

超離散系に付随するトロピカルスペクトル曲線とテータ関数

井上 玲 (Rei Inoue)

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻
Department of Physics, Graduate School of Science,
The University of Tokyo

岩尾 慎介 (Shinsuke Iwao)

東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

竹縄 知之 (Tomoyuki Takenawa)

東京海洋大学海洋工学部
Faculty of Marine Technology,
Tokyo University of Marine Science and Technology

ABSTRACT. 周期境界条件の付いた可積分セルオートマトン系の初期値問題に対して、トロピカルスペクトル曲線とその Jacobian を用いたアプローチについて報告する。力学系の等位集合からトロピカル超楕円曲線上の因子類群への固有ベクトル写像を導入し、それを通じて Jacobian への写像を構成する。また、周期箱玉系の初期値問題に対して我々の方法を適用し、その研究で提案されている実トーラスとの関係を明らかにする。さらに、上記で用いられるトロピカル周期行列やトロピカルテータ関数が、代数曲線上の周期行列やテータ関数の超離散極限により得られることも示す。

1. はじめに

コマの運動の解や KdV 方程式の準周期解で知られるように、古典可積分系と代数曲線の理論の間には密接な関係がある ([19, 2] などを参照)。特に \mathbb{C} 上の有限自由度系の中には、generic な等位集合のコンパクト化が代数曲線 γ の Jacobi 多様体 $\text{Jac}(\gamma)$ と同型になり、系の時間発展が $\text{Jac}(\gamma)$ 上で線形化されるものがある。そして解は γ に付随した Riemann のテータ関数で書かれる。

固有ベクトル写像

$$(1.1) \quad \mathbb{C} \text{ 上の等位集合} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \text{代数曲線上の Picard 群} \simeq \text{Jacobi 多様体}$$

テータ関数

このような性質は1970年代から盛んに研究されていたが、1980年代には代数的完全可積分性と名付けられ [1], 代数幾何学の手法を駆使して様々な形で一般化された。

一方、1990年に「箱玉系」というソリトンセルオートマトンが発見されたが [18], この系は次の2つの理由から可積分であると言われる。一つは既存の可積分系から箱玉系を得る極限操作「超離散化 (ultradiscretization)」の存在すること、もう一つは「結晶基底」という組み合わせ論的な道具により箱玉系の対称性が記述されるということである [21, 3, 4]. 箱玉系の初期値問題は初等的な組み合わせ論的方法、および後者に関連する Kerov-Kirillov-Reshetikhin (KKR) 対応という表現論に由来する組み合わせ論的方法で解かれている [13, 10, 11].

そして近年、代数幾何学の組み合わせ論的な類似物として「トロピカル幾何学」が登場した (参考文献は [14, 17, 9] など). 複素代数曲線とトロピカル曲線を結ぶ極限操作は超離散化とほとんど同じである。そこで想像されるのが次のような (1.1) の類似である:

(1.2)

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{固有ベクトル写像} & \\
 \mathbb{R} \text{ 上のオートマトン} & \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} & \text{トロピカル曲線上} \\
 \text{の等位集合} & \text{トロピカル} & \text{の Picard 群} \simeq \text{トロピカル} \\
 & \text{テータ関数} & \text{Jacobi 多様体}
 \end{array}$$

本稿では、[6] で得た結果に基づいて周期的境界条件を持つ戸田格子の超離散化をトロピカル幾何学を使って調べる方法、および超離散戸田格子と箱玉系との関係を紹介する。現時点ではまだ関係図 (1.2) は完成していないが、代数的完全可積分性の概念をトロピカル幾何学の枠組みに広げる好例になっていると思われる。ここで用いられる Jacobian やテータ関数の定義は複素代数曲線との関係が見えづらいが、本稿では [7] に従って、上記で用いられるトロピカル周期行列やトロピカルテータ関数が、代数曲線上の周期行列やテータ関数の超離散極限により得られることも示す。

2. トロピカル曲線と JACOBI 多様体

\mathbb{R}^2 に埋め込まれたトロピカル曲線とその Jacobi 多様体を考える ([14, 15] の定義に従う).

2.1. トロピカル曲線.

定義 2.1. [14] \mathbb{R}^2 内に埋め込まれた連結グラフで、有限個の辺と頂点から成り、各辺 e に weight と呼ばれる自然数 $w_e \in \mathbb{Z}_{>0}$ を持ち、次の性質 (i), (ii) を満たすものを「トロピカル曲線」と呼ぶ。

(i) 各辺の傾きは有理数.

(ii) 全ての頂点について次が成り立つ: 頂点 v から n 本の辺 e_1, \dots, e_n が出ているとき, 各辺 e_k の weight w_{e_k} と primitive vector (辺の傾きを互いに素な整数で表したベクトル) ξ_{e_k} が $\sum_{k=1}^n w_{e_k} \xi_{e_k} = 0$ を満たす.

さらに次の条件 (iii), (iv) を満たすときトロピカル曲線が滑らかであるという:

(iii) 全ての辺の weight が 1 である.

(iv) 全ての頂点から 3 本の辺が出, その 3 つの辺の primitive vector $\xi_{e_1}, \xi_{e_2}, \xi_{e_3}$ が $i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3\}$ に対して $|\xi_{e_i} \wedge \xi_{e_j}| = 1$ を満たす.

今回扱うトロピカル曲線は次のようなものである. $C = (C_{-1}, C_0, C_1, \dots, C_g) \in \mathbb{R}^{g+2}$ を固定し, \mathbb{R}^2 上のグラフ $\tilde{\Gamma}_C$ を, \mathbb{R}^3 内の凸多面体

$$\{(X, Y, \min[2Y, (g+1)X+Y, gX+Y+C_g, \dots, X+Y+C_1, Y+C_0, C_{-1}]) \mid X, Y \in \mathbb{R}\}$$

