

距離 k 分割線と一般図形のゾーン図の 存在と一意性について

今井桂子* 河村彰星† 村松悠§ 徳山豪¶

概要

浅野らは二つの図形(站と呼ぶ)の間の二等分線の概念を多等分へ拡張し, また多站間の二等分たるポロノイ図に倣って多站間の三等分たるゾーン図を定義した. 本稿ではユークリッド空間に与えられた幾つかの站に対してゾーン図が唯一存在することを示す. このことは站が平面内の点である場合には知られていたが, 本稿はこれを一般化し且つ短い証明を与えるものである. また二つの離れた站の間に多等分が必ず存在することも示す. いずれの証明も完備束上の単調関数に関する Knaster-Tarski の不動点定理を用いる.

1 はじめに

距離の二等分線(bisector), すなわち二つの図形から等距離にある点の軌跡は, 極めて基本的な概念である. 与えられた二点から等距離の点の軌跡は直線であり, 一点と直線とから等距離の点は抛物線を描く. 計算幾何に頻出するポロノイ図は多点間の二等分線と見ることができる[3, 5].

この二等分を拡張して多等分, 例えば平面上の二点間を k 等分する $k-1$ 本の曲線とは如何なるものであろうか. 一つの答として浅野ら[2]の距離の k 等分(distance k -sector)(以下単に k 等分)がある. これは二等分の定義における等距離条件を素朴に押し広げたものである. すなわちユークリッド空間 \mathbb{R}^d 内の閉集合 P, Q 間の k 等分とは, 空でない集合の列 $C_1, \dots, C_{k-1} \subseteq \mathbb{R}^d$ であって, 各 C_i が C_{i-1} と C_{i+1} とから等距離にある点の軌跡であるもの(但し $C_0 = P, C_k = Q$ とする)をいう.

例えば P と Q とがそれぞれ平面内の一点であるときは, 三等分が唯一存在し, これを構成する二曲線は解析的であることが知られている[2]. 二点間の四等分線を得るには, まず垂直二等分線を引き, 両側をそれぞれ二等分する抛物線を描けばよいが, これが唯一のものか否かは判らない. 全ら[4]は点と直線との間に三等分線が唯一存在すること, 随って二点間に六等分線が存在することを示した(図 1). 図のごとく C_1 と C_5 は有界になる. Reem と Reich [6]は任意の距離空間において二集合間に三等分が存在することを示した. 一般の k 等分の存在も予想されていたが,

