  $t = t_2$  にした時の  $NYL_3$  のレベル1のストークス幾何は図3であり、この図では以上の事実が成立している。

## 6 実線破線決定条件を満たす解の一意性

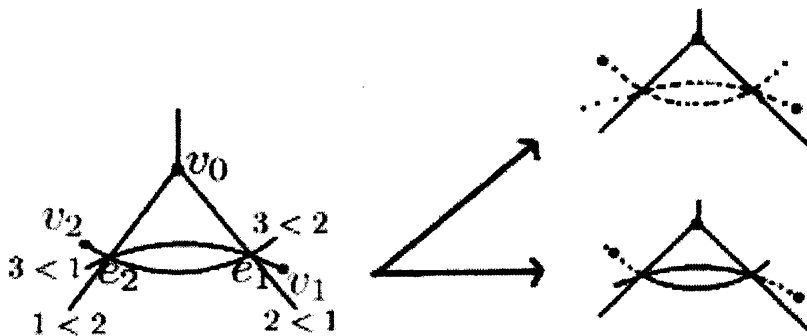


図 4: 一意性の成立しない例

前節の例でも見たように、あるストークス曲線の実線破線を決定しようと考え、その曲線と交差するようなストークス曲線の実線破線が既に決定されていないといけない。しかし、交差するストークス曲線の実線破線を決定するのに、元の曲線の実線破線の情報が必要になる可能性がある。また、仮に元の曲線の実線破線のデータを必要としなくても、順番に決定していこうとすると、決定するストークス曲線の選び方の順番によって実線破線の決まり方が変化する可能性を否定できない。

つまり、実線破線決定条件を適用して実線破線を決定する時は、それぞれのストークス曲線に対し、順番に実線破線決定条件を適用しながら実線破線

を決定していくのは不適切で、連立方程式系を解くように（一挙に）実線破線決定条件をみたす解を見つけ出す必要がある。もちろん、解が存在しない可能性があるし、また、存在したとしても一意でないことは十分にありえる。

この節では、特に重要である実線破線決定条件をみたす解の一意性について考えてみる。まず、解析的な側面を無視しグラフ的な条件のみを考えると、簡単に一意性を満たさないような（架空の）例を作る事が出来る。

図4の左の図がそれである。図の状況を整理しておこう。 $v_0$  から派生するストークス曲線で  $e_1$  を通るものを  $S(v_0, 1)$ 、 $e_2$  を通るものを  $S(v_0, 2)$  とする。

1.  $v_0$  は単純変わり点。 $v_1, v_2$  は仮想変わり点。各ストークス曲線の順序の入り方は図示した通りとする。
2.  $S(v_1), S(v_0, 1), S(v_2)$  は交点  $e_1$  で、 $S(v_1), S(v_0, 2), S(v_2)$  は交点  $e_2$  で結ばれているものとする。

さて、 $S(v_1)$  の実線破線を決定しよう。まず、 $S(v_0, 1)$  および  $S(v_0, 2)$  は実線となる。交点  $e_1$  で  $S(v_1)$  は  $S(v_2)$  と  $S(v_0, 1)$  に関して coherent であるので、 $S(v_2)$  が  $e_1$  の近傍で実線か破線かで  $S(v_1)$  の実線破線が反転するかが決定する。よって、 $S(v_2)$  の実線破線を決定しないとけない。ところで、 $S(v_2)$  の  $e_1$  での実線破線を決定するには、まず、 $e_2$  で  $S(v_2)$  がどの様になるか決定しないとけない。しかし、 $S(v_2)$  は、交点  $e_2$  で  $S(v_1)$  と  $S(v_0, 1)$  に関して coherent なので、 $S(v_1)$  の  $e_2$  での実線か破線かの情報が必要である。この為には、 $S(v_1)$  の  $e_1$  での実線破線の決定が必要で、それはまさしく今考えている問題である。

この様に、この例では順番にストークス曲線の実線破線を決定していく事はできない。さらに、実は、図4の右側に示している通り、この例は2つの解を持つのである。よって、解は存在するが一意的ではない。

