

力学系のスケール変換と相互作用グラフ

加藤 毅

December 1, 2007

1 Introduction

ここでの研究は、分子生物学の数理的側面のうち、離散力学系の観点に刺激を受けてきたものである。そこで、その構造の一つの側面について簡単に述べる。生体现象の中で、体内時計や皮膚に現れる模様など、マクロレベルに見られる様々なパターンは、原理的には分子レベルのサイズでの相互作用からなるシステムの階層から構成され、分子レベルからスケールを変えることで、例えば人の視点から見るとパターンが観察される。現在では生物学において DNA を対象とする分子生物学を基本的な道具として、上で述べたようなマクロな生体现象を、分子レベルの相互作用から理解しようという方向性が大きな流れとなっている。

分子間相互作用システムは、物理化学的にはそれぞれの分子の持つ電子のやり取りによって起こる化学変化であり、ミクロにおいて電子軌道は一般には確定できないという意味でランダムである。このように、ミクロなレベルでランダムなものが積み重なって、それらをマクロな視点から見れば安定したパターンを形成しているのである。ミクロからマクロへ至る一連の現象を、対象のサイズやそれらの性質によって大きく三つの段階に分けることができ、ミクロとマクロの間にあるタンパク質間相互作用システムのサイズは、メソスコピックと呼ばれている。メソスコピックでは、電子のやり取りのようなミクロな部分よりはむしろ分子間相互作用の階層に注目し、そこから形成されるマクロなパターンを理解することを目指している。対象のサイズの大きさ、ミクロ、メソスコピック、マクロそれぞれに対応して数理的特徴に違いが現れる。メソスコピックにおいて、現在のところ基本とされる確立された数学的な手法はまだ存在していないが、その特徴は極めて離散的または組み合わせ論的な側面が強く、例えばオートマトンや離散力学系などが相性がよいと思われる。

幾何学的群論や、離散力学系、熱帯幾何学に現れるオートマトンなど、離散数学は幾何学や力学系の立場から、非常に豊かな数学的素材であることが分かってきている。それらの解析において、一つの方向性は、無限遠点での挙動を見ることによって、これまで深く発展されてきた多様体論、偏微分方程式や作用素環論などに結び付け、それら離散の対象を解析していくものである。すなわちある種のスケール変換を施すことで、離散的な対象をより扱いやすい別の数学の対象に帰着させていく手法である。このように、上で述べたようなメソスコピックからマクロへの生物学での流れは、離散的な対象のスケール変換としてみると、離散数学の手法と平行している側面がある。

幾何学的群論においては、オートマチック群またはオートマタ群と呼ばれる離散群のクラスについて、エプシュタインやサーストン達またはグリゴルチャック等により組織的に研究が行われてきている。また、熱帯幾何学においては、有理多項式で定められた離散力学系を、ある種のスケール変換を施すことで、セルオートマトンで定まる力学系に変換する手法が発展してきている。そこではこれまで無限可積分系で扱われてきた多くの対象がセルオートマトンに還元され、それらオートマトンの性質をもとの可積分系の情報から解析する手法が使われている。一方で、生体现象に現れる現象は必ずしも可積分ではないことから、熱帯幾何学などのスケール変換の、非可積分力学系へのある種の摂動が必要とされるが、それについて現在研究中である。

ここでは、ファミリーの連続写像から構成される力学系の繰り返し写像に、ある種のスケール変換を施すことで、オートマトンによる力学系を得る手法を定式化し、その性質を調べる。一般に写像の繰り返し軌道は、繰り返しの回数が十分大きいときにその値が予測できない、という意味でランダムである。一つの連続写像について、その繰り返し軌道を上で述べた電子軌道に対応させてみると、ファミリーの写像についての繰り返し軌道を相互作用とみなすことができる。さらに各軌道について、射影作用素を用いると、その像は一般に記号力学系へと変換されるが、元の連続写像がある性質を持たず時、その記号力学系はオートマトンへと還元されることが分かっている。この操作は、細かい情報を捨て大まかなものを拾い上げるという意味で、その力学系をよりマクロにスケール変換したといえる。一般に、ファミリーの連続写像の繰り返し力学系の射影として得られる離散力学系から、無限樹木の自己同型部分群が得られる。例えば、グリゴルチャックらによるオートマタ群のあるクラスが、このようにして構成される群として与えられることが分かっている。また、熱帯幾何学の手法により可積分系から得られる多くのセルオートマトンは、ファミリーの連続写像の繰り返し力学系の射影として得られることも分かっている。

オートマトンの近傍での力学系としての振る舞いは、オートマトン自身の安定性にも関わる重要な対象であるが、それは有限データで定まるため、

その近傍での摂動はそのままでは難しいが、オートマトンをファミリーの連続写像の繰り返し力学系の射影として与え、もとの連続写像を摂動することで、オートマトンの近傍の力学系を考察することが可能である。繰り返し力学系は、それ自身これまで解析的に深い研究がなされており、例えばエントロピーを用いてその力学系としての大域的な振る舞いが理解されてきた。その手法を、射影することでオートマトンの力学系としての大域的な性質の研究に用いること、すなわち連続写像間の相互作用を解析的に調べ、それらをスケール変換することでオートマトンなどの大域幾何学的な性質を理解することが、ここでの研究の方向性である。

第2,3節は [K3], 第4節は [K5], 第5節は [K4], 第6節は [K6], 第7節は [K4] からとった。また、[Ko], [UK 3] に日本語で解説を書いた。

2 ミクロなスケールにおける写像の繰り返しと合成

さて、 $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ を連続な写像とする。この時、その繰り返し：

$$\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots, f^n(x), \dots\}$$

の軌道は n が十分大きい時に予測不可能という意味でランダムである一方で、その解析的な研究は力学系の分野で深く成されている。ここでは、その軌道 $\{f^n(x)\}_{n=0,1,\dots}$ を一つの分子の電子軌道に対応させて、それらの間の相互作用を定め、それらをマクロな視点から見てみる。

ここで、二つの写像：

$$f_0, f_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

をとり、それらの繰り返しを次のようにあらわす。

$$O_{f_0}(x) = \{f_0^k(x)\}_{k=0,1,\dots}, \quad O_{f_1}(x) = \{f_1^k(x)\}_{k=0,1,\dots}$$