* 中央大学理工学部情報工学科, imai@ise.chuo-u.ac.jp

† トロント大学計算機科学科, kawamura@cs.toronto.edu

§ 中央大学大学院理工学研究科, mito@imai-lab2.ise.chuo-u.ac.jp

¶ 東北大学大学院情報科学研究科, tokuyama@dais.is.tohoku.ac.jp

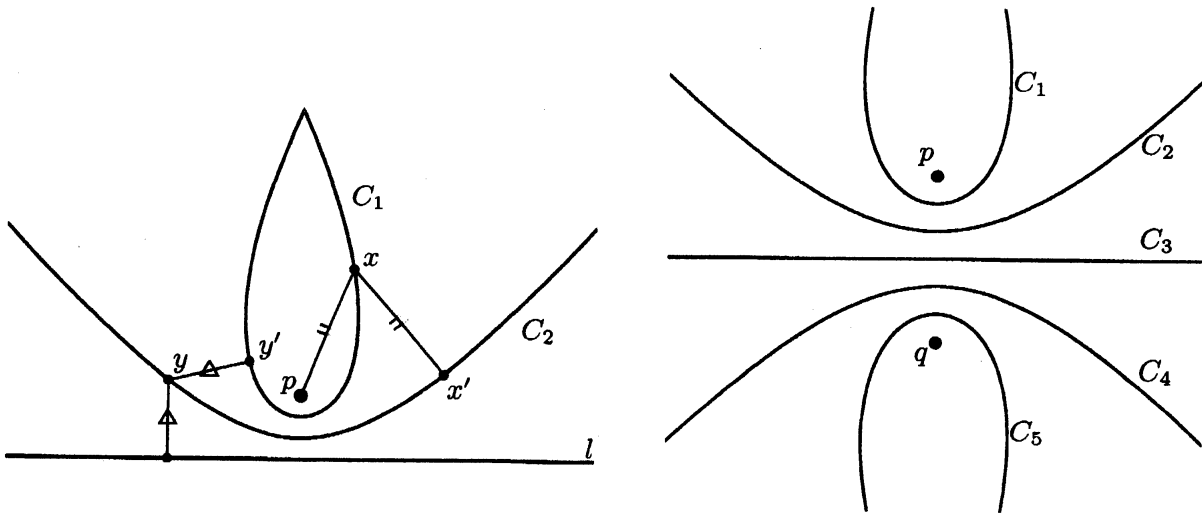


図1 直線 l と点 p との三等分線(左)および二点 p, q 間の六等分線(右).

平面内の二点についてさえ判っていなかった.

ポロノイ図と三等分とを組合せた概念がゾーン図(zone diagram)である[1]. 空でない集合(站[site]という*1) $P_1, \dots, P_n \subseteq \mathbb{R}^d$ に対するゾーン図とは, 次の方程式を満す \mathbb{R}^d の部分集合の列 (R_1, \dots, R_n) をいう.

$$R_i = \text{dom}\left(P_i, \bigcup_{j \neq i} R_j\right) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

但し $(A, B) \neq (\emptyset, \emptyset)$ なる集合 $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ に対して A の B に対する支配域[dominance region] を $\text{dom}(A, B) = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, A) \leq d(x, B)\}$ とし, 集合 X, Y に対しユークリッド距離を以て $d(X, Y) = \inf_{x \in X, y \in Y} |x - y| \in [0, +\infty]$ と定めた. 図2にゾーン図の例を示す. 二つの交らない閉集合に対するゾーン図は距離三等分を与える.

浅野ら[1]は平面上において各站が一点である場合にゾーン図の存在と唯一とを示し, これが一般の次元および站の形状についても成立つと予想した. しかしこの証明は \mathbb{R}^2 の性質を使った場合分けに依っており, 一般化は困難であった.

ゾーン図の定義はそのまま任意の距離空間へ拡張される. Reem と Reich [6]は一般の距離空間において, ゾーン図より緩い条件で定義されるダブルゾーン図(double zone diagram)の存在を示した(本稿3節). 一般距離においては, ゾーン図そのものの存在は証明されておらず, その唯一性に関しては反例がある[6].

本稿ではユークリッド空間において, 上述の予想のうち二つを解決する:

*1 ポロノイ図において一点からなる站は母点と訳することが多いが, 本稿では点に限らないため別の字を採ったことを恕されよ.

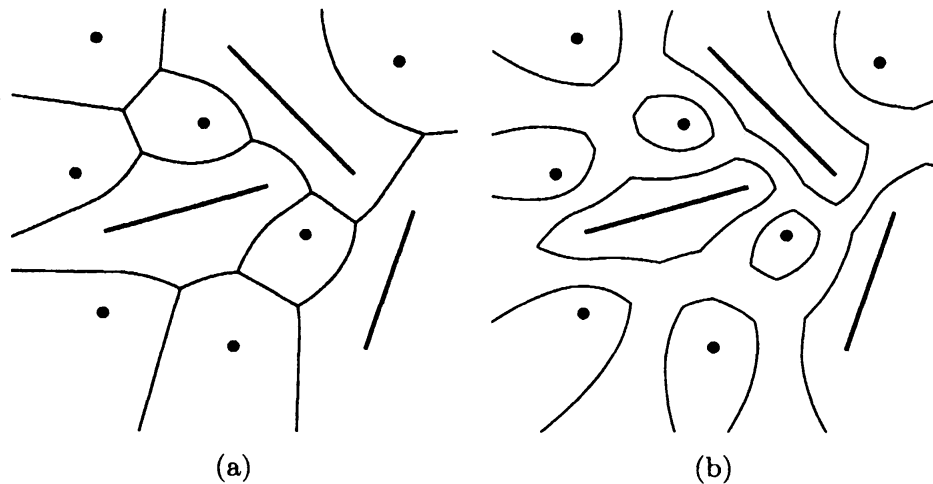


図2 点や線分を站とする(a)ボロノイ図と(b)ゾーン図.