この例を多少修正する事で、従来おこなわれてきた、交点から new Stokes curve を描き同時にその曲線の実線破線を決定するという操作を繰り返す方法では、選択する交点の順番で最終的な結果が異なる（架空の）例を構成する事も出来る。尚、この種の例は首藤-池田 ([SI]) でも構成され、同時に具体的問題ではこのような事が経験上起こっていないことも注意されている。

このような病的な事例が現実の問題では（経験上）現れないのは、coherent であるということが、解析性からストークス曲線や仮想変わり点の幾何的配置に束縛条件を課すからであると考えられる。例えば、図4の交点  $e_1$  に関して言えば、仮想変わり点  $v_1$  は  $S(v_1)$  上  $e_1$  の左側になければならない。また、交点  $e_2$  に対しては、 $S(v_0, 2)$  と  $S(v_1)$  に対してストークス曲線  $S(v_2)$  は図のように入る事は出来ないのである。

このような簡単な例では判りやすいが、実際のストークス幾何は非常に複雑になるので、解が存在したとき、その解が一意的である事を確かめるのは絶

対条件と言える。一意性を確かめる最も簡単な方法はもちろん、すべての量が有限なので、しらみつぶしですべての場合を検討することである。しかし、これは現実的ではない。なぜなら、対象とする仮想変わり点や new Stokes curve は有限と言っても非常に多数あり、調べなければいけない場合の数はその数に指数的に依存するからである。

ここでは、グラフ理論で用いられる歩道の概念をストークス幾何的に拡張して一意性の条件を1つ与えよう。

**定義 (ストークス歩道)**  $x$  をあるストークス曲線  $s$  上の一点とする。 $x$  を始点とする  $G(V, U)$  のストークス歩道  $l$  は、次のルール (1), (2), (3) によって定まるものとする。

1. 最初  $x$  の位置にいる。
2. 変わり点もしくは  $U$  の外側に至ったならば、歩道  $l$  はそこで終了する。
3. もし、現在位置があるストークス曲線  $S(v)$  の点  $y$  であるならば、次のどちらかを選択する。
  - (a)  $S(v)$  を変わり点  $v$  の方に進む。
  - (b)  $y$  はストークス曲線達の交点で、変わり点  $v_0, v_1 \in V$  で  $S(v)$  が  $S(v_0), S(v_1)$  に関して  $y$  で coherent となるものが存在するならば、ストークス曲線  $S(v_0)$  もしくは  $S(v_1)$  に移動する (幾何上の位置は変わらないものとする)。

このストークス歩道を用いて一意性条件の1つを与えよう。

**定理 (一意性条件命題)** ストークス幾何  $G(V, U)$  のどの様なストークス歩道も必ず変わり点に到達するならば、 $G(V, U)$  の実線破線決定条件を満たす解は一意的である。

この一意性条件命題と2分検索のアルゴリズム (再帰呼び出しが可能な手続き型言語ならば再帰呼び出しを用いるのが簡単) を組み合わせると解の一意性を効率的に判定出来るプログラムを組む事が可能である。

一意性条件命題は実際の応用の他に理論的にも意義がある。 $G(V, U)$  が一意性条件命題を満たすとき、ストークス曲線上の点  $e$  に対して、 $e$  を始点とするようなあらゆるストークス歩道の深さ (ここで深さとはストークス歩道の通過する coherent な交点の個数とする) の最大値  $d(e)$  を  $e$  の深さと定義する事が出来る。深さ  $d(e)$  は、 $e$  で実線破線を決定するために必要な他の曲線の実線破線のデータへの依存度を表すので、 $d(e)$  を用いることで、有効双方向2分木の有効性に関する様々な性質を証明する事が出来る。

## 7 解を求めるアルゴリズム

実線破線決定条件を満たす解を求める方法を与えよう。ストークス曲線の交点から new Stokes curve  $s$  を描き同時にその  $s$  の実線破線も決定するという操作を各交点に対して順番に実行して行く事で得られた図は、必ずしも実線破線決定条件を満たさない。しかし、この方法を多少拡張し代数方程式の解を求めるときに用いられる反復法も適用する事で、実線破線決定条件を満たす解を求めるアルゴリズムを得る事が出来る。

$G(V_0, U)$  を  $G(V, U)$  の部分ストークスグラフとし、 $V_0$  は  $V$  の全ての通常変わり点を含んでおり、また、 $G(V_0, U)$  のストークス曲線には既の実線破線が定まっているものとする (必ずしも、実線破線決定条件をみたしていなくとも良い)。