ここでは、それらを *oscillatins* と呼ぶ ([K3])。

今、片側符号力学系を：

$$X_2 = \{(a_0, a_1, \dots) : a_i \in \{0, 1\}\}$$

であらわす。その時、各元 $\bar{k} = (k_0, k_1, \dots) \in X_2$ に対して、ファミリーの区間写像：

$$\{h^m(x)\}_{m=0,1,\dots}, \quad h^m : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

を次で定める：

$$h^m(x) \equiv f_{k_m} \circ f_{k_{m-1}} \circ \dots \circ f_{k_0}(x).$$

h^m は (x, \bar{k}, f_0, f_1) で定まることに注意したい。

今、

$$\pi : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$$

を、 $\pi([0, \frac{1}{2})) \equiv 0$ 、 $\pi([\frac{1}{2}, 1]) \equiv 1$ とおく。この時、各 $x \in [0, 1]$ について π と h^k を合成することで a.e. x に対して別の X_2 の元：

$$\pi((h^1(x), h^1(x), \dots)) \equiv (\pi \circ h^0(x), \pi \circ h^1(x), \dots) \in X_2$$

を得る。則ち、 (x, f_0, f_1) を固定すると、 $\bar{k} \in X_2$ に対して、

別の元 $\pi((h^1(x), h^1(x), \dots)) \in X_2$ が定まった。これにより、次の写像：

$$\Phi(x, f_0, f_1) : X_2 \rightarrow X_2$$

が $\Phi(x, f_0, f_1)(\bar{k}) \equiv \pi((h^0(x), h^1(x), \dots))$ で定まるが、それをここでは interaction map と呼ぶ。Interaction map は一般には連続な写像であるが同型ではない。そのような性質は、点 $x \in [0, 1]$ の取り方に依存している。

さて、 $\Phi(x) \equiv \Phi(x, f_0, f_1)$ の繰り返し：

$$\{\Phi(x)^t(\bar{k})\}_{t=0,1,\dots} \subset X_2$$

を考えてみよう。これにより、二つのパラメーターが現れたことになる。Oscillation $\{f^n(x)\}_{n=0,1,\dots}$ の n と、上の t である。 $\Phi(x)$ という写像は、 f_0 や f_1 のすべての n についての値 $\{f_0^n(x), f_1^n(x)\}$ がある程度分らないと定まらない。‘ある程度’ といったのは、その π による像が分かっていたら良いので、いってみれば、それらの間の相互作用の ‘おおまかな形’ が分かれば良いといえる。その意味で、 t のスケールは n のものより大きく、 $\Phi(x)$ という写像から導かれる幾何学的な性質の中に、始めに述べた「マクロなパターン」を見つけることがその原理に対応するであろう。

2.B 一般化： f_0 と f_1 の二つの元による相互作用は、よりたくさんの写像どうしの相互作用に一般化することができる。

(1) f_0, \dots, f_{l-1} を l 個の写像とする。同様に、 $\pi : [0, 1] \rightarrow \{0, 1, \dots, l-1\}$ を $\pi(\frac{i}{l}, \frac{i+1}{l}) = i$, $i = 0, \dots, l-1$ で定める。この時、 $X_l = \{(k_0, k_1, \dots), k_i \in \{0, 1, \dots, l-1\}\}$ を用いると、同様に $(\{f_i\}_{i=0}^{l-1}, \bar{k})$, $\bar{k} \in X_l$ にたいしてファミリーの写像、 $\{h^n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]\}_n$ が定まる。すると、 $x_0 \in [0, 1]$ にたいして、 $\Phi(x_0) : X_l \rightarrow X_l$ を $(k_0, k_1, \dots) \rightarrow (\pi(h^0(x)), \pi(h^1(x)), \dots)$ で定める。ここで、 $h^n = f_{k_n} \circ \dots \circ f_{k_0}$.

(2) $l = \infty$ の場合

$f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z}$ をとると、 $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ が $\pi(i, i+1) = i$ で定まる。これを用いて、同様の構成により、 $\Phi(x_0): X_\infty \rightarrow X_\infty (x_0 \in \mathbb{R})$ が定まる。

$\{f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in \mathbb{Z}}, x_0 \in \mathbb{R}$ にたいして、

$$\bar{\Phi}(x_0): \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$$

が、 $(y_0, y_1, \dots) \mapsto (h^0(x_0), h^1(x_0), h^2(x_0), \dots, h^n(x_0), \dots)$ でつくられる。ただし、 $\{h^n\}_n$ は $(\{f_i\}_i, \bar{k})$ に対応し、 $\bar{k} = (k_0, k_1, \dots) \in X_\infty, k_i = \pi(y_i)$ 。

Lemma 2.1. 次の可換図式が成り立つ

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Phi}(x_0): \mathbb{R}^\infty & \mapsto & \mathbb{R}^\infty \\ & \downarrow \pi & \downarrow \pi \\ \Phi(x_0): X_\infty & \mapsto & X_\infty \end{array}$$

Remark:

[1] $Y \subset X_l \subset X_\infty$ に制限して $\Phi(x_0): Y \rightarrow Y$ となることがある。

(BBS \hookrightarrow CA(LV))

[2] $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 連続とすると、 $f_i(x) \equiv f(i, x), (i \in \mathbb{Z})$ とおくことで、 $\Phi(x_0): X_\infty \rightarrow X_\infty$ ができる。

3 マクロなスケールにおける自己同型群と可積分系

3.A 自己同型群: 今、 $x \in [0, 1]$ が正則 (regular) であるとは、 $\Phi(x, f_0, f_1): X_2 \cong X_2$ が同型写像を導くときをいう。 $R(f_0, f_1) \subset [0, 1]$ で正則な点全体をあらわす。この時、

$$G = \text{gen} \{ \Phi(x, f_0, f_1) : x \in R(f_0, f_1) \} \subset \text{Aut } X_2 = \text{Aut } T_2^*$$

を正則な $\Phi(x, f_0, f_1)$ で生成される X_2 の自己同型部分群とする。 G はファミリーの写像のみにより定まる。 $\text{Aut } T_2^*$ は非常に大きい群であることが知られており、一般には G は非常に大きいか、または空集合かもしれない。