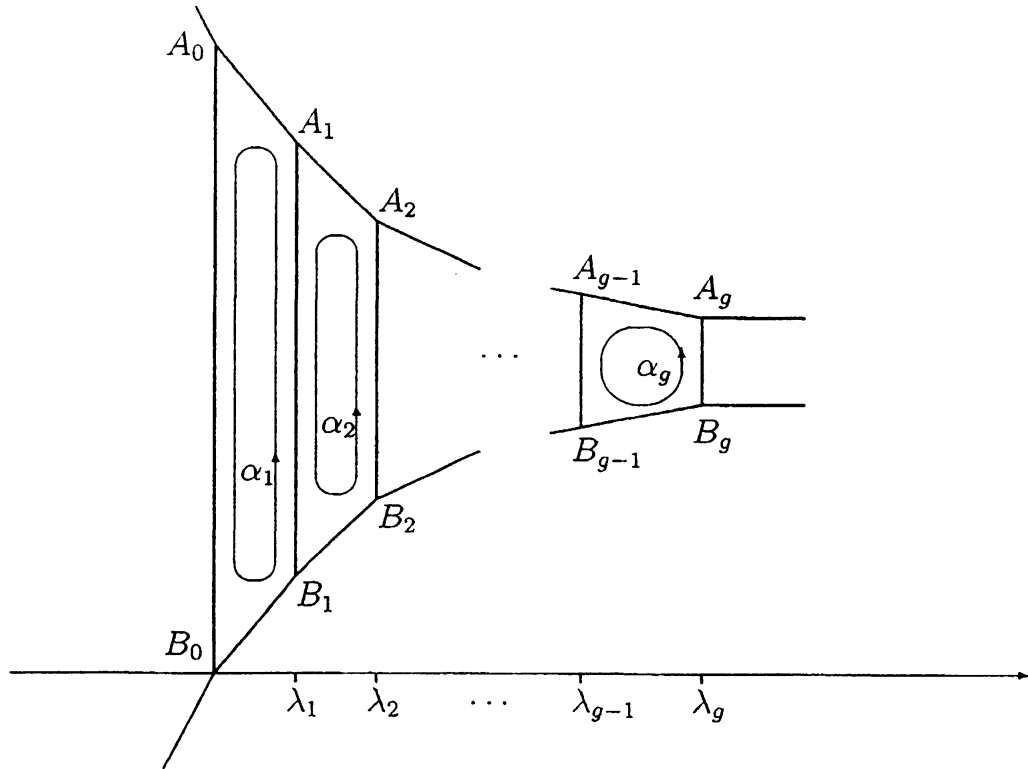
の「折れ線」を XY 平面に射影したものとして定義する. このグラフの辺に適当な weight を与えると, トロピカル曲線になる. (一般に, \mathbb{R}^2 に埋め込まれた任意のトロピカル曲線はトロピカル多項式で定義される \mathbb{R}^3 内の凸多面体の折れ線として書けることが知られている.)

係数 C に

$$(2.1) \quad \begin{cases} C_{-1} > 2C_0 \\ C_i + C_{i+2} > 2C_{i+1} \quad (i = 0, \dots, g-2) \\ C_{g-1} > 2C_g \end{cases}$$

という条件を課す (あとで出てくる超離散戸田格子の初期値として generic なので, generic 条件と呼ぶ) と, 全ての辺の weight が 1 ととれて $\tilde{\Gamma}_C$ は滑らかなトロピカル曲線になり, 図 1 のように図示される. ここで $i = 0, \dots, g$ に対し $\lambda_i = C_{g-i} - C_{g-i+1}$, $A_0 = (\lambda_0, C_{-1})$, $B_0 = (\lambda_0, 0)$ である. $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$, $\overrightarrow{B_{i-1}B_i}$ の primitive vector はそれぞれ $(1, -g+i)$, $(1, g-i)$, $\overrightarrow{A_iB_i}$ の primitive vector は $(0, -1)$ となっている. $\pi_1(\tilde{\Gamma}_C)$ の基底 α_i ($i = 1, \dots, g$) を図のように定め, g を $\tilde{\Gamma}_C$ の種数と呼ぶ. $\tilde{\Gamma}_C$ の最大コンパクト部分グラフを Γ_C と書く.

2.2. Γ_C の Jacobi 多様体. 以下, C は generic とする. Γ_C の辺 e の primitive vector を ξ_e とする. このとき e 上の二点 x, y の「距離」を \mathbb{R}^2 のノルム $\|\cdot\|$ を使って $d(x, y) = \frac{\|x-y\|}{\|\xi_e\|}$ と定義する. $\mathcal{P} = \{\Gamma_C \text{ 上の path 全体}\}$ 上の双線形形式 Q を, 自己交差しない path $\gamma \in \mathcal{P}$ に対し $Q(\gamma, \gamma) = (\text{距離 } d \text{ による } \gamma \text{ の長さ})$ と定義し, 双線形的に \mathcal{P} 上に延長する.

FIGURE 1. Tropical curve $\tilde{\Gamma}_C$

例 2.2.

$$\begin{aligned}
 Q(\alpha_1, \alpha_2) &= Q(\overrightarrow{B_1 A_1}, \overrightarrow{A_1 B_1}) = -d(A_1, B_1) = -C_{-1} + 2g\lambda_1, \\
 Q(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2) &= Q(\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_1 A_2}) + Q(\overrightarrow{A_2 B_2}, \overrightarrow{A_2 B_2}) + Q(\overrightarrow{B_2 B_1}, \overrightarrow{B_2 B_1}) \\
 &= d(A_1, A_2) + d(A_2, B_2) + d(B_2, B_1) = C_{-1} - 4\lambda_1 - 2(g-2)\lambda_2.
 \end{aligned}$$

$H_1(\Gamma_C, \mathbb{Z})$ 上の線形関数全体の空間を $\Omega(\Gamma_C)$, その双対空間を $\Omega^*(\Gamma_C)$ と書く. $\Omega(\Gamma_C)$ と $\Omega^*(\Gamma_C)$ は共に実 g 次元で特に $\Omega^*(\Gamma_C) \simeq H_1(\Gamma_C, \mathbb{R})$ である.

定義 2.3. [15] Γ_C の Jacobi 多様体を以下で定義する:

$$J(\Gamma_C) = \Omega^*(\Gamma_C) / H_1(\Gamma_C, \mathbb{Z}).$$

$J(\Gamma_C)$ は g 次元実トーラスに同型である. 後の議論のために, 二通りの書き方でその周期行列 $K, \Lambda \in M_g(\mathbb{R})$ を書いておく:

$$(2.2) \quad K_{ij} = Q(\alpha_i, \alpha_j), \quad \Lambda_{ij} = Q\left(\sum_{k=1}^i \alpha_k, \sum_{l=1}^j \alpha_l\right), \quad i, j = 1, \dots, g.$$

Q は非退化なのでこれらは実対称正定値行列である.

2.3. Abel-Jacobi 写像. $P_0 \in \Gamma_C$ を固定し, Γ_C から $J(\Gamma_C)$ への写像 η を次で定める:

$$\eta: \Gamma_C \rightarrow J(\Gamma_C); P \mapsto (Q(\gamma, \alpha_1), \dots, Q(\gamma, \alpha_g))$$

ここで γ は P_0 を始点, P を終点に持つ path とする. η は Γ_C 上の有効因子 $\text{Div}_{\text{eff}}(\Gamma_C)$ 全体に延長でき,

$$\eta_k: \text{Div}_{\text{eff}}^k(\Gamma_C) \rightarrow J(\Gamma_C); (P_1, \dots, P_k) \mapsto \sum_{i=1}^k \eta(P_i)$$

は $k \geq g$ で全射である. 次の定理が $J(\Gamma_C)$ と同型な $\text{Div}_{\text{eff}}^g(\Gamma_C)$ の部分集合を与える:

定理 2.4. [6] $C \in \mathbb{R}^{g+2}$ が generic(2.1) なとき, $\text{Div}_{\text{eff}}^g(\Gamma_C)$ の部分集合 $\mathcal{D}^g(\Gamma_C)$ を

$$\mathcal{D}^g(\Gamma_C) = \left\{ (P_1, \dots, P_g) \mid \begin{array}{l} \text{全ての } i \text{ について, } P_i \in \alpha_i \text{ かつ} \\ \alpha_i \cap \alpha_{i+1} \setminus \{A_i, B_i\} \text{ 上に高々一点しかない} \end{array} \right\}$$

とすると, $\eta_g|_{\mathcal{D}^g(\Gamma_C)}: \mathcal{D}^g(\Gamma_C) \rightarrow J(\Gamma_C)$ は同型写像.