解を見つけるアルゴリズム (反復法) 次を反復する。

1. (初期条件)  $S(V, U)$  のストークス曲線で、 $S(V_0, U)$  に属さないストークス曲線はすべて破線と仮定し、 $S(V_0, U)$  に属するストークス曲線は既に定まっている  $G(V_0, U)$  の実線破線をそのまま用いる。このデータを  $G_0(V, U)$  とする。
2. (反復)  $G_k(V, U)$  が定まっているものとする。  $G_k(V, U)$  の実線破線のデータは除いたコピー  $\tilde{G}_k(V, U)$  を用意し、 $\tilde{G}_k(V, U)$  のストークス曲線  $l$  に対し、 $l$  上の各交点で  $l$  と交わるストークス曲線の実線破線のデータが必要なときは  $G_k(V, U)$  の実線破線のデータを用いる事で  $l$  の実線破線を実線破線決定条件から定める ( $l$  が自己交差する場合も例外ではない)。全ての  $\tilde{G}_k(V, U)$  のストークス曲線にこれを実行し (その実行順番は関係ない)  $\tilde{G}_k(V, U)$  の実線破線を定め、これを  $G_{k+1}(V, U)$  とする。
3. (終了条件)  $G_k(V, U)$  と  $G_{k+1}(V, U)$  のすべてのストークス曲線の実線破線部が同じならば終了。

一般に、この反復法が収束する事は期待できない (もちろん、収束するとはこの場合有限回で反復法が終了する事である)。しかし、Newton 法が良い近似から出発すると必ず真の解に収束するように、部分ストークスグラフ  $G(V_0, U)$  の実線破線のデータが実線破線決定条件を満たしているならば、この反復法も収束する事が期待出来る。この観点から各レベル  $k$  のストークス幾何に対して次のように実線破線を決定していく。まず、 $CT_k(U)$  は  $U$  上のレベル  $k$  の構成的変わり点の集合である事を思いだそう。  $U$  上のレベル  $k$  のストークス幾何  $G^{(k)}(U)$

$$G^{(k)}(U) = G(CT_k(U), U)$$

に対して、そのストークス曲線の実線破線は

1.  $G^{(0)}(U)$  の通常変わり点から派生するストークス曲線は全て実線、仮想変わり点から派生するストークス曲線は全て破線。
2.  $k \geq 1$  に対し、 $G^{(k)}(U)$  のストークス曲線の実線破線は  $G^{(k-1)}(U)$  から上に述べた反復法で決定する。

数多くの  $NYL_l$  の具体例を計算しているが、この反復法は極めて早く収束する。また、前節の述べた一意性条件命題の条件を満たさない  $NYL_l$  の例は1つも発見されていない。一般的な  $t$  に対して、coherent 等の条件がストークス幾何に課す幾何的な束縛条件を考慮すると、ストークス幾何は常に一意性条件命題を満たし、また、反復法も収束すると考えられが、この事を証明するにはいたってない。

**Conjecture** 適切な  $U$  と任意の  $k \geq 1$  に対して、 $t$  空間の離散的な例外点が存在し、例外点に属さないような  $t$  に対して、そのレベル  $k$  のストークス幾何  $G^{(k)}(U)$  は一意性条件命題の条件を満たし、上で定めた  $G^{(k)}(U)$  の実線破線決定条件を満たす解を求める反復法は常に収束する。