まずは、 G の構成の一般化を述べる。

四つの写像を用いて、オートマトン型の相互作用に一般化することにより、上と同様な群 G を構成することができる。この時次のことが分かる：

Theorem 3.1. $f_0, f_1, \alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ がそれぞれ次の条件を満たしているとする。

$$0 \leq \alpha(x) < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < \beta(x) \leq 1, \\ \begin{cases} \frac{1}{2} < f_0(x) \leq 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 \leq f_0(x) < \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq f_1(x) < \frac{1}{2}, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} < f_1(x) \leq 1 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

この時、対応する Φ から作られる $Aut_0 T_2$ の部分群 G は、同型：

$$G \cong [\oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}] \rtimes \mathbb{Z}$$

が成立する。特に G はエルゴートの ∂X_2 に作用する。後者の群はランプライター群と呼ばれている。

3.B 可積分系：次に、可積分系で良く知られている、Lotka Volterra 方程式：

$$\frac{d}{dt} u_n = u_n(u_{n+1} - u_{n-1})$$

を扱う。これを離散化、さらには超離散化することで、次の Lotka Volterra cell automaton:

$$v_n^{t+1} - v_n^t = \max(0, v_{n+1}^t - L_0) - \max(0, v_{n-1}^{t+1} - L_0)$$

を得ることができ、この解はソリトンを持つことが知られている。

さて上では、 $\pi : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ を用いたが、もう少し細かく、 $\pi_L : [0, 1] \rightarrow \{0, 1, \dots, L-1\}$ を全く同様に定めることができる。また、 $X_L = \{(a_0, a_1, \dots) : a_i \in \{0, 1, \dots, L-1\}\}$ と置くことで、片側符号力学系のアルファベットの数を増やしておく。この時、 l^2 個の写像 $\{f_{ij} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]\}_{i,j=0,\dots,l-1}$ を用いて、セルオートマトン型の相互作用 $\Phi(x) : X_l \rightarrow X_l$ に拡張することができる ([Ko])。

$\Phi(x)$ の繰り返しを

$$\Phi^t(x)(\bar{k}) \equiv (k_0^t, k_1^t, k_2^t, \dots) \in X_l \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

とおく。これを相互作用のフロウとよぶ。 v_n^t と上の k_n^t を対応： $v_n^t \iff k_n^t$ させることで、次が成り立つ：

Theorem 3.2. $f_{i,j}$ が以下を満たすとする。ただし $F(i, j) = i + \max(0, j - L_0)$ 。

$$\begin{cases} \frac{F(i,j)-1}{L} < f_{i,j}(x) < \frac{F(i,j)}{L} & 0 \leq x < \frac{L_0-1}{L} \\ \frac{F(i,j)-m-1}{L} < f_{i,j}(x) < \frac{F(i,j)-m}{L} & \frac{L_0-m+L_0-1}{L} < x < \frac{L_0+L_0-m}{L}, \quad m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

このとき、相互作用写像のフロウはロトカボルテラセルオートマトンの解。特に n -ソリトンを含む。

これによりファミリーの写像から次のスケール変換が得られた。

$$\bar{\Phi}(x) : [0, 1]^\infty \longrightarrow [0, 1]^\infty \quad \underline{\text{くり返し力学系}}$$

↓ 射影

$$\Phi(x) : X_l \longrightarrow X_l \quad \underline{\text{記号力学系}}$$

∪

ロトカボルテラセルオートマトン 超離散可積分系

4 エントロピー

4.A 相互作用エントロピー：このように、特別な写像のファミリーを用いることで、可積分系やオートマタ群の樹木への作用などを構成することができる。生物学の見地からは、これらミクロシステムに多少の揺らぎがあっても、マクロなシステムが安定でなければ長い時間生体を維持することはできない。そこで、ファミリーの写像の構造安定性を研究することは自然といえる。第一ステップとして、位相的エントロピーを考えよう。ここでは本質的に二つのエントロピーを考える必要がある。則ち、ミクロにおいて、ファミリーの写像の相互作用のエントロピー、そしてマクロにおいて、それらから構成された相互作用写像 Φ のエントロピーである。概念的には、ミクロにおけるエントロピーは値が高く相対的にマクロなほうは低いことが、パターン形成を計るある程度の目安になるであろう。

$f_0, f_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ とし、 $\Phi(x) : X_2 \rightarrow X_2$ を相互作用写像とする。今、ファミリーの相互作用写像を

$$\Phi : X_2 \times [0, 1] \rightarrow X_2 \times [0, 1]$$

$\Phi(\bar{k}, x) = (\Phi(x)(\bar{k}), x)$ で定める。

一般に、距離空間 (Y, d) とその上の連続写像 $f : Y \rightarrow Y$ に対して、位相的エントロピー $h_t((Y, d), f) \in \mathbb{R}$ が定まる。一般に、マクロな相互作用写像とミクロなファミリーの写像の両方の性質が反映するエントロピーをここでは定める。

Definition 4.1. f_0, f_1 の相互作用エントロピーを、 Φ の位相エントロピーで与える：

$$h_t(f, g) = h_t(\Phi).$$

f_0, f_1 二つの写像から作られる相互作用写像 $\Phi(x)$ について、 $\Phi(x)(\bar{k}) = (k'_0, k'_1, \dots)$ とおくと、 k'_i が (k_0, \dots, k_i) で決まってしまうことから、単独の相互作用写像の位相的エントロピー $h_t(\Phi(x))$ は自明になることが分かっている。一方で、Lotka Volterra cell automaton などの場合は、 k_{i+1} までの情報、つまり一つ先のことで分かっていないと k'_i が定まらない。このことによりその位相的エントロピーは自明ではなくなる。このことと、ソリトン形成になにか関係があれば面白い。

ソリトンは数理物理の様々な場面で発見されている極めて重要な現象であり、その形成のメカニズムを理解することは大問題であると思われる。ファミリーの写像から作られた相互作用写像の「ソリトン具合」（つまりどのくらいソリトンの持つ性質に近い）を計るようなエントロピーを構成することが望まれるが、それはおそらくは位相的エントロピーより細かい情報を必要とするように思える。