証明は現在準備中の論文による ($g \leq 3$ のときは [6] を参照).

2.4. もう一つの Jacobi 多様体. \mathbb{R}^g の並進 ν_C を $\nu_C; (z_i)_{i=1, \dots, g} \mapsto (z_i + C_{-1})_{i=1, \dots, g}$ で定める. $J(\Gamma_C)$ を ν_C の定める同値関係で割って

$$(2.3) \quad J'(\Gamma_C) = J(\Gamma_C) / \{P \sim \nu_C \cdot P \mid P \in J(\Gamma_C)\}$$

とすると, $J'(\Gamma_C)$ は次のように書ける:

$$J'(\Gamma_C) \simeq \mathbb{R}^g / AZ^g, \quad A_{ij} = \Lambda_{ij} - C_{-1}.$$

特に $\det K = \det \Lambda = (g+1) \det A$ が成立する.

次節で説明するように, $J(\Gamma_C)$, $J'(\Gamma_C)$ はそれぞれ超離散周期戸田格子と周期箱玉系の等位集合に関するトロピカル Jacobi 多様体である.

3. 周期戸田格子の超離散化

3.1. 周期的な離散戸田格子. 戸田格子とは, 非線形ばねでつながった質点の位置 x_i ($i \in \mathbb{Z}$) の満たす次のような運動方程式で記述される系である [20]:

$$(3.1) \quad x_i'' = e^{x_{i+1} - x_i} - e^{x_i - x_{i-1}}.$$

($'$ は時間微分を表す) この方程式はソリトン解を持つ. また, 周期的境界条件 $x_{i+g+1} = x_i$ を課して $x_i \in \mathbb{C}$ に拡張すると種数 g の超楕円曲線の Riemann テータ関数で記述される解を持つ.

周期戸田格子の時間を離散化したものが, 相空間

$$\mathcal{U} = \{u = (I_1, \dots, I_{g+1}, V_1, \dots, V_{g+1}) \in \mathbb{C}^{2(g+1)}\}$$

上で定義された以下の差分方程式である ($I_{i+g+1}^t = I_i^t$ 等と見る) [5]:

$$(3.2) \quad I_i^{t+1} = I_i^t + V_i^t - V_{i-1}^{t+1}, \quad V_i^{t+1} = \frac{I_{i+1}^t V_i^t}{I_i^{t+1}}.$$

時間間隔を δ とし, $V_i^t = \delta^2 e^{x_{i+1}-x_i}$, $I_i^t = 1 + \delta x_i'$ とおくと $\delta \rightarrow 0$ の極限で (3.2) は (3.1) に移行する. 以下の命題は (3.2) の Lax 表示と保存量を与える:

補題 3.1. [5] (i) (3.2) は以下の \mathcal{U} 上の二つの行列が満たす関係式 $L^{t+1}(y)M^t(y) = M^t(y)L^t(y)$ と等価である:

$$L^t(y) = \begin{pmatrix} I_2^t + V_1^t & 1 & & & (-1)^g \frac{I_1^t V_1^t}{y} \\ I_2^t V_2^t & I_3^t + V_2^t & & 1 & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & I_g^t V_g^t & I_{g+1}^t + V_g^t & 1 \\ (-1)^g y & & & I_{g+1}^t V_{g+1}^t & I_1^t + V_{g+1}^t \end{pmatrix},$$

$$M^t(y) = \begin{pmatrix} I_2^t & 1 & & & \\ & I_3^t & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & I_{g+1}^t & 1 \\ y & & & & I_1^t \end{pmatrix}.$$

(ii) 行列 $L^t(y)$ の特性多項式

$$(3.3) \quad \det(x\mathbb{I}_{g+1} + L^t(y)) = y^2 + y(x^{g+1} + c_g x^g + \cdots + c_1 x + c_0) + c_{-1}$$

の係数は \mathcal{U} 上の関数であるが, (3.2) の保存量である. つまりその値は t に依らない.

c_i たちを幾つか書いてみると次のようになっている:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} c_g &= \sum_i I_i^t + \sum_i V_i^t, \quad \dots \\ c_0 &= \prod_i I_i^t + \prod_i V_i^t, \quad c_{-1} = \prod_i I_i^t V_i^t. \end{aligned}$$

$c = (c_{-1}, c_0, \dots, c_g) \in \mathbb{C}^{g+2}$ を固定したとき, この c を保存量に持つ \mathcal{U} の元全体 \mathcal{U}_c を等位集合, (3.3) の零点が定める \mathbb{C} 上の代数曲線 γ_c をこの系のスペクトル曲線と呼ぶ.

c が generic なとき γ_c は種数 g の超楕円曲線である. 離散化する前の周期戸田格子と同様, \mathcal{U}_c は γ_c の Jacobi 多様体 $\text{Jac}(\gamma_c)$ のアフィン部分に同型で, 時間発展 (3.2) は $\text{Jac}(\gamma_c)$ 上で線型化される. 写像 $\phi: \mathcal{U}_c \rightarrow \text{Pic}^g(\gamma_c) \simeq \text{Jac}(\gamma_c); u^t \mapsto \sum_{i=1}^g [(x_i, y_i)]$ は固有ベクトル写像 (u^t に Lax 行列 $L^t(y)$ の固有ベクトルの主因子を対応させる) と呼ばれ, 図式 (1.1) を構成する鍵となる写像である. 特に x_i たちは, $x\mathbb{I}_{g+1} + L^t(y)$

の g 次の主小行列式 $(x\mathbb{I}_{g+1} + L^t(y))_{(1,\dots,g)(1,\dots,g)}$ (x の monic な g 次多項式になる) の零点である。

例 3.2. $g = 2$ の場合, $\phi : (I_1, I_2, I_3, V_1, V_2, V_3) \mapsto (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$ は次のように書ける. まず x_1, x_2 は

$$\det \begin{pmatrix} x + I_2 + V_1 & 1 \\ I_2 V_2 & x + I_3 + V_2 \end{pmatrix} = 0$$

の解なので $x_1 + x_2 = -(I_2 + V_1 + I_3 + V_2)$, $x_1 x_2 = I_2 I_3 + V_1 I_3 + V_1 V_2$ を満たす. それぞれの x_i について γ_c 上の二点 $(x_i, y_i), (x_i, y'_i)$ のうち一点 (x_i, y_i) で代表させる. y_i には $y_i = I_1 V_1 (x_i + I_3 + V_2) = \frac{c-1}{I_3 V_3 (x_i + I_2 + V_1)}$ という二通りの書き方があることに注意する.