定理 1 空でない部分集合 $P_1, \dots, P_n \subseteq \mathbb{R}^d$ であって, 各 $i \neq j$ について $d(P_i, P_j) > 0$ なるものに対し, ゾーン図が唯一存在する.

定理 2 空でなく互に交らない二集合 $P, Q \subseteq \mathbb{R}^d$ 間には距離 k 等分が存在する.

証明はそれぞれ 3 節および 4.1 節でなされる. 道具となる **Knaster-Tarski の不動点定理** について 2 節で述べる. 4.2 節では, 定理 2 の証明で用いた函数の不動点のうち最小のものが, 束上の昇鎖の上限として書かれることを指摘し, これを求める実験を行う. 5 節では (1) のごとく dom 函数を使った方程式によって層ゾーン図[layered zone diagram]を定義する.

定理 1 として示されるゾーン図の唯一は, $n = 2$ のときでさえ, 各站が一点である場合にしか判っていなかった. また站が点である場合に限っても, 本稿の証明は既存のもの[1, 2]より簡明である.

集合 $R \subseteq \mathbb{R}^d$ の境界と補集合とを ∂R および R^c で表す.

2 完備束と不動点

正の整数 n を固定し, \mathbb{R}^d の部分集合 n 個の列の全体を \mathcal{L} と書く. \mathcal{L} の元 $A = (A_1, \dots, A_n)$ と $B = (B_1, \dots, B_n)$ について, 各添字 i において $A_i \subseteq B_i$ なるとき $A \leq B$ と定める. これは順序である. 部分集合 $S \subseteq \mathcal{L}$ から S への函数 g が単調(ないし反単調)であるとは, 任意の $A \leq B$ について $g(A) \leq g(B)$ (ないし $g(B) \leq g(A)$) が成立つをいう. \mathcal{L} の部分集合 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{L}$ の上界(ないし下界)とは, \mathcal{L} の元 D であってすべての $X \in \mathcal{Z}$ に対して $X \leq D$ (ないし $D \leq X$) なるものをいう. 部分集合 $S \subseteq \mathcal{L}$ が完備束[complete lattice]をなすとは, 任意の $\mathcal{Z} \subseteq S$ の最小上界 $\bigvee \mathcal{Z}$ と最大下界 $\bigwedge \mathcal{Z}$ が S 内に存在することをいう. 文献[6]と同じく本稿でも次の Knaster-Tarski の不動点定理を用いる.

定理 3 ([7]) 完備束 S から S への単調なる函数 g に対し, $\mathbf{R} = \bigwedge \{ \mathbf{Y} \in S : g(\mathbf{Y}) \leq \mathbf{Y} \}$ と $\mathbf{S} = \bigvee \{ \mathbf{Y} \in S : g(\mathbf{Y}) \geq \mathbf{Y} \}$ とはいずれも g の不動点であり, また g の任意の不動点 \mathbf{X} について $\mathbf{R} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{S}$ が成立つ.

以下でこの定理を適用する際には, 次の簡単な dom の性質[1, 6]から単調を示すことになる.

補題 4 dom は左右の引数に関してそれぞれ単調, 反単調である. すなわち任意の $A \subseteq \mathbb{R}^d$ と $X \subseteq X' \subseteq \mathbb{R}^d$ とに対して $\text{dom}(X, A) \subseteq \text{dom}(X', A)$, $\text{dom}(A, X) \supseteq \text{dom}(A, X')$.