4.B 情報エントロピー： $f_1, \dots, f_a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ を写像のファミリーとし、 $\pi : [0, 1] \rightarrow \{1, \dots, a\}$ をこれまでのような射影とする。このとき、

$$\Phi : [0, 1] \times X_a \rightarrow [0, 1] \times X_a, \quad (x, \bar{k}) \mapsto (x, \Phi(x)(\bar{k}))$$

とおく。

$$\begin{aligned} \bar{X}(f_1, \dots, f_a) &:= \{(\bar{k}, \Phi(x)(\bar{k}), x) : x \in [0, 1], \bar{k} \in X_a\} \subset X_a \times X_a \times [0, 1], \\ \bar{X}(\{f_i\}_i; \bar{k}) &= \{(\Phi(x)(\bar{k}), x) : x \in [0, 1]\} \subset X_a \times [0, 1] \end{aligned}$$

で定める。 $\bar{X}(f_1, \dots, f_a)$ には、 Φ の写像としての全ての情報が入っているので、この空間の力学系としての性質を調べることがここでの目的である。

$\sigma(k_0, k_1, \dots) = (k_1, k_2, \dots)$ で定める時、 $\bar{X}(f_1, \dots, f_a)$ 上の自然なシフト $\bar{\sigma}$ が次で決まる：

$$\bar{\sigma} : \bar{X}(\{f_i\}_i) \rightarrow \bar{X}(\{f_i\}_i), \quad \bar{\sigma}(\bar{k}, \bar{l}, x) = (\sigma(\bar{k}), \sigma(\bar{l}), f_{k_0}(x))$$

このとき、リブシッツファイブレーション：

$$\bar{X}(\{f_i\}_i; \bar{k}) \hookrightarrow \bar{X}(\{f_i\}_i) \twoheadrightarrow X_2$$

が得られるが、Bowen のファイブレーション定理により、不等式：

$$h_t(X_a) = \log a \leq h_t(\bar{X}(\{f_i\}_i)) \leq \log a + \sup_{\bar{k} \in X_a} h_t(\bar{X}(\{f_i\}_i; \bar{k}))$$

が与えられる。

これにより、 $h_t(\bar{X}(\{f_i\}_i))$ を評価するためには、 $h_t(\bar{X}(\{f_i\}_i; \bar{k}))$ の評価が得られれば良い。そのために、ここでは情報エントロピーを用いた評価について述べる。大雑把にいて、その主な手法は凸解析とエルゴート理論である。 $(\bar{Y}(\{f_i\}_i), \bar{k}) = \{\Phi(x)(\bar{k}), x \in [0, 1]\} \subset X_a$ とおく。

$(X_a)_n = \{1, 2, \dots, a\} \times \dots \times \{1, 2, \dots, a\} = \{1, 2, \dots, a\}^n$ 、 $X_a^0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X_a)_n$ を有限ワード全体とする。

写像 $\varphi_0 : (X_a)_n \rightarrow X_t^0$ が与えられた時、その符号化写像 $\varphi : X_a \rightarrow X_t$ を、 $(k_0, k_1, \dots) \mapsto (\varphi(k_0, \dots, k_{n-1}), \varphi(k_n, \dots, k_{2n-1}), \dots)$ と自然に定めておく。この時、 φ の性質をエントロピーを用いて理解することが目的である。

μ_0 を $[0, 1]$ 上の標準測度とする。また、 $f_1, f_2, \dots, f_a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ をファミリーの写像とすると、対応する相互作用の写像 Φ について、制限することで、 $\Phi(X) : (X_a)_n \rightarrow (X_a)_n \quad \forall n$ が得られる。 $\bar{x}_n, \bar{y}_n \in (X_a)_n$ について、

$$P(x_n, y_n) \equiv \{X \in [0, 1] : \Phi(x)(\bar{x}_n) = \bar{y}_n\} \subset [0, 1]$$

とおく。 \bar{x}_n を固定したとき、 $(X_a)_n$ 上誘導された測度を、

$$Q(\bar{x}_n \bar{Y}_n) \equiv \mu_0(P(\bar{x}_n, \bar{Y}_n))$$

で定める。

Definition 4.2. $x \in X_a$ について、 $\bar{x}_n \in (X_a)_n$ をその制限とする。このとき、相互作用エントロピーを

$$h_i(\bar{x}_n) = -\frac{1}{n+1} \sum_{\bar{y}_n \in (X_a)_n} Q(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \log Q(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$$

$$h_i(\bar{x}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} h_i(\bar{x}_n)$$

で定める。

一般に、 $h_i(\bar{x}) \leq \log a$ が成り立つ。位相エントロピーとの関係について、次のことが成り立つ：

Lemma 4.1.

$$h_t((X(\{f_i\}_i; \bar{x})) \geq h_i(\bar{x})$$

が成り立つ。

4.C 符号化写像との関係： $\varphi_0 : (X_a)_n \rightarrow X_t^0$ 、 $\varphi : X_a \rightarrow X_t$ にたいして、 φ_0 が正則とは、 φ が単射のときをいう。

$m = \exists k \cdot n$ とすると、 $\bar{n}(\varphi_0, \bar{x}_m) = \frac{1}{m+1} \sum_{\bar{y}_m} Q(\bar{x}_m, \bar{y}_m) |\varphi_0(\bar{y}_m)|$ を平均コード長といい、 $\bar{n}(\varphi_0, \bar{x}) = \limsup_m \bar{n}(\varphi_0, \bar{x}_m)$ とおく。このとき、

Theorem 4.2. φ_0 が正則ならば、

$$\bar{n}(\varphi_0, \bar{x}) \cdot \log t \geq h_i(\bar{x})$$

が成り立つ。

この証明には、 φ_0 が正則のときに成り立つ Kraft の不等式：

$$\sum_{\bar{x}_n} t^{-|\varphi_0(\bar{x}_n)|} \leq 1$$

を用いる。

今 $\varphi_0 : (X_a)_n \rightarrow (X_t)_m$ とするとき、対応する φ がいつ可逆に近いのか、について考える。 $\psi : (X_t)_m \rightarrow (X_a)_n$ について、 $\psi \circ \varphi(\bar{y}_n) = \bar{y}_n$ となる y_n はどのくらいあるか？

$$R = \frac{m}{n}$$

を符号化レートと呼ぶ。このとき、次の復号不可能性定理が成り立つ。ただしここでは条件の正確な定義は書かない ([K5])。

Theorem 4.3. (1) Q ：“ \bar{x} について等質、エルゴートの”