3.2. 超離散化と min-plus 代数. 前節と次節をつなぐ超離散化の手続きを説明しよう. まず微小変数 $\varepsilon > 0$ を固定し, 写像 $\text{Log}_\varepsilon : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定める:

$$(3.5) \quad \text{Log}_\varepsilon : x \mapsto -\varepsilon \log x.$$

同時に $X \in \mathbb{R}$ により x のスケール変換 $x = e^{-\frac{X}{\varepsilon}}$ を行くと, $\text{Log}_\varepsilon(x)$ は $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限で X に収束する. このようにスケール変換 $x = e^{-\frac{X}{\varepsilon}}$ を伴う極限操作 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Log}_\varepsilon$ のことを超離散化と呼ぶ. 次の命題は, より一般的な状況で $\mathbb{R}_{>0}$ 上の和, 積の関係式がそれぞれ $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 上の min, 和の関係式に移される様子を説明する:

命題 3.3. $A, B, C \in \mathbb{R}$, $k_a, k_b, k_c > 0$ を使って $a, b, c \in \mathbb{R}$ が

$$a = k_a e^{-\frac{A}{\varepsilon}}, \quad b = k_b e^{-\frac{B}{\varepsilon}}, \quad c = k_c e^{-\frac{C}{\varepsilon}}$$

と書けるとする. このとき関係式

$$(i) \ a + b = c, \quad (ii) \ ab = c, \quad (iii) \ a - b = c.$$

の超離散化はそれぞれ次のようになる:

$$(i) \ \min[A, B] = C, \quad (ii) \ A + B = C, \\ (iii) \ \begin{cases} A = C & (A < B, \text{ または } A = B \text{ かつ } k_a > k_b \text{ のとき}) \\ \text{矛盾} & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

3.3. 周期戸田格子の超離散化. 超離散周期戸田格子は相空間

$$\mathcal{T} = \{(Q_1, \dots, Q_{g+1}, W_1, \dots, W_{g+1}) \in \mathbb{R}^{2(g+1)} \mid \sum_i Q_i < \sum_i W_i\}$$

上の区分線形写像 $T : (Q_i^t, W_j^t) \mapsto (Q_i^{t+1}, W_j^{t+1})$ ($i, j \in \{1, 2, \dots, g+1\}$) で定義される [16]:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} Q_i^{t+1} &= \min[W_i^t, Q_i^t - X_i^t], & W_i^{t+1} &= Q_{i+1}^t + W_i^t - Q_i^{t+1} \\ \text{ただし } X_i^t &= \min_{k=0, \dots, g} \left[\sum_{l=1}^k (W_{i-l}^t - Q_{i-l}^t) \right]. \end{aligned}$$

(3.6) は, (3.2) の超離散化である. 相空間 U を $U_{>0} = \{u \in \mathbb{R}_{>0}^{2(g+1)} \mid \prod_i I_i > \prod_i V_i\}$ に制限し, スケール変換 $I_i = e^{-\frac{Q_i}{\epsilon}}$, $V_i = e^{-\frac{W_i}{\epsilon}}$ の下で前節の超離散化を行えばよい (実際は (3.2) を陽的に解く必要がある [8]). この系の保存量 $C = (C_{-1}, C_0, \dots, C_g) \in \mathbb{R}^{g+2}$ は (3.4) の超離散化 (スケール変換は $c_i = e^{-\frac{C_i}{\epsilon}}$) として次のように得られる:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} C_g &= \min \left[\min_{1 \leq i \leq g+1} Q_i, \min_{1 \leq i \leq g+1} W_i \right], & \dots \\ C_0 &= \min \left[\sum_{i=1}^{g+1} Q_i, \sum_{i=1}^{g+1} W_i \right], & C_{-1} &= \sum_{i=1}^{g+1} (Q_i + W_i). \end{aligned}$$

(一般には C に対する generic 条件 (2.1) を等号まで拡張したものが成り立つ.)

$C \in \mathbb{R}^{g+2}$ を固定し, その等位集合を \mathcal{T}_C と書く. この C が定めるスペクトル曲線が 2 節で紹介した $\tilde{\Gamma}_C$ で, γ_c の超離散極限に相当する.

予想 3.4. [6] $C \in \mathbb{R}^{g+2}$ が generic (2.1) なとき以下が成り立つ:

- (i) $\mathcal{T}_C \simeq J(\Gamma_C)$.
- (ii) 特に $C \in \mathbb{Z}^{g+2}$ のとき $(\mathcal{T}_C)_{\mathbb{Z}} = \mathcal{T}_C \cap \mathbb{Z}^g$, $J_{\mathbb{Z}}(\Gamma_C) = J(\Gamma_C) \cap \mathbb{Z}^g$ とすると (i) の同型は $(\mathcal{T}_C)_{\mathbb{Z}}$ と $J_{\mathbb{Z}}(\Gamma_C)$ の間の全単射を誘導する.

この予想は $g \leq 3$ で正しいことが分かっている. 証明では, 離散戸田格子の固有ベクトル写像 ϕ の超離散版に相当する同型写像 $\Phi : \mathcal{T}_C \rightarrow \mathcal{D}^g(\Gamma_C)$ を構成し, これと Abel-Jacobi 写像 η_g とを組み合わせる. 特に, 超離散極限では x_i たちの満たす代数方程式が解けて Φ を陽に表示することが可能になる.

例 3.5. $g = 2$ の場合, $\Phi : (Q_1, Q_2, Q_3, W_1, W_2, W_3) \mapsto (X_1, Y_1) + (X_2, Y_2)$ は次で与えられる:

$$\begin{aligned} X_1 &= \min[Q_2, Q_3, W_1, W_2], & X_2 &= \min[Q_2 + Q_3, W_1 + W_2, Q_3 + W_1] - X_1 \\ Y_1 &= Y_1^p, & Y_2 &= Y_2^q \text{ if } \min[Q_{p+1}, W_p] \leq \min[Q_{q+1}, W_q] \end{aligned}$$

ここで $\{p, q\} = \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned} Y_i^1 &= Q_1 + W_1 + \min[X_i, Q_3, W_2] \\ Y_i^2 &= C_{-1} - (Q_3 + W_3 + \min[X_i, Q_2, W_1]). \end{aligned}$$

である. これは前節の例 3.2 の超離散化である. 超離散化の際に y_i の二通りの表記が必要になる.