3 ゾーン図の存在と唯一性

\mathbb{R}^d の部分集合 n 個の列の全体がなす完備束を S とする(2節). 空でない集合(站)の列 $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n) \in S$ を固定する. 各 $\mathbf{D} = (D_1, \dots, D_n) \in S$ に対して $\text{Dom}(\mathbf{D}) = (E_1, \dots, E_n)$ を

$$E_i = \text{dom}\left(P_i, \bigcup_{j \neq i} D_j\right) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2)$$

で定める. \mathbf{P} のゾーン図とは函数 $\text{Dom}: S \rightarrow S$ の不動点に他ならない[1]. 補題 4 より Dom は反単調であるから $\text{Dom}^2 = \text{Dom} \circ \text{Dom}$ は単調である. Reem と Reich [6]は Dom^2 の不動点をダブルゾーン図と呼び, その存在を定理 3 から示した:

定理 5 ([6]) Dom^2 の不動点 \mathbf{R} と \mathbf{S} とであつて, $\mathbf{R} = \text{Dom} \mathbf{S}$ と $\mathbf{S} = \text{Dom} \mathbf{R}$ とを満し, Dom^2 の任意の不動点 \mathbf{D} に対して $\mathbf{R} \leq \mathbf{D} \leq \mathbf{S}$ なるものが存在する.

これを用いて定理 1 を示そう.

ゾーン図は站の閉包を取っても変わらないので, 站 P_1, \dots, P_n は閉であるとしてよい. 仮定から, どの二つの站も ε 以上隔たっているような正数 ε が存在する.

補題 6 閉集合 P_1, \dots, P_n と上記の ε を考え, \mathbb{R}^d の部分集合 n 個の列 \mathbf{D} と \mathbf{E} とが $\mathbf{D} = \text{Dom} \mathbf{E}$ および $\mathbf{E} = \text{Dom} \mathbf{D}$ を満すとする. 添字 $i \in \{1, \dots, n\}$ と点 $a \in D_i$ とに対し, p を P_i 中で a に最も近い点(の一つ)とする. 点 p を中心とする半径 $\varepsilon/4$ の球と点 a との閉包 $K(i, a, p)$ は D_i に含まれる. (証略)

さて定理 1 を示すには定理 5 の不動点 $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)$ と $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_n)$ とが一致することをいえばよい. しないとせよ. 添字 i_0 と点 $b_0 \in S_{i_0} \setminus R_{i_0}$ とが存在する. ここから各 $t \in \mathbb{N}$ に対して帰納的に添字 i_t と点 b_t, p_t, a_t とを次のごとく定める(図 3). 既に i_t と b_t とが定まったとせよ. 点 $p_t \in P_{i_t}$ を b_t に最も近い点(の一つ)とし, 線分 $b_t p_t$ が境界 ∂R_{i_t} を横る(補題 6 より唯一の)点を a_t とする. 更に $a_t \in \partial R_{i_t}$ と $\mathbf{R} = \text{Dom} \mathbf{S}$ とより, 添字 $i_{t+1} \neq i_t$ と点 $b_{t+1} \in S_{i_{t+1}}$ とであつて $|a_t - b_{t+1}| = |a_t - p_t|$ なるものが存在するのでその一を取る. 各 $t \in \mathbb{N}$ に対して $r_t = |a_t - p_t|$, $s_t = |b_t - p_t|$, $\theta_t = \angle p_t a_t b_{t+1}$ とする.

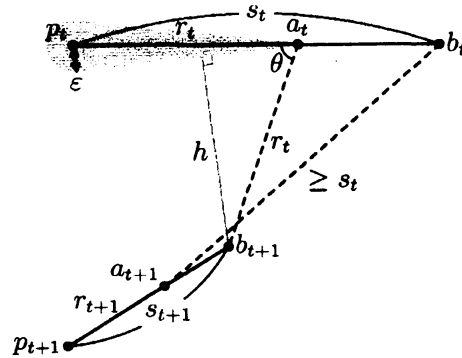


図3 補題6により影の領域は R_{i_t} に含まれる。

まず $a_{t+1} \in R_{i_{t+1}}$, $b_t \in S_{i_t}$, $\mathbf{S} = \text{Dom } \mathbf{R}$ より $|a_{t+1} - b_t| \geq s_t$ であるから