(2) φ_0 について $R \cdot \log t < h_i(\bar{x})$ を満たすとする。

このとき、 $\forall \psi_0 : (X_t)_m \rightarrow (X_a)_n, \forall \lambda > 0$ に対して、 n が十分大きいとき

$$P(\psi_0 \circ \varphi(\bar{Y}_n) \neq \bar{Y}_n) \geq 1 - \lambda$$

が成立する。

5 トロピカル幾何学

5.A 演算子：トロピカル幾何学は、 \mathbb{R} 上の有理多項式と PL 写像との間の対応を与える。 \mathbb{R}_t : semiring (= \mathbb{R} as spaces) が次の演算で定まる：

$$x \oplus_t y = \log_t(t^x + t^y), \quad x \otimes_t y = x + y$$

重要な点は、 $t \rightarrow \infty$ としたとき、次の性質が成り立つことである：

$$x \oplus_t y \rightarrow \max(x, y), \quad t \rightarrow \infty$$

そこで、 \mathbb{R}_t 上の多項式を以下で定める：

$$\varphi_t(x) = (\alpha_1 + j_1 x) \oplus_t \dots \oplus_t (\alpha_m + j_m x)$$

ここで、 $x \in \mathbb{R}^n$ 、 $j \in \mathbb{Z}^n$ 、 $\alpha_l \in \mathbb{R}$ で、 jx は内積をあらわす。すると、 $t \rightarrow \infty$ としたとき、

$$\varphi_\infty(x) = \max(\alpha_1 + j_1 x, \dots, \alpha_m + j_m x)$$

が成り立つ。 φ_∞ は PL 写像である。

$\text{Log}_t : (C^*)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $(z_1, z_2, \dots, z_n) \mapsto (\log_t |z_1|, \dots, \log_t |z_n|)$ で定める。

Lemma 5.1 (Litvinov-Maslov, Viro).

$$\begin{aligned} F_t &\equiv \log_t^{-1} \circ \varphi_t \circ \text{Log}_t : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ &= \sum_{l=1}^m t^{\alpha_l} \cdot z^{j_l} \quad (z^{j_l} = z_1^{j_l^1} \dots z_n^{j_l^n}) \end{aligned}$$

が成り立つ。

Corollary 5.2. 表示の間の同型：

$$\begin{array}{ccc} \varphi_\infty & \xleftrightarrow{1:1} & F_t \\ \text{PL 写像} & & \text{ファミリーの多項式} \end{array}$$

が成り立つ。

5.B PL 写像による相互作用：

$$f_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad i, j \in \mathbb{Z} \quad \pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$$

から $\Phi(x) : X_\infty \rightarrow X_\infty$ が定まった。

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ を PL 写像とするとき、

$$f(x) = \sum_{l=1}^m \pm \max(\alpha_1^l + j_1^l x, \dots, \alpha_s^l + l_s x) = f_+ - f_-$$

とかける。ここで、 f_\pm はそれぞれ $(\max, +)$ 関数である。

以下の内容は、より高次元からの写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ にそのまま拡張されるが、記号の簡略化のため、 $n = 3$ としておく。

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ にたいして、 $f_{ij}(x) = f(i, j, x)$, $x \in \mathbb{R}$ とおくことでファミリーの写像が定まる。一般に、力学系が deterministic でない場合でも、 $(f_+)(k_i, k_{i+1}, k'_i) = k'_{i+1} + (f_-)(k_i, k_{i+1}, k'_i)$ のようにあわせれば、ある $(\max, +)$ 関数 $g_{\pm}: \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}$ によって、

$$g_+(k_i, k_{i+1}, k'_i, k'_{i+1}) = g_-(k_i, k_{i+1}, k'_i, k'_{i+1})$$

と書き直せる。

L-V セルオートマトンの場合、 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \max(L_0, x_2) - \max(L_0, x_3)$$

で定めると、 $g(y, x_3) = g(x_1, x_2) = \max(x_1 + L_0, x_1 + x_2)$ となる。

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ を PL 写像とし、 g_{\pm} を対応する $(\max, +)$ 関数とする。すると、トロピカル対応により、

$$g_{\pm} \xleftrightarrow{\text{tropical}} F_{\pm}^t : \text{ファミリー多項式}$$

Definition 5.1. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ に対応するアフィン代数多様体を

$$V_t(g_{\pm}) = \{z \in \mathbb{C}^4 : F_+^t(z) = F_-^t(z)\} \subset \mathbb{C}^4$$

で定める。

L-V の場合、 $(z_1 \leftrightarrow v_n^{t+1}, z_2 \leftrightarrow v_n^t, z_3 \leftrightarrow v_{n+1}^t, z_4 \leftrightarrow v_{n-1}^{t+1})$ と対応させることで、以下のようになる。

$$F_t(z, w) = t^{L_0} z + zw$$

$$V_t(LV) = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) : F_t(z_1, z_4) = F_t(z_2, z_3)\}$$

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ をセルオートマトン A に reducible な PL 写像とすると、対応する $g_{\pm}: (\max, +)$ 関数が与えられ、

$$V_t(A) \equiv V_t(g_{\pm}) \subset \mathbb{C}^4$$

とかく。

5.C オートマトン上の作用素: 多様体上には何らかの global analysis による別の mfd の構成がいくつか知られているが、それらを V_t に当てはめるこ

とで、対応するオートマトンの上の作用素を見つけたい。ここでは、Gelfand-Kaparanov-Zelevinsky による射影双対性に注目する。これはルジャンドル変換とみなせることから、力学系の観点からも重要な作用素である。それは、一般に代数多様体 $X \subset \mathbb{C}P^N$ にたいして、その双対多様体 $X^\vee \subset (\mathbb{C}P^N)^*$ を与える。