4. 周期箱玉系との関係

4.1. \mathcal{T}_C の構造. (3.6) において (Q_i, W_j) , $(i = 1, 2, \dots, g+1)$ を $(Q_i - C_g, W_i - C_g)$ で置き換えても同じ式をみたすので, 一般性を失わずに $C_g = 0$ と仮定できる. $C = (C_{-1}, C_0, \dots, C_{g-1}, C_g = 0) \in \mathbb{Z}^{g+2}$ で generic (2.1) なものを固定すると (3.7) より各時刻 t 毎に \mathcal{T}_C 上では必ず次が成り立つ:

(a) 全ての Q_i^t, W_i^t はゼロ以上, (b) $Q_i^t = 0$ または $W_i^t = 0$ となる i が存在する.

この性質を受けて \mathcal{T}_C の部分集合 T_C^0 を定義する (以下, 簡単のため $Q_i = Q_i^t$ 等と書く):

(4.1)

$$T_C^0 = \left\{ (Q_1, \dots, Q_{g+1}, W_1, \dots, W_{g+1}) \in \mathcal{T}_C \mid \text{(a) } W_1 > 0, \text{(b) } Q_1 = 0 \text{ または } W_{g+1} = 0 \right\}.$$

さらに \mathcal{T}_C 上のシフト写像 s を次で与え,

$$s : (Q_1, \dots, Q_{g+1}, W_1, \dots, W_{g+1}) \mapsto (Q_2, \dots, Q_{g+1}, Q_1, W_2, \dots, W_{g+1}, W_1)$$

\mathcal{T}_C の部分集合 T_C^i を定義する:

$$T_C^i = \{s^i(\tau) \mid \tau \in T_C^0\}, \text{ for } i \in \mathbb{Z}.$$

s^{g+1} は恒等写像であることに注意. すると \mathcal{T}_C は次のような構造をしていることが分かる:

命題 4.1. (i) $T_C^i \cap T_C^j = \emptyset$ ただし $i \neq j \pmod{g+1}$, (ii) $\mathcal{T}_C = \bigcup_{i=0}^g T_C^i$.

4.2. 周期箱玉系へ. L 周期箱玉系は, 相空間 $B_L = \{0, 1\}^{\times L}$ 上の時間発展則

$$T_B : B_L \rightarrow B_L; b(t) \mapsto b(t+1)$$

で定義されるセルオートマトンである [22]. この系は $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_g) \in \mathbb{Z}_{>0}^g$ で定まる等位集合 $B_{L,\lambda} \subset B_L$ を持つ. ただし g は「連続して続く 1 の列の数」, λ は非減少列で $|\lambda| = \sum_{i=1}^g \lambda_i < 2L$ を満たすものである. T_B と λ の詳しい説明は割愛して例を挙げることにしたい.

例 4.2. (i) $L = 7, \lambda = (1, 2)$ の場合:

t	$b(t) = T_B^t(b(0))$	$\beta(b(t))$
0	0100110	(0, 1, 2, 1, 2, 1)
1	1010001	(1, 1, 1, 1, 3, 0)
2	0101100	(0, 1, 2, 1, 1, 2)
3	0010011	(0, 1, 2, 2, 2, 0)
4	1101000	(2, 1, 0, 1, 3, 0)
5	0010110	(0, 1, 2, 2, 1, 1)

(ii) $L = 15, \lambda = (1, 3, 3)$ の場合:

t	$b(t)$	$\beta(b(t))$	$T^t(\beta(b(0)))$
0	011101000111000	(0, 3, 1, 3, 1, 1, 3, 3)	= (0, 3, 1, 3, 1, 1, 3, 3)
1	000010111000111	(0, 1, 3, 3, 4, 1, 3, 0)	= (0, 1, 3, 3, 4, 1, 3, 0)
2	111001000111000	(3, 1, 3, 0, 2, 3, 3, 0)	= (3, 1, 3, 0, 2, 3, 3, 0)
3	000110110000111	(0, 2, 2, 3, 3, 1, 4, 0)	\xrightarrow{s} (2, 2, 3, 0, 1, 4, 0, 3)
4	111001001110000	(3, 1, 3, 0, 2, 2, 4, 0)	\xrightarrow{s} (1, 3, 0, 3, 2, 4, 0, 2)
5	000110110001110	(0, 2, 2, 3, 3, 1, 3, 1)	$\xrightarrow{s^2}$ (2, 3, 0, 2, 3, 1, 3, 1)
6	110001001110001	(2, 1, 3, 1, 3, 2, 3, 0)	$\xrightarrow{s^2}$ (3, 1, 2, 1, 3, 0, 3, 2)

非減少列 λ に対して C を $C_{-1} = L, C_g = 0, C_{g-i} = \sum_{k=1}^i \lambda_k$ ($i = 1, \dots, g$) で定めると、埋め込み写像

$$\beta : B_{L,\lambda} \hookrightarrow \mathcal{T}_{C,\mathbf{z}} ; b(t) \mapsto (Q_1^t, \dots, Q_{g+1}^t, W_1^t, \dots, W_{g+1}^t)$$

が作れる [8]. β の説明も省略して上の例を挙げるに留める.

以下, λ の条件を強めて単調増加列 $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_g$ とすると対応する C は条件 (2.1) を満たす. このとき, 箱玉系の初期値問題は組み合わせ論的な方法で解かれている:

定理 4.3. [12, 10]

(i) KKR 対応は $B_{L,\lambda}$ と $J'(\Gamma_C)_{\mathbf{z}} = J'(\Gamma_C) \cap \mathbb{Z}^g$ の間の全単射を定める. ここで $J'(\Gamma_C)$ は (2.3) で定義された g 次元実トーラス $\mathbb{R}^g / A\mathbb{Z}^g$ である. 特に集合 $B_{L,\lambda}$ の元の個数 $|B_{L,\lambda}|$ は $\det A$ である.

(ii) 周期箱玉系の時間発展 T_B は $J'(\Gamma_C)$ 上で線形化され, 解は周期行列 A が定める「超離散 Riemann テータ関数」で記述される.

そして β の像を詳しく調べると次のことが分かる:

命題 4.4. [6] $\beta : B_{L,\lambda} \rightarrow \mathcal{T}_{C,\mathbf{z}}^0$ は全単射である. 特に $\mathcal{T}_{C,\mathbf{z}} / \{\tau \sim s \cdot \tau \mid \tau \in \mathcal{T}_{C,\mathbf{z}}\}$ と $B_{L,\lambda}$ の間に全単射があり, $|\mathcal{T}_{C,\mathbf{z}}| = (g+1)|B_{L,\lambda}|$ が成り立つ.