$$\begin{aligned} s_{t+1} - r_{t+1} &= |a_{t+1} - b_{t+1}| \geq |a_{t+1} - b_t| - |b_t - b_{t+1}| \\ &= |a_{t+1} - b_t| - \sqrt{|a_t - b_t|^2 + |a_t - b_{t+1}|^2 + 2|a_t - b_t| \cdot |a_t - b_{t+1}| \cos \theta_t} \\ &\geq s_t - \sqrt{(s_t - r_t)^2 + r_t^2 + 2(s_t - r_t)r_t \cos \theta_t} \geq \frac{r_t(s_t - r_t)}{s_t} (1 - \cos \theta_t) \end{aligned} \quad (3)$$

一方 $b_{t+1} \in S_{i_{t+1}}$, $\mathbf{S} = \text{Dom } \mathbf{R}$ より

$$s_{t+1} \leq d(b_{t+1}, K(i_t, a_t, p_t)) = r_t \sin \min \left\{ \frac{\pi}{2}, \theta_t - \arcsin \frac{\varepsilon}{4r_t} \right\} \leq r_t \sin \min \left\{ \frac{\pi}{2}, \theta_t - \gamma \right\} \quad (4)$$

但し $\gamma = \arcsin(\varepsilon/4r_0) \leq \theta_t$ とし, $K(i_t, a_t, p_t)$ は補題6にいうもの。最後の不等号は $r_0 \geq r_1 \geq \dots \geq r_t$ に由る。

ここで t に依存しない小さい定数 $\lambda \in (0, 1)$ を取り,

$$\begin{aligned} B &= \frac{(1 - \cos \theta_t)^\lambda}{\sin \min \{ \pi/2, \theta_t - \gamma \}} \\ &\geq \begin{cases} \frac{(1 - \cos \gamma)^\lambda}{\cos(\gamma/2)} & \theta_t < \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2} \text{ のとき} \\ \frac{(1 + \sin(\gamma/2))^\lambda}{\sin(\pi/2)} & \theta_t \geq \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2} \text{ のとき} \end{cases} \\ &\geq \min \left\{ \frac{(1 - \cos \gamma)^\lambda}{\cos(\gamma/2)}, (1 + \sin(\gamma/2))^\lambda \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

とする。もし λ が十分に小さければ、最右辺は1を超える定数である。(3)(4)より

$$\frac{(s_{t+1} - r_{t+1})^\lambda}{s_{t+1}} \geq \frac{(s_t - r_t)^\lambda}{r_t^{1-\lambda} s_t^\lambda} B \geq \frac{(s_t - r_t)^\lambda}{s_t} B \quad (6)$$

故に $(s_t - r_t)^\lambda / s_t$ は $t \rightarrow \infty$ において非有界。これは $(s_t - r_t)^\lambda / s_t \leq s_t^{-1+\lambda} \leq (\varepsilon/4)^{-1+\lambda}$ に反する。定理1を得た。

4 距離の等分

空でない集合 $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ の二等分を次で定義する.

$$\text{bisect}(A, B) = \{ z \in \mathbb{R}^d : d(z, A) = d(z, B) \} \quad (7)$$

特に A と B との閉包が交らないとき

$$\text{bisect}(A, B) = \partial \text{dom}(A, B) = \partial \text{dom}(B, A) \quad (8)$$

が成立つことは難しくない.

空でなく互に交らない閉集合 $P, Q \subseteq \mathbb{R}^d$ を固定する. これらの間の k 等分とは \mathbb{R}^d の空でない $k-1$ 個の部分集合の列 (C_1, \dots, C_{k-1}) であって

$$C_i = \text{bisect}(C_{i-1}, C_{i+1}) \quad (i = 1, \dots, k-1) \quad (9)$$

を満すもの(但し $C_0 = P, C_k = Q$)である.