Definition 5.2. A を g_\pm によって定まるセルオートマトンとする。この時、 A^\vee を g_\pm^\vee によって定まるセルオートマトンとするとき、それが A の双対オートマトンとは、全ての $t \in [1, \infty)$ にたいして

$$\overline{V_t(A^\vee)} \equiv \overline{V_t(g_\pm^\vee)} = \overline{V_t(A)}^\vee$$

を満たすときをいう。

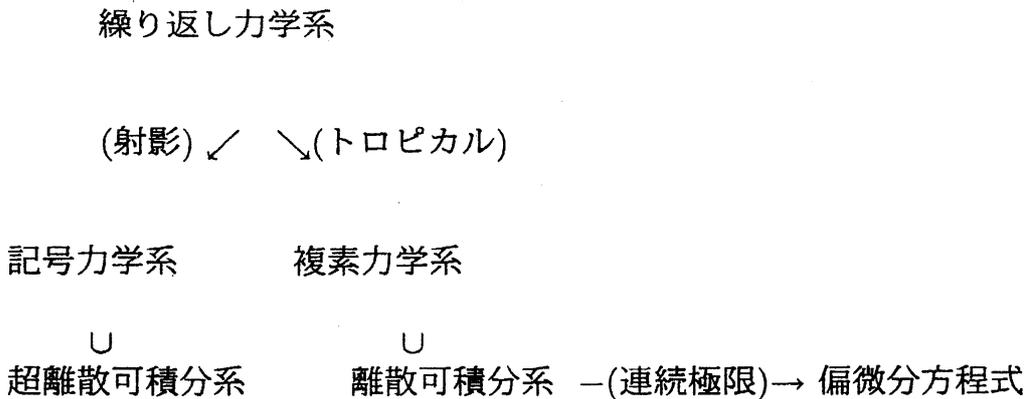
一般に X^\vee の定義多項式をもとめるのは易しくないが、 $\mathbb{C}P^2$ の中の曲線の場合は parametrisation が知られている。これを用いることで、次のことが分かる：

Lemma 5.3.

$$\begin{aligned} & [A : \max(a u_n \cdot \alpha + a u_{n+1}) = c]^\vee \\ & = A^\vee : \max\left(\frac{a}{a-1} \left(c - \frac{a}{a-1} + \frac{a}{a-1} u_{n+1}\right), \frac{ac}{a-1} + \frac{a}{a-1} u_n\right) = c \end{aligned}$$

6 力学系のスケール変換

6.A 図式：次の図式のうち、変微分方程式への連続極限以外のところをこれまで見てきた。ただし、() はスケール変換をあらわす。



6.B 力学系のスケール変換：以下で、ここでの力学系のスケール変換の定式化と、KdVに対する例を見る。

一般に、 (Z, d') 、 (X, d) をそれぞれ距離空間、とし、 $\tau : X \rightarrow X$ 、 $\sigma_t : Z \rightarrow Z$ 、 $t \in [1, \infty)$ をそれぞれ連続写像とする。

$$\varphi_t : (Z, \sigma_t) \longrightarrow (X, \tau)$$

が可縮な写像とは、

$$\begin{aligned} (1) \quad & d(\tau(\varphi_t(m)), \varphi_t(\sigma_t(m))) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty), \\ (2) \quad & d(\varphi_t(m), \varphi_t(m')) \rightarrow 0 \quad m, m' \in Z \end{aligned}$$

を満たすときをいう。(1)の意味は、" $\varphi_\infty : (Z, \sigma_\infty) \longrightarrow (X, \tau) : t=\infty$ で同変"

同様に

$$\phi_t : (Z, \sigma_t) \longrightarrow (X, \tau)$$

が拡大写像とは、

$$\begin{aligned} (1) \quad & d(\tau(\phi_t(m)), \phi_t(\sigma_t(m))) \rightarrow 0, \quad (t \rightarrow \infty), \\ (2)' \quad & d(\phi_t(m), \phi_t(m')) \rightarrow \infty \end{aligned}$$

を満たすときをいう。

(X, d) 、 (Y, d') を距離空間とし、 $\tau : X \rightarrow X$ 、 $\mu : Y \rightarrow Y$ を連続写像とする。 (X, τ) から (Y, μ) への力学系のスケール変換とは、 (Z, σ_t) と、下図のような拡大写像 ϕ_t と縮小写像 φ_t が存在するときをいう：

$$(Y, \mu) \xleftarrow{\exists \phi_t} (Z, \sigma_t) \xrightarrow{\exists \varphi_t} (X, \tau)$$

主構成：

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 - \max(0, x_2 + x_3)$ 、 $x_1 \leq \max(0, x_2 + x_3) - x_2$ とする。このとき、次の図式が成立する：

力学系のスケール変換

$$A: v_1 + \max(0, v_2, v_3) = v_2 + \max(0, v_1 + v_4)$$

↑ 可縮

$$\begin{aligned} & \exists \tilde{\Phi}(F_t) : V_t \rightsquigarrow V_t \\ V_t &= \{(z_1, \dots, z_4) : z_4 + z_2 z_3 z_4 = z_2 + z_1 z_2 z_4\} \end{aligned}$$

↓ 拡大

KdVフロー

6.C 可縮写像: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$: PL写像にたいして、 $\bar{\Phi}(x): \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ が定まった。ただし、 $(x_0, x_1, \dots) \rightarrow (x'_0, x'_1, \dots)$ とおくと、 $x'_i = f(x_i, x_{i+1}, x'_{i-1})$ 。 F_\pm^t : トロピカル対応によるファミリ-多項式とすると、

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(z)_t: \mathbb{C}^\infty &\rightarrow \mathbb{C}^\infty, \quad (z_0, z_1, \dots) \mapsto (z'_0, z'_1, \dots), \\ F_+^t(z_i, z_{i+1}, z'_{i-1}, z'_i) &= F_-^t(z_i, z_{i+1}, z'_{i-1}, z'_i) \end{aligned}$$

で定める。

フロウを、 $\tilde{\Phi}(z_0)_t^s(z_0, z_1, \dots) \equiv (z_0^s, z_1^s, \dots)$ とかくと、

$$\{\tilde{p}_i^s = (z_{i-1}^{s+1}, z_i^{s+1}, z_i^s, z_{i+1}^s)\}_{s=0}^\infty \subset V_t(f) \subset \mathbb{C}^4$$