この命題と定理 4.3 は予想 3.4 と矛盾しない。

周期箱玉系の時間発展 T_B と超離散周期戸田格子の時間発展 T とは可換でないことを注意しておく。つまり次の図式は可換でない。

$$\begin{array}{ccc} B_{L,\lambda} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{T}_{C,z} \\ \downarrow T_B & & \downarrow T \\ B_{L,\lambda} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{T}_{C,z} \end{array}$$

時間発展 T の等位集合はあくまで \mathcal{T}_C であって T の生成する流れは \mathcal{T}_C^0 で閉じないのである。例 4.2(ii) では、 $\beta(b(t))$ と $T^t(\beta(b(0)))$ が一致しないときシフト写像 s の作用で移りあう様子が観察できる。

3, 4 節の内容は次の図式にまとめられる:

$$\begin{array}{ccccc} B_{L,\lambda} & \xrightarrow[\beta]{/s} & (\mathcal{T}_C)_z & \subset & \mathcal{T}_C \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ J'_z(\Gamma_C) & \xleftarrow{/\nu_C} & J_z(\Gamma_C) & \subset & J(\Gamma_C) \end{array}$$

ただし $/s$ と $/\nu_C$ はそれぞれシフト写像 s と並進 ν_C から誘導される商写像である。縦矢印で書かれた三つの全単射のうち一番左は定理 4.3, 右の二つは予想 3.4 である。この図式から自明でない関係 $J'(\Gamma_C) \simeq J(\Gamma_C)/\{P \sim s^* \cdot P \mid P \in J(\Gamma_C)\}$ が従う。

5. 超離散テータ関数とトロピカルテータ関数

超離散周期戸田格子の解は超離散テータ関数を用いて書かれることが、近年のいくつかの研究で分かってきている。特に [7] では周期的な離散戸田格子の超離散化を解のレベルで考察している。この節ではそこで論じられている周期行列およびテータ関数の超離散化についての結果をまとめ、[15] でトロピカル曲線を経由して定義されるトロピカルテータ関数と同じものが得られることを示す。このことは、前節までで用いている [15] のトロピカル Jacobi 多様体およびトロピカルテータ関数が (超離散化と可換な) 良い定義であることの一つの裏付けていると考えられる。

5.1. 周期行列の超離散化。

$$\begin{aligned} \lambda &:= -x \\ \Delta(\lambda) &:= (-1)^{g+1} \lambda^{g+1} + (-1)^g c_g \lambda^g + \cdots + (-1) c_1 \lambda + c_0 \\ z &:= 2y + \Delta(\lambda) \end{aligned}$$

とおくと、離散周期戸田格子のスペクトル曲線 γ_c , (3.3) は

$$\gamma^1: \quad z^2 = \Delta(\lambda)^2 - 4c_{-1}$$

と超楕円曲線の標準形で表される. ここで従属変数 I_i, V_j を全て実数とすると, $\Delta(\lambda)$ および $\Delta(\lambda)^2 - 4c_{-1}$ の零点は全て単純かつ正の実数であり [20], それらを

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_g$$

$$0 < \lambda_0^{-1} < \lambda_0^1 < \lambda_1^{-1} < \lambda_1^1 < \cdots < \lambda_g^{-1} < \lambda_g^1$$

とおくとグラフの形から明らかに

$$\lambda_j^{-1} < \lambda_j < \lambda_j^1 \quad (j = 0, 1, \dots, g)$$

が成り立つ.

超楕円曲線 γ^1 に対して $H_1(\gamma^1, \mathbb{Z})$ の基底を標準的にとる. すなわち, $[\lambda_i^{-1}, \lambda_i^1]$ を分枝として z^+ 平面および z^- 平面を考え, a_i を z^+ 平面内で, $[\lambda_i^{-1}, \lambda_i^1]$ の近傍を反時計回りに一周するサイクル, b_i を互いに交わらず a_j とは $i = j$ のときに限り z^+ 内で 1 点で ($a_i \times b_i = 1$ となる向きで) 交わるものとする. γ_1 上の正則 1-form は

$$\omega_j = \frac{u_{j,g-1}\lambda^{g-1} + u_{j,g-2}\lambda^{g-2} + \cdots + u_{j,0}}{z} d\lambda \quad (u_{j,k} \in \mathbb{C})$$

と書ける. ω_j を $\int_{a_i} \omega_j = \delta_{i,j}$ と正規化することにより周期行列 $B = (\int_{b_i} \omega_j)_{i,j}$ が定まる.

この節では B の超離散極限に関する次の定理を示す.

定理 5.1. $\lambda = \exp(-L/\varepsilon), c_i = \exp(-C_i/\varepsilon)$ とスケール変換するとき,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} -2\pi\varepsilon iB = SKS \quad \text{ただし } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & \ddots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

つまり, サイクル b_i の極限は $\alpha_{g-i+1} + \alpha_{g-i+2} + \cdots + \alpha_g$ に対応する.

補題 5.2. C_i が条件 (2.1) をみたすとき, $0 \leq i < i+2 \leq j \leq g+1$ ならば

$$C_i + C_j > C_{i+1} + C_{j-1}$$

が成り立つ.

Proof. $C_{i+k} + C_{i+k+2} > 2C_{i+k+1}$ ($k = 0, 1, \dots, j-2$) の和を考えればよい. □

命題 5.3.

$$(5.1) \quad \lambda = e^{-\frac{L}{\varepsilon}}, \lambda_j = e^{-\frac{L_j}{\varepsilon}}, \lambda_j^\pm = e^{-\frac{L_j^\pm}{\varepsilon}}, c_i = e^{-\frac{C_i}{\varepsilon}}$$

とスケール変換して, 超離散極限 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \text{Log}_\varepsilon$ をとると, (極限で)

$$(5.2) \quad L_j = L_j^{-1} = L_j^1 = C_j - C_{j+1}$$

が成り立つ.

スケール変換の定め方より, $L_{g+1} < L_g < \dots < L_0$ であることに注意する.

Proof. 偶数のときも同様に示せるので, g が奇数のときのみ示す. $\Delta(\lambda) = 0, \Delta(\lambda)^2 - 4c_{-1} = 0$ はそれぞれ,

$$\begin{aligned} e^{-\frac{C_0}{\varepsilon}} + e^{-\frac{2L+C_2}{\varepsilon}} + \dots + e^{-\frac{(g+1)L+C_{g+1}}{\varepsilon}} &= e^{-\frac{L+C_1}{\varepsilon}} + e^{-\frac{3L+C_3}{\varepsilon}} + \dots + e^{-\frac{gL+C_g}{\varepsilon}} \\ \left(e^{-\frac{2C_0}{\varepsilon}} - 4e^{-\frac{C_{-1}}{\varepsilon}} \right) + \left(2e^{-\frac{2L+C_0+C_2}{\varepsilon}} + e^{-\frac{2L+2C_1}{\varepsilon}} \right) + \dots + e^{-\frac{2(g+1)L+2C_{g+1}}{\varepsilon}} \\ &= \left(2e^{-\frac{L+C_0+C_1}{\varepsilon}} \right) + \left(2e^{-\frac{3L+C_0+C_3}{\varepsilon}} + 2e^{-\frac{3L+C_1+C_2}{\varepsilon}} \right) + \dots + 2e^{-\frac{(2g+1)L+C_g+C_{g+1}}{\varepsilon}} \end{aligned}$$

と表わされる.