4.1 存在*2

2節と同様に \mathbb{R}^d の部分集合 $k-1$ 個の列の全体を成分毎の包含により順序付けた完備束を \mathcal{L} とする. 各 $\mathbf{D} = (D_1, \dots, D_{k-1}) \in \mathcal{L}$ に対して $F(\mathbf{D}) = (E_1, \dots, E_{k-1})$ を

$$E_i = \text{dom}(D_{i-1} \cup P, D_{i+1}^c \cup Q) \quad (i = 1, \dots, k-1) \quad (10)$$

で定める(但し $D_0 = P, D_k = Q^c$). 補題 4 より F は単調であるから, 定理 3 より不動点 (R_1, \dots, R_{k-1}) をもつ. 次の補題はこの不動点が包含関係による階層 $P = R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots \subseteq R_n = Q$ をなすことを述べている.

補題 7 上で定義した函数 F の任意の不動点 (R_1, \dots, R_{k-1}) は, $0 \leq i < j \leq k$ なる各 i, j について $R_i \cap \overline{R_j} = \emptyset$ を満す. 但し \overline{X} は X の閉包を表す. (証略)

定理 2 を示そう. (R_1, \dots, R_{k-1}) を F の不動点とし, 各 i に対して $C_i = \partial R_i$ とすると, (9) は次により示される.

$$\begin{aligned} C_i &= \partial \text{dom}(R_{i-1} \cup P, R_{i+1}^c \cup Q) \\ &= \partial \text{dom}(R_{i-1}, R_{i+1}^c) = \text{bisect}(R_{i-1}, R_{i+1}^c) = \text{bisect}(C_{i-1}, C_{i+1}) \end{aligned} \quad (11)$$

第三の等号では補題 7 により (8) を適用した. 最後の等号は $a \notin X$ のとき常に $d(a, X) = d(a, \partial X)$ となるため.

*2 本節の一部は Charles 大学の Matoušek 教授との議論による.

4.2 最小・最大不動点

束 \mathcal{L} と函数 F とを上述のものとし、 \mathcal{L} の最小元を $\perp = (\emptyset, \dots, \emptyset)$ で表す。 $\mathbf{D} \leq F(\mathbf{D})$ なる $\mathbf{D} \in \mathcal{L}$ に対し、 $\bigvee \{F^n(\mathbf{D}) : n \in \mathbb{N}\}$ の(成分毎の)閉包を $F^\infty(\mathbf{D})$ で表す。

補題 8 $F^\infty(\perp)$ は F の不動点である。(証略)

任意の不動点 \mathbf{D} は F の単調より $F^\infty(\perp) \leq F^\infty(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$ を満す。故に $F^\infty(\perp)$ は最小の不動点である。既に 4.1 節で定理 3 により最小不動点の存在は判っていたが、これが具体的な形で得られたわけである。同様に $\top = (\mathbb{R}^d, \dots, \mathbb{R}^d)$ から生ずる $F^\infty(\top) = \bigwedge \{F^n(\top) : n \in \mathbb{N}\}$ は最大不動点である。もしこれらが一致すれば F の不動点は唯一である。

この最小不動点 $F^\infty(\perp)$ の下界を、站が一点 $P = \{(0, 1)\}$, $Q = \{(0, -1)\}$ である場合について、各 $k \leq 11$ に対し計算機で求めた。すなわち各 $F^n(\perp)$ の下界 $(D_1^n, \dots, D_{k-1}^n)$ を、原点を中心とする $N \times N$ の柵目 U 上で順に計算した。 U は一辺 δ の正方形の柵からなり、各 D_i^n は U の部分集合である。 $D_i^0 = \emptyset$ より始め、順次 $n \in \mathbb{N}$ について各柵 $a \in U$ が D_i^{n+1} に属するか否かを次のごとく定める。すなわち a を D_i^{n+1} に加えるのは、 a 内のいずれの点より見ても $\bigcup D_{i-1}^n$ への距離が $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup D_{i+1}^n$ への距離よりも小さいことが座標計算により確かめられたときのみ。