であることが分かる。特に、 $(\tilde{\Phi}(z_0)_t, \mathbb{C}^\infty)$ は $V_t(f)$ 上の力学系に帰着する。これを $\tilde{\Phi}(z_0)_t: V_t \rightsquigarrow V_t$ などと書く。

Theorem 6.1. $Log_t: \mathbb{R}_+^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ は、 $(\tilde{\Phi}(z_0)_t, \mathbb{R}_+^\infty)$ から $(\bar{\Phi}(x), \mathbb{R}^\infty)$ への可縮写像をあたえる。

以上により $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$: PL写像から次の可縮な図式が得られた:

$$\tilde{\Phi}(z)_t : V_t(f) \rightsquigarrow V_t(f)$$

↓ (可縮)

$$\bar{\Phi}(x) : \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$$

↓ (射影)

$$\Phi(x) : X_\infty \longrightarrow X_\infty$$

|| *if reducible*

A : オートマトン

このことから次を得る :

Proposition 6.2. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ を PL 写像とすると、あるパラメータ $t \in [1, \infty)$ 付き多項式 $F_t : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ と、 F_t から定まる超曲面 $V_t \subset \mathbb{C}^{n+1}$ について、可縮な写像 :

$$\tilde{\Phi}(F_t) : V_t \rightsquigarrow V_t \Rightarrow \Phi(f)(x_0) : X_\infty \mapsto X_\infty$$

が存在する。

もし $\Phi(f)(x_0)$ がオートマトン A で定まる時、

$$\tilde{\Phi}(F_t) : V_t \rightsquigarrow V_t \Rightarrow A$$

とかく。

6.D 拡大写像: $\tilde{\Phi}(z)_t : \mathbb{C}^\infty \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ は、 $F_+^t(z_i, z_{i+1}, z'_{i-1}, z'_i) = F_-^t(z_i, z_{i+1}, z'_{i-1}, z'_i)$ で定まった。両方向でスケール変換 \Rightarrow 偏微分方程式 :

$$\begin{array}{cccc} & - & - & - & \rightarrow & n \\ \left| \begin{array}{l} z_0 \\ z_0^1 \\ z_0^2 \\ \vdots \end{array} \right. & \begin{array}{l} z_1 \\ z_1^1 \\ z_1^2 \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{l} z_2 \\ z_2^1 \\ z_2^2 \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \vdots \end{array} \\ \downarrow & & & & & \\ s & & & & & \end{array}$$

$f_\pm; \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ を、

$$f_+(x_1, \dots, x_4) = x_4 + \max(0, x_2 + x_3), \quad f_-(x_1, \dots, x_4) = x_2 + \max(0, x_1 + x_4)$$

で定める。この時、対応する有理多項式は、

$$F_+(z_1, \dots, z_4) = z_4 + z_2 z_3 z_4, \quad F_-(z_1, \dots, z_4) = z_2 + z_1 z_2 z_4$$

で、代数多様体は、

$$V_t(f_{\pm}) = \{(z_1, \dots, z_4) | F_+(z_1, \dots, z_4) = F_-(z_1, \dots, z_4)\}$$

となり、力学系は次で定まる：

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(z_0) : \mathbb{C}^{\infty} &\longrightarrow \mathbb{C}^{\infty} & \tilde{\Phi}(z_0)^s(\bar{z}) &= (z_1^s, \dots, z_4^s) \\ z_{n+1}^s - z_{n-1}^{s+1} &= \frac{1}{z_n^{n+1}} - \frac{1}{z_n^s} \end{aligned}$$

この最後の有理方程式は、広田による離散 KdV 方程式である。

Theorem 6.3 (広田). f_{\pm} を上のようにとり、対応する力学系のフロウを $\{z_n^s\}$ とおく。 $n = \frac{t}{\epsilon^3}, s = \frac{x}{\epsilon} - \frac{ct}{\epsilon^3}, z_n^s = p + \epsilon^2 \cdot u(x, t), (1 - 2c = \frac{1}{p^2})$ と変数変換することで、

$$\epsilon^5 \left(u_t - \frac{1}{p^3} u u_x + \frac{1}{48p^2} \left(1 - \frac{1}{p^4} \right) u_{3x} \right) + o(\epsilon^7) = 0$$

をみます。

これにより、 f_{\pm} を上のようにとることで拡大写像：

$$V_t(f_{\pm}) \implies \text{KdV フロウ}$$

を得た。

7 空間の形成

DNA から構成される相互作用システムからタンパク質が作られる。タンパク質は何か形を持った実体があり、タンパク質の機能は、本質的にその形で決定される。

そこで、上で行われているファミリーの写像間の相互作用から、何か空間を構成することが自然に考えられるが、これを

Space form problem

とここでは呼ぶ ([K4])。ここでは、space form problem の一つの定式化を述べる。

一般的に、ファミリーの写像を用いることで、相互作用のグラフとここでは呼ぶ有限グラフが以下のようにして構成される。それは初期条件 X_0 を与えることで、自動的に有限グラフの無限列：

$$X_0, X_1, X_2, \dots$$

を成すことが示されるが、それは符号力学系の有限グラフ版と言える。幾何学的に符号力学系は、マルコフ分割など空間上の写像から引き出される力学系の、大域的な性質を記述するものとしてあらわることから、ここではその逆問題を考える。則ち、相互作用のグラフの無限列から、ある空間 X とその上の (自己同型) 写像 A と構成することを考える。その時 (X, A) は上で述べた space form problem における一つの定式化を与え、イメージ的にはタンパク質 X とその状態 $\{x, A(X), A^2(X), \dots\}$ を与えるようなものである。

そこで、まず相互作用グラフを構成する。 $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ を取り、 $\Phi(x, f, g) : X_2 \rightarrow X_2$ を相互作用のグラフ、 $\pi : [0, 1] \setminus \frac{1}{2} \rightarrow \{0, 1\}$ を射影とする。さらに別の写像 $d : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ をとる。

今 $z \in [0, 1]$ とある $\bar{k} \in X_2$ について、次の等式：

$$\Phi(x, f, g)(\bar{k}) = \pi((d(z), d^2(z), \dots)) \equiv (\pi(d(z)), \pi(d^2(z)), \dots)$$