## 8 これからの問題

前節で述べた Conjecture を示す事の他に、本稿で述べたアルゴリズムの今後考えるべき問題を幾つか述べる事とする。

1. レベル  $k$  が高くなっていった時の  $G^{(k)}(U)$  の定性的性質を調べる。また、レベル  $k$  が増えていった時の極限となるストークス幾何  $G^{(\infty)}(U)$  を定義し、 $G^{(k)}(U)$  との関連を定式化する。
2. ストークス幾何を描くときに限定している領域  $U$  を大きくしていった時の  $G^{(k)}(U)$  の定性的性質を調べる。特に線形方程式  $NYL$  は原点と無限遠が確定特異点でありストークス曲線は対数螺旋を描きながら原点、もしくは無限遠に流れ込む。この事は、原点や無限遠の近傍で、ストークス曲線達の交点が無限個ある事を意味する。この様な有限性の成り立たない領域へアルゴリズムを何らかの意味で拡張する。もしくは、ストークス幾何を考える上で適切な領域は何かを考察しなければいけない。
3. 変わり点は  $t$  が連続的に動くとき連続的に動く。しかし、一般に変わり点が構成的であるという性質は必ずしも保持されない。構成的変わり点は、WKB 解析での意味が見やすく、また、扱いやすい対象であるが、 $t$  の変化に対して不連続的であるという否定的な側面も持つ。本稿でのアルゴリズムは構成的変わり点を対象としているが、非構成的変わり点をどのように取り込むか（ただし、そのような点は非常に沢山あるの



で意味のあるものだけを取り込まなければいけない) を考察しなければいけない。

最後に1つ注意をのべておく。本稿のアルゴリズムは、単純変わり点と2重変わり点の区別をしていない。実際、縮退を説明する有効双方向2分木を対象としている限りこれで問題はないと思われる。しかし、線形方程式のストークス幾何を完全に決定する問題に対しては、次の点で不十分である。

2重変わり点  $d$  から派生するあるストークス曲線と変わり点  $v$  から派生するストークス曲線が交点  $e$  で交わっているとす。さらに、単純変わり点  $s$  から派生するストークス曲線  $S(s)$  が  $e$  を通過するとす。このとき、 $S(s)$  が  $e$  を通過後、破線に反転する事がある(下図参照)。このような場合に特別な考察が必要である事は、論文 [AKoT] によって見いだされ、その中で詳しい考察が与えられている。この事を適切に理解する為には、2重変わり点の構造を反映した仮想変わり点も合せて考えるのが良い。本稿の最後で触れるように我々のストークス幾何はすべてこのように考えた上で描かれている。

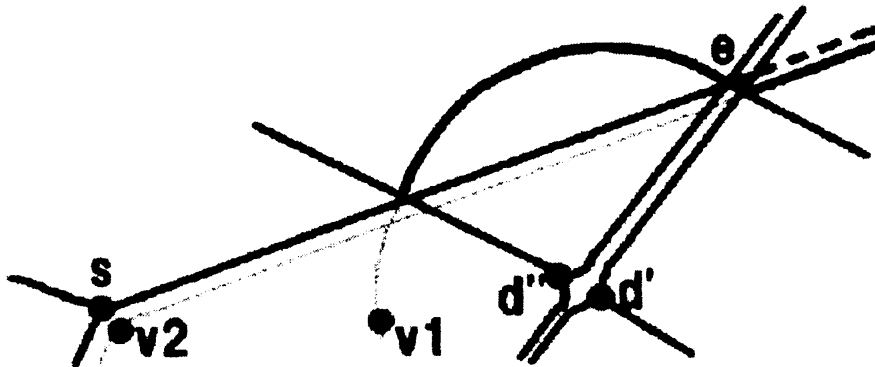


図 5: 2重変わり点の分離

特別な考察が必要になる本質的な理由は、変わり点の定義される空間にある。 $VTP$  を求めるアルゴリズムで2本のストークス曲線の交点から仮想変わり点  $v$  を求めたとき、 $v$  が既存のある変わり点に一致したとする。変わり点の定義空間は  $\mathbb{C}$  の部分空間だから当然同一の点とみなすわけである。特別な場合を除いた一般的な場合、これで良いと考えられる。なぜなら、 $(t, u)$  を微小に変化させても、対応する線形方程式のストークス幾何では同一の点を与え続けるからである。所が、 $(t, u)$  を非線形方程式のリーマン面の外にはずすと同一の点を与えない例外がある。

それは、2本のストークス曲線のうち一方が2重変わり点から派生したストークス曲線の場合である。 $(t, u)$  を非線形方程式のリーマン面からも少しはずし、 $NYL_1$  のストークス幾何を描いてみると、2重変わり点  $d$  は、非常に近い2つの単純変わり点  $d'$ 、 $d''$  に分離する(図5参照)。この結果、 $d$  から派