補題 5.2 より各辺で Log_ε をとって $\varepsilon \rightarrow +0$ とすると,

$$\begin{aligned} \min[C_0, 2L + C_2, \dots, (g+1)L + C_{g+1}] &= \min[L + C_1, 3L + C_3, \dots, gL + C_g] \\ \min[2C_0, 2L + 2C_1, \dots, (2g+2)L + 2C_{g+1}] \\ &= \min[L + C_0 + C_1, 3L + C_1 + C_2, \dots, (2g+1)L + C_g + C_{g+1}] \end{aligned}$$

を得る. これを解くことにより命題が導かれる. □

補題 5.4. (5.1) とスケール変換する.

(i) ($j > k$) のとき,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \text{Log}_\varepsilon(\lambda_j - \lambda_k^{\pm 1}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \text{Log}_\varepsilon(\lambda_j^{\pm 1} - \lambda_k) \\ &= L_j = C_j - C_{j+1} \end{aligned}$$

が成り立つ ($\text{Log}_\varepsilon(\cdot) = -\varepsilon \log(\cdot)$ と書いていた).

(ii)

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \text{Log}_\varepsilon(\lambda_j - \lambda_j^{-1}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \text{Log}_\varepsilon(\lambda_j^1 - \lambda_j) \\ &= \frac{1}{2}C_{-1} - jL_j - \sum_{i=j+1}^g L_i \\ &= \frac{1}{2}C_{-1} - j(C_j - C_{j+1}) - (C_{j+1} - C_{g+1}) \end{aligned}$$

が成り立つ.

Proof. (i) $0 < L_j < L_k$ と (5.2) より明らか.

(ii) グラフの形を考えると

$$\Delta(\lambda)^2 - 4c_{-1} = \prod_{i=0}^g (\lambda - \lambda_i^{-1})(\lambda - \lambda_i^1)$$

が

$$\Delta(\lambda) + 2\sqrt{c-1} = \prod_{i=0}^g (\lambda - \lambda_i^{(-1)^{g-i+1}})$$

と

$$\Delta(\lambda) - 2\sqrt{c-1} = \prod_{i=0}^g (\lambda - \lambda_i^{(-1)^{g-i}})$$

の積に因数分解されることが分かる. $\lambda = \lambda_j$ ととると

$$\begin{aligned} \lambda_j - \lambda_j^{(-1)^{g+j+1}} &= \frac{2\sqrt{c-1}}{\prod_{i \neq j} (\lambda_j - \lambda_i^{(-1)^{g+i+1}})} \\ \lambda_j - \lambda_j^{(-1)^{g+j}} &= \frac{-2\sqrt{c-1}}{\prod_{i \neq j} (\lambda_j - \lambda_i^{(-1)^{g+i+1}})} \end{aligned}$$

を得る. これより, $g+j$ の偶奇で場合分けして考えると,

$$\begin{aligned} \lambda_j - \lambda_j^{-1} &= \frac{2\sqrt{c-1}}{\prod_{i=0}^{j-1} (\lambda_j - \lambda_i^{(-1)^{i+j+1}}) \prod_{i=j+1}^g (\lambda_i^{(-1)^{i+j+1}} - \lambda_j)} \\ \lambda_j^1 - \lambda_j &= \frac{2\sqrt{c-1}}{\prod_{i=0}^{j-1} (\lambda_j - \lambda_i^{(-1)^{i+j}}) \prod_{i=j+1}^g (\lambda_i^{(-1)^{i+j}} - \lambda_j)} \end{aligned}$$

を得る. これと (i) より (ii) が成り立つことが分かる. □

命題 5.5.

$$\omega_j^0 = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{\lambda - \lambda_j} - \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \right\} d\lambda$$

とおき, $u_{j,k} \in \mathbb{C}$ を

$$\omega_j^0 = \frac{u_{j,g-1}\lambda^{g-1} + u_{j,g-2}\lambda^{g-2} + \cdots + u_{j,0}}{\Delta(\lambda)} d\lambda$$

で定める.

$$\tilde{\omega}_j = \frac{u_{j,g-1}\lambda^{g-1} + u_{j,g-2}\lambda^{g-2} + \cdots + u_{j,0}}{\sqrt{\Delta(\lambda)^2 - 4c-1}} d\lambda$$

において, (5.1) とスケール変換すると,

$$(5.3) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a_i} \tilde{\omega}_j = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a_i} \omega_j^0 = \delta_{i,j}$$

が成り立つ.

スケール変換により, 積分路 a_i, b_i も変換されていることに注意する. 変数 $\lambda (= \exp(-L/\varepsilon))$ で見ると積分路は 0 に収束してしまうが, 変数 L で見ると 0 ではない有限の長さの閉路に収束するようにとれる. このとき極限と積分の順序が交換できるので, 以下の証明では積分変数を L で考える.

Proof. (2.1) より, $2C_0 < C_{-1}$ であるから, $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \tilde{\omega}_j / \omega_j^0 = 1$ が成り立つ. また留数定理より $\int_{a_i} \omega_j^0 = \delta_{i,j}$ は ε によらずに成り立つ. \square

上の命題より, γ^1 の正規化された 1-form を ω_j と書くとき, $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \omega_j / \omega_j^0 = 1$ が成り立つ. これより次の命題を得る.

命題 5.6.

$$(5.4) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} -2\pi i \varepsilon B_{i,j} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} -2\pi i \varepsilon \int_{b_i} \omega_j^0$$

$$= \begin{cases} C_{-1} - 2C_1 - 2C_j + 2C_{j+1} & (i > j) \\ C_{-1} - 2C_1 - 2C_i + 2C_{i+1} & (i < j) \\ 2C_{-1} - 2C_1 - 2(j+2)C_j + 2(j+1)C_{j+1} & (i = j) \end{cases}$$

が成り立つ.

命題 5.6 より, 直ちに定理 5.1 を得る.