この実験を $N = 350$ と幾つかの $\delta = 1/150 \sim 1/15$ とについて行ったところ、 n が大きいとき $(D_1^n, \dots, D_{k-1}^n)$ は、 U の周縁附近以外において、幾つかのずれを除き上下対称な図を与えた。最小不動点 $F^\infty(\perp)$ の下界すら殆ど対称なのであるから、 $F^\infty(\perp)$ とその鏡像 $F^\infty(\top)$ とは極めて近いことが判る。筆者らはこれらが一致すると予想するが、証明は得られていない。

5 層ゾーン図

ゾーン図や距離の等分は函数 dom を使って書かれた方程式の解として得られた。かかる方程式は他にも様々に考えられる。例えば与えられた站 P_1, \dots, P_n に対して方程式

$$R_i = \text{dom}\left(T_i, \bigcup_{j \neq i} T_j\right) \quad T_i = \text{dom}(P_i, R_i^c) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (12)$$

は、站を囲む二重の層 $R_i \supseteq T_i \supseteq P_i$ の満すべき関係を定めている。特に近接した二站の間には四等分線により隔てられる四つの領域が生ずることになる。すなわち (12) の解は、多站間の二等分たるボロノイ図、三等分たるゾーン図を一般化した、多站間の四等分と考え得る。これを四層からなる層ゾーン図と呼ぶことにする。

空間全体は R_1, \dots, R_n に分たれるが、これらが P_1, \dots, P_n 間の単なるボロノイ領域に一致するわけではない。例えば $P_1 = \{(-1, 0)\}$, $P_2 = \{(0, 0)\}$, $P_3 = \{(1, 0)\}$ のとき、 P_2 のボロノイ領域は縦に伸びる帯であるに対し、 R_2 は図 4 のごとく有界にならざるを得ないことが容易に判る。

層ゾーン図が必ず存在するか否かは判らない。しかし定理 5 と同様の意味で層ダブルゾーン図ともいうべきものの存在は、やはり定理 3 から容易に随う。これを使って層ゾーン図の存在が示され

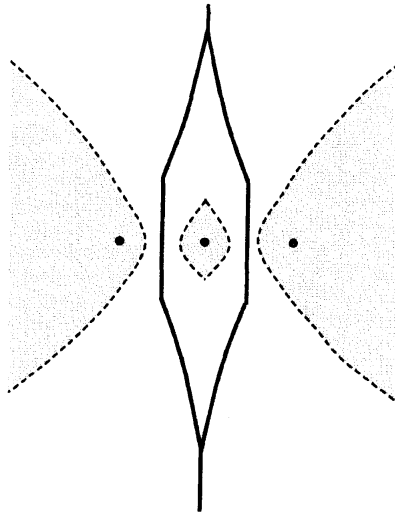


図4 三点間の四層の層ゾーン図. 灰色が T_i , 白が R_i .

るのではないかと期待している.

参考文献

- [1] T. Asano, J. Matoušek, and T. Tokuyama. Zone diagrams: Existence, uniqueness, and algorithmic challenge. *SIAM Journal on Computing*, 37(4):1182–1198, 2007. Extended abstract in *Proceedings of the 18th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 756–765, 2007.
- [2] ———. The distance trisector curve. *Advances in Mathematics*, 212(1):338–360, 2007. Extended abstract in *Proceedings of the 38th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 336–343, 2006.
- [3] F. Aurenhammer. Voronoi diagrams—a survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Computing Surveys*, 23(3):345–405, 1991.
- [4] J. Chun, Y. Okada, and T. Tokuyama. Distance trisector of segments and zone diagram of segments in a plane. In *Proceedings of the 4th International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering*, pages 66–73, 2007.
- [5] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, and S. N. Chiu. *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. Wiley, second edition, 2000.
- [6] D. Reem and S. Reich. Zone and double zone diagrams in abstract spaces. *Colloquium Mathematicum*, 115(1):129–145, 2009.
- [7] A. Tarski. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. *Pacific Journal of Mathematics*, 5:285–309, 1955.