生するストークス曲線も分離 (分離の方向は  $(t, u)$  の動かし方で異なる方向となる) し、変わり点  $s$  の近傍に構成的仮想変わり点  $v_2$  を定める。この  $v_2$  は、 $(t, u)$  をリーマン面に戻すと  $s$  に合流し一致する。 $v_2$  から派生したストークス曲線も  $s$  から派生するストークス曲線  $S(s)$  に一致する。この極限操作の結果として、 $S(s)$  が  $e$  を通過後も破線に反転する事はないと考えるのである。

つまり、ある変わり点  $s$  のストークス曲線が 2 重変わり点  $d$  から派生するストークス曲線と disjoint でない交点を持つ場合は、 $s$  と幾何的位置が同じ所に ( $s$  と異なる) 仮想変わり点  $v_2$  も存在すると考えるべきである。特に実線破線を決定する上で問題となるのは、 $s$  が通常変わり点の場合である。この場合、 $s$  から派生するストークス曲線と  $v_2$  から派生するストークス曲線は同じ幾何的位置の曲線を実線破線が互いに逆の形で描かれるからである。この観点からの対策は以下の通りである。

各レベルの構成的変わり点の集合  $CT_k(U)$  と、それらから派生するストークス曲線の集合  $S(CT_k(U), U)$  を定める段階で、

1.  $VTP$  を求めるアルゴリズムを適用する 2 つのストークス曲線のうち、その一方が 2 重変わり点から派生するストークス曲線で、求めた仮想変わり点  $v$  がある通常変わり点  $s$  と幾何的位置が一致するときは、 $v$  を  $CT_k(U)$  に新たな仮想変わり点として追加する。もちろん、 $s$  と  $v$  は異なるものとして扱い、種別は仮想変わり点である (つまり、実線破線条件の扱いでは  $v$  の近傍は破線)。既にこの様な追加が行われているときは、新たな追加は行わない。
2. あらたに追加した仮想変わり点  $v$  から派生するストークス曲線は、 $v$  から派生する極大な積分曲線のうち、 $v$  と幾何的位置の異なる 2 重変わり点から派生するストークス曲線と disjoint でない交わりを持つものだけとする。

この方法は、レベル  $k$  の構成的変わり点の集合を変更するだけなので、実線破線決定条件や一意性命題 (とその証明) 等、実線破線の決定部分を全く変更する必要がなく、扱いやすい。本稿の例はすべてこの立場で描かれている (もともと、今回掲載したような単純な例では差異はみられないのであるが)。この点についても完全 WKB 解析の研究が進み、より良い方法が提示される事が望まれるのは言うまでもない。

## 参考文献

- [AH] T. Aoki and N. Honda, 野海・山田系に付随する代数方程式系の解について, この講究録

- [AKKSST] T. Aoki, T. Kawai, T. Koike, S. Sasaki, S. Shudo and Y. Takei, A background story and some know-how of virtual turning points, RIMS Koukyuuroku, No.1424, (2005), 53-64
- [AKT] T. Aoki, T. Kawai and T. Takei, New turning points in the exact WKB analysis for higher-order differential equations, *Analyse Algébrique des Perturbations Singulières, I*, Hermann, (1994), 69-84
- [AKoT] T. Aoki, T. Koike and Y. Takei, Vanishing of Stokes curves, *Microlocal Analysis and Complex Fourier Analysis*, World scientific, (2002), 1-22
- [NY] M. Noumi and Y. Yamada, Symmetry in Painlevé equations, in: C. J. Howls, T. Kawai and Y. Takei eds., *Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear*, Kyoto Univ. Press, 2000, pp. 245-260.
- [Sa1] S. Sasaki, On the role of virtual turning points in the deformation of higher order linear differential equations, RIMS koukyuuroku, No.1433, (2005), 27-64
- [Sa2] S. Sasaki, On the role of virtual turning points in the deformation of higher order linear differential equations II, RIMS koukyuuroku, No.1433, (2005), 65-109
- [SI] S. Shudo and K. Ikeda, 量子エノン写像のストークス現象, RIMS koukyuuroku, No.1133, (2000), 53-67
- [T] Y. Takei, Toward the exact WKB analysis for higher-order Painlevé equations – The case of Noumi-Yamada Systems –, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **40** (2004), 709-730.