が成り立つとする。この時、marked oriented edge を

$$(f, x) \xrightarrow{(g, \bar{k})} (d, z)$$

で書く。

これを一般化して、ファミリーの写像 $\{f_0, \dots, f_k\}$ とファミリーの点 $\{x_0, \dots, x_l\}$ をとる。各 $(i, j, x) \in \{0, \dots, k\}^2 \times \{x_0, \dots, x_l\}$ に対して、 $\bar{k}(i, j, x) \in X_2$ を与えよう。このようにして、符号列のファミリー $\{\bar{k}(i, j, x_h)\}_{i,j,h=0}^{i,j=k,h=l} \subset X_2$ が与えられた。これらについて、頂点とエッジの集合を以下で定める：

$$V = \{(f_i, x_j) : 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq l\} \text{ (the set of vertices),} \quad (1)$$

$$E = \{e_{i,j,k} : (f_i, x_h) \xrightarrow{(f_j, \bar{k}(i,j,x_h))} (f_k, x_v) : \} \text{ (the set of edges).} \quad (2)$$

Definition 7.1. An interaction graph is a marked oriented graph, where the set of vertices V and edges E are given as above. We denote it by:

$$G(\{f_i\}_i^k; \{x_j\}_j^l; \{\bar{k}(i, j, x_h)\}_{i,j,h=0}^{i,j=k,h=l})$$

このようにして、写像、点、そして符号列のファミリーから相互作用のグラフ X_0 が与えられた。さて次にこれらのファミリーから相互作用のグラフの無限列を与えよう。

$$X_2^{k,l} \equiv X_2^{k^2+l} = X_2 \times X_2 \times \cdots \times X_2$$

とおく。この時、ファミリーの相互作用写像から：

$$\Phi : X_2^{k,l} \rightarrow X_2^{k,l}$$

の写像が定まる。ここで、

$$\Phi(\{\bar{k}(i, j, x)\}) = \{\bar{k}'(i, j, x)\}, \quad \bar{k}'(i, j, x) \equiv \Phi(f_i, f_j, x)(\bar{k}(i, j, x)).$$

これにより、別の相互作用グラフ：

$$\Phi_*(G(\{f_i\}_i^k; \{x_j\}_j^l; \{\bar{k}(i, j, x_h)\})) = G(\{f_i\}_i^k; \{x_j\}_j^l; \Phi(\{\bar{k}(i, j, x_h)\})).$$

が与えられる。これを繰り返すことにより、相互作用グラフの無限列：

$$(G_0, G_1, \dots), \quad G_i = G(\{f_i\}_i^k; \{x_j\}_j^l; \Phi^i(\{\bar{k}(i, j, x_h)\}_{i,j,h=0}^{i,j=k,h=l}))$$

が与えられた。この列は、有限グラフの有限集合の列として構成されている。

一方で組み合わせ論において、有限グラフから構成される多項式環のイデアルについて深い研究がある。ここではそれを用いて空間とその上の写像についての定式化を以下で定める。 (G_0, G_1, \dots) に対応して、イデアルの無限列：

$$(I_0, I_1, \dots)$$

をとる。

今、 V を代数多様体とし、アフィンチャート $\{V_i\}$ とその定義イデアル J_i をとる。 V 上の自己同型写像 A が $\{(V_i, J_i)\}_{i=1}^m$ について (stable) algebraic Markov partition を与えるとは、各 i に s ついてある j があって、

$$A(V_i) \subset V_j$$

を満たすこととする。

Space form problem: 相互作用グラフの無限列から定まるイデアルの無限列 (I_0, I_1, \dots) に対して、それがいつある (V, A) の代数的マルコフ分割から定まるものになるか。

この構成には相互作用グラフの組み合わせ論的な性質を調べる必要があることが分かる。

References

- [GKZ] I.GELFAND, M.KAPRANOV AND A.ZELEVINSKY, *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*, Birkhauser (1994).
- [FK] R.FRIEDRICH AND T.KATO, *Mesoscopic category, automata and Grassmannian*, In preparation.
- [K1] T.KATO, *Operator dynamics in molecular biology*, in the Proceedings of the first international conference on natural computation, L.N. in computer science **3611** pp. 974-989 (2005), Springer.
- [K2] T.KATO, *Interaction states by iterating maps in molecular biology*, RIMS 講究録 (符号と暗号の代数的数理) **1420** (2005).
- [K3] T.KATO, *Interacting maps, symbolic dynamics and automorphisms in microscopic scale*, Int. Journal of Pure and Appl. Mathematics, **25-3**, pp.311-374 (2005).
- [K4] T.KATO, *Geometric representations in interacting maps*, Kyoto University preprint (2005).
- [K5] T.KATO, *Entropy comparisons and codings on interacting maps*, Kyoto University preprint (2006).
- [K6] T.KATO, *Pattern formation from projectively dynamical systems and iterations by families of maps*, MPI preprint (2006).
- [Ki] B.KITCHENS, *Symbolic dynamics*, Springer (1998).
- [Ko] ランダムから可積分系へ、スケール変換によるパターン形成
東北大学春の学校講究録 小谷元子編 (2007).
- [LM] G.LITVINOV AND V.MASLOV, *The correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications*, Idempotency, Ed. J.Gunawardena, Cambridge Univ. Press, pp420-443 (1998).
- [MS] W. DE MELO AND S. VAN STRIEN, *One dimensional dynamics*, Springer (1993).

- [Mi] G.MIKHALKIN, *Amoebas and tropical geometry*, in Different faces of geometry eds, S.Donaldson, Y.Eliashberg and M.Gromov, Kluwer academic plenum publ., (2004).
- [N] 可積分系の応用数理 (中村佳正編), 裳華房 (2000).
- [UK1,2,3] 数学者のための分子生物学入門 (上野健爾、加藤毅編), vol 1 (2003), vol 2 (2004), vol 4 (2005), vol 5 (To appear), (物性研究: vol 1 81-1 (2003), vol 3 85-1 (2005), vol 4 87-3 (2006).)
- [W] S.WOLFRAM, *Cellular automata and complexity*, Addison Wesley (1994).