Proof. (5.4) の最初の等号については, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_j / \omega_j^0 = 1$ より, 右辺が収束するならば成り立つ. 一方,

$$\begin{aligned} -2\pi i \varepsilon \int_{b_i} \omega_j^0 &= -2\pi i \varepsilon \sum_{k=1}^i 2 \int_{\lambda_{k-1}^1}^{\lambda_k^{-1}} \frac{1}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{\lambda - \lambda_j} - \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \right\} d\lambda \\ &= -\varepsilon \sum_{k=1}^i \left[2 \log \left| \frac{(\lambda_k^{-1} - \lambda_j)}{(\lambda_{k-1}^1 - \lambda_j)} \right| \right] - \varepsilon \sum_{k=1}^i \left[2 \log \left| \frac{(\lambda_{k-1}^1 - \lambda_0)}{(\lambda_k^{-1} - \lambda_0)} \right| \right] \end{aligned}$$

ここで補題 5.4 より, ($C_{g+1} = 0$ に注意して)

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} -\varepsilon \sum_{k=1}^i \left[2 \log \left| \frac{(\lambda_k^{-1} - \lambda_j)}{(\lambda_{k-1}^1 - \lambda_j)} \right| \right] \\ &= \begin{cases} \sum_{k=1}^i 2(C_j - C_{j+1}) - \sum_{k=1}^i 2(C_j - C_{j+1}) & (i < j) \\ \sum_{k=1}^{j-1} 2(C_j - C_{j+1}) + \sum_{k=j+1}^i 2(C_k - C_{k+1}) & (i > j) \\ -\sum_{k=1}^j 2(C_j - C_{j+1}) - \sum_{k=j+2}^i 2(C_{k-1} - C_k) & (i > j) \\ \sum_{k=1}^{j-1} 2(C_j - C_{j+1}) + 2\left(\frac{1}{2}C_{-1} - j(C_j - C_{j+1}) - (C_{j+1} - C_{g+1})\right) & (i = j) \\ -\sum_{k=1}^j 2(C_j - C_{j+1}) & (i = j) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & (i < j) \\ -2C_j + 2C_{j+1} + 2C_i - 2C_{i+1} & (i > j) \\ C_{-1} - (2j + 2)C_j + 2jC_{j+1} & (i = j) \end{cases} \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} -\varepsilon \sum_{k=1}^i \left[2 \log \left| \frac{(\lambda_k^{-1} - \lambda_0)}{(\lambda_{k-1}^1 - \lambda_0)} \right| \right] \\ &= 2\left(\frac{1}{2}C_{-1} - (C_1 - C_{g+1})\right) + \sum_{k=2}^i 2(C_{k-1} - C_k) - \sum_{k=1}^i 2(C_k - C_{k+1}) \\ &= C_{-1} - 2C_1 - 2C_i + 2C_{i+1} \end{aligned}$$

が成り立つ. よって命題は成り立つ. \square

5.2. 超離散テータ関数. 定理 5.1 より, 周期行列自体の極限は発散するが, この節ではテータ関数の超離散化は Mikhalkin-Zharkov のトロピカルテータ関数と一致していることを示す.

超楕円曲線 γ^1 に付随するテータ関数は

$$\theta(z, B) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i n^t B n + 2\pi i n^t z)$$

と定義される \mathbb{C}^g 上の正則関数であり, 擬周期性

$$\theta(z + l, B) = \theta(z, B), \quad (l \in \mathbb{Z}^g)$$

$$\theta(z + Bl, B) = \exp(-\pi i l^t (2z + Bl)) \theta(z, B), \quad (l \in \mathbb{Z}^g)$$

を持つ. テータ関数の形に注目して, z の成分を純虚数 $z \in (i\mathbb{R})^g$ からとり,

$$B = -\frac{B_0}{2\pi i \varepsilon}, \quad z = -\frac{Z}{2\pi i \varepsilon}$$

とスケール変換して, $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \text{Log}_\varepsilon$ をとると, 定理 5.1 より, 超離散テータ関数

$$\Theta(Z, B_0) := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \text{Log}_\varepsilon \theta(z, B) = \min_{n \in \mathbb{Z}^g} \left(\frac{1}{2} n^t B_0 n + n^t Z \right) \quad (Z \in \mathbb{R}^g)$$

を得る。また

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \text{Log}_\varepsilon \theta(z + Bl, B) = \Theta(Z + B_0 l, B_0)$$

なので、テータ関数の擬周期性より、

$$(5.5) \quad \Theta(Z + B_0 l, B_0) = -l^t(Z + \frac{1}{2}B_0 l) + \Theta(Z, B_0), \quad (l \in \mathbb{Z}^g)$$

を得る。 $H_1(\gamma, Z)$ の生成元を取り替えるだけなので B_0 を K に置き換えても成り立つ。これらの定義および擬周期性は [15] で導入されているものと (min, max の違いを除いて、これらはどちらにでもとれる) 一致する。

REFERENCES

- [1] M. Adler and P. van Moerbeke, *Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory*, *Advances. Math.* **38**, 318-379 (1980).
- [2] M. Audin, *Spinning tops - A course on Integrable Systems*, (Cambridge University Press, 1996).
邦訳: コマの幾何学 - 可積分系講義, 高崎 金久 訳 (共立出版 2000).
- [3] K. Fukuda, M. Okado, Y. Yamada, Energy functions in box ball systems, *Int. J. Mod. Phys. A* **15**, 1379-1392 (2000).
- [4] G. Hatayama, K. Hikami, R. Inoue, A. Kuniba, T. Takagi and T. Tokihiro, The $A_M^{(1)}$ Automata related to crystals of symmetric tensors, *J. Math. Phys.* **42**, 274-308 (2001).
- [5] R. Hirota and S. Tsujimoto and T. Imai, *Difference scheme of soliton equations*, in *Future directions of nonlinear dynamics in physical and biological systems*, eds. P.L. Christiansen, J.C. Eilbeck, and R.D. Parmentier (Plenum Press, New York, 1993).
R. Hirota and S. Tsujimoto, *Conserved quantities of a class of nonlinear difference-difference equations*, *J. Phys. Soc. Japan*, **64**, no. 9, 3125-3127 (1995).
- [6] R. Inoue and T. Takenawa, *Tropical spectral curves and integrable cellular automata*, arXiv: 0704.2471.
- [7] S. Iwao and T. Tokihiro, *Ultradiscretization of the theta function solution of pd Toda*, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** 12987-13021 (2007).
- [8] T. Kimijima and T. Tokihiro, *Initial-value problem of the discrete periodic Toda equations and its ultradiscretization*, *Inverse Problems* **18** 1705-1732 (2002).
- [9] A. N. Kirillov, 前野俊昭, 素晴らしきアミーバたち, 数学, 第 58 卷 (岩波書店, 2006).
- [10] A. Kuniba and R. Sakamoto, *The bethe ansatz in a periodic box-ball system and the ultradiscrete Riemann theta function*, *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, no. 9, P09005, 12 pp (2006).
- [11] A. Kuniba and R. Sakamoto, *Combinatorial Bethe ansatz and ultradiscrete Riemann theta function with rational characteristics*, preprint, arXiv: nlin/0611046.
- [12] A. Kuniