数理解析研究所講究録
第1648巻 2009年 149-152

Virtual singularities of the Cauchy problem

Keisuke Uchikoshi
防衛大学校　打越敬祐
e-mail: uchikosh@cc.nda.ac.jp

本稿では，特性的なコーシー問題を複素領域において考察する．なお，研究集会において，山根英司氏らから先行研究について指摘を受けたので，それを参考にして原稿を作成した．

1 序文

$x\in\mathbf{C}^{n}$, $n\geq 2$ および $D=D_{x}=\partial/\partial x$ とする．原点の近傍で正則な係数をもつ m 階の線形偏微分作用素 $P(x,D)=\sum_{|\alpha|\leq m}P_{\alpha}(x)D^{\alpha}$ に対して，つぎの初期値問題を考える:

$$P(x,D)u(x)=0, \tag{1}$$

$$D_{1}^{j}u(0,x')=v_{j}(x'), \qquad 0\leq j\leq m-1. \tag{2}$$

ここで $v_{j}(x')$ も原点の近傍で正則とする．もし $P_{(m,0,\cdots,0)}(0)\neq 0$ なら，普通のコーシー・コワレフスキーの定理により，原点の近くで (1),(2) の正則解がただひとつ存在する．そこで $P_{(m,0,\cdots,0)}(0)=0$ の場合を考えるが，とくに $\psi(0)=0$, $dx_{1}\wedge d\psi(0)\neq 0$ をみたす正則関数 $\psi(x)$ に対して $P_{(m,0,\cdots,0)}(x)$ がちょうど $\{\psi(x)=0\}$ の上で消える場合を考えることにする．

正確に言えば，初期条件 (2) は well-defined ではないので，以下のように考える．原点の小近傍 $\omega\subset\mathbf{C}^{n}$ に対して $Y=\{x\in\omega;\ x_{1}=0\}$, $Z=\{x\in Y;\ \psi(x)=0\}$ とする．$Y\setminus Z$ の各点 $\hat{x}$ において $P_{(m,0,\cdots,0)}(\hat{x})\neq 0$ だから，上のコーシー問題は $\hat{x}$ の近くで一意的な解を持つ．したがって $Y\setminus Z$ の近傍で一価正則な解が存在する．あとでこの解をもっと広い範囲に解析接続するが，とくにこの意味で初期条件 (2) は $Y\setminus Z$ において考えることにする．したがって Z において初期条件が与えられていないことになり，初期値が Z において特異性を持つような初期値問題と見かけ上の類似性を持つ．このように，初期値が Z に見かけ上の特異点を持つ場合，解が実際に特異点を持つこと，またその特異性がどのように伝播するかということを調べる．

この問題は最初 J. Leray [3] や L. Gårding-T.Kotake-T. Kotake [2]，最近では J. Dunau [1] や岡田-山根 [4] が研究した．それによれば，解の特異性は Z を通り，Y に接する特性超曲面

に沿って伝播する．しかし後で説明するように，これらの研究はいずれも解がひとつの超曲面に沿って特異性を持つ場合しか扱っていないので，解がふたつの超曲面に沿って特異性を持つ場合も含めて説明する．

2 特性超曲面ひとつの場合

次の条件を仮定する．

A1. $\psi(x) \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n,0}$ は $\psi(0)=0,\ dx_1 \wedge d\psi(0) \neq 0$ をみたし，

$$\begin{cases} P_{(m,0,\cdots,0)}(x) = & \psi(x)^q P'_{(m,0,\cdots,0)}(x), \\ P'_{(m,0,\cdots,0)}(x) \in & \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n,0} \end{cases}$$

とする．このときまず次の例を考える．

Example 1. $P = x_2 D_1^2 + D_1 D_2$ として，

$$Pu = 0,\ u(0,x') = ax_1^k,\ D_1 u(0,x') = bx_1^l$$

を考える ($\psi(x) = x_2$)．このとき解は

$$u = -\frac{b}{l+2}(x_2^2 - 2x_1)^{(l+2)/2} + \frac{b}{l+2}x_2^{l+2} + ax_2^k$$

である．Z を通る特性曲面は $Z_1 = \{x_1 - x_2^2/2 = 0\}$ と $Z_2 = \{x_2 = 0\}$ であるが，Z_1 は初期集合 Y に接していて，Z_2 は Y に接していない．そして，上の解は $Z_1 = \{x_1 - x_2^2/2 = 0\}$ だけに特異点を持つ．このように，この種の初期値問題の解は，Z を通る特性超曲面のうち，Y に接するものに沿って特異点を持つのである，

この例はつぎのように一般化できる．

Theorem 1. (Leray [3], Gårding-Kotake-Leray [2]). **A1** に加えて次の **A2** を仮定する:

A2 $$\sum_{|\alpha|=m} \left[P_\alpha(x) D_x^\alpha (x_1^{m-1}\psi(x)) \right]_{x=0} \neq 0.$$

このとき Z を通り，Y に接する特性曲面 Z_1 がただ一つ存在して，$u \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\omega \setminus Z_1))$ となる．ここで $\mathcal{R}(\omega \setminus Z_1)$ は $\omega \setminus Z_1$ の普遍被覆空間を表わす．

Gårding-Kotake-Leray の用語では Theorem 1 の場合，Z_1 は通常特異点であり，かれらの一様化理論が適用でき，Theorem 1 が得られる．そこで通常特異点ではない例外特異点が現れる場合が問題となる．これについて，J. Dunau [1] や岡田-山根 [4] の最近の結果がある．たとえば $\psi = -2x_1 + x^2/2$ として，$P(x,D) = \psi(x)D_1^2 - D_1/2$ とする (ただしこのとき条件 **A1** は成立しなくなる)．このとき Z の各点を通る零特性曲線は 1 点になる．これは例外的特異点である

から Leray らの理論は適用できない．$u = -(-2x_1 + x_2^2)^{\frac{3}{2}} + x_2^3$ は

$$\begin{cases} Pu = 0, \\ u(0, x') = 0, \\ D_1 u(0, x') = -3x_2 \end{cases}$$

の解であり，$\omega \setminus Z_1$ 上で多価正則である $(Z_1 = \{\psi(x) = 0\})$．なおこのような方程式は確定特異点形偏微分方程式と類似点を持つ．

しかしいずれにしても，従来の研究は Z を通り，Y に接する特性曲面がひとつしかない場合だけしか扱っていない．

3　特性超曲面ふたつの場合 (主要結果)

以下，2 次元 2 階方程式を考え，方程式の形も限定する．すなわち，$m = n = 2$ として，$P = \sum_{|\alpha| \le 2} P_\alpha(x) D^\alpha$ とする．さらに

A3　　$|\alpha| = 2$ のときは

$$\begin{cases} P_\alpha(x) = \psi(x)^{\alpha_1} P'_\alpha(x), \\ P'_\alpha(x) \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}^2,0}, \\ P'_{(2,0)}(0) \neq 0, P'_{(0,2)}(0) \neq 0 \end{cases}$$

と仮定する．また

A4　　ある $\lambda_1(x), \lambda_2(x) \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}^2,0}$ に対して，

$$\begin{cases} \lambda_1(0) \neq \lambda_2(0), \\ \sigma_2(P)(x,\xi) = \psi(x)^2 P'_{(2,0)}(x)\xi_1^2 + \psi(x) P'_{(1,2)}(x)\xi_1\xi_2 + P'_{(0,2)}(x)\xi_2^2 \\ \qquad = P'_{(2,0)}(x)(\psi(x)\xi_1 + \lambda_1(x)\xi_2)(\psi(x)\xi_1 + \lambda_2(x)\xi_2) \end{cases}$$

と仮定する．このとき

$$\begin{cases} \psi(x) D_{x_1} \varphi_j(x) + \lambda_j(x) D_{x_2} \varphi_j(x) = 0, \\ \Big[\varphi_j(x)\Big]_{\psi(x)=0} = x_1 \end{cases}$$

を解いて，特性関数 $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}^2,0}$ が得られる．そこで

$$Z_j = \{\varphi_j(x) = 0\}$$

とすれば，特性曲面 Z_1, Z_2 は Z を通り，Y に接する．このとき，次の結果が得られる．

Theorem 2. $m = n = 2$ として **A1**, **A3**, **A4** を仮定する．このとき $u \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\omega \setminus Z_1 \setminus Z_2))$ となる．

Remark. このように Z_1, Z_2 は Z を通り，Y に接する特性曲面がふたつ以上存在する場合，それらは例外特異点であり，Gårding-Kotake-Leray [2] の理論は適用できない．

Example 3. 次の初期値問題を考える：

$$\begin{cases} x_2^2 D_1^2 u(x) - D_2^2 u(x) + \zeta D_1 u(x) = 0, \\ u(0, x_2) = A x_2^k, \\ D_1 u(0, x') = B x_2^{k-2}. \end{cases}$$

ただし $\zeta \in \mathbf{C}$ とする．この場合 $Z_1 = \{x_1 = x_2^2/2\}$, $Z_2 = \{x_1 = -x_2^2/2\}$ である．ここで $t = -x_1 x_2^{-2} + 1/2$ として $u = x_2^k w(t)$ とすれば，

$$x_2^2 D_1^2 u(x) - D_2^2 u(x) = 4x_2^{k-2}\{t(1-t)w''(t) + (c - (a+b+1)t)w'(t) - abw(t)\}$$

となる ($a = -k/2$, $b = -(k-1)/2$, $c = (-2k+3-\zeta)/4$)．右辺は超幾何方程式だから，例外的な場合を除いて，$w(t)$ は $\{t \neq 0, 1, \infty\}$ において多価正則である．ここで $t = 0$ は $x_1 = x_2^2/2$ に対応し，$t = 1$ は $x_1 = -x_2^2/2$ に対応する．また $t = \infty$ は $x_2 = 0$ に対応しているが，x の関数としてはこれは除去可能特異点であることがわかる．そこで解は $\{x_1 \neq \pm x_2^2/2\}$ において多価正則であることがわかる．

参考文献

[1] J. Dunau, *Un problème de Cauchy caractŕistique*, J. Math. Pures Appl., **69** (1990), 369–402.

[2] L. Gårding, T. Kotake, and J. Leray *Problème de Cauchy I bis et IV*, Bull. soc. Math. de France, **92**, 1964, 263–361.

[3] J. Leray *Problème de Cauchy I*, Bull. soc. Math. de France, **85**, 1957, 389–429.

[4] Y. Okada and H. Yamane, *A characteristic Cauchy problem in the complex domain*, J. Math. Pures Appl., **75** (1996), 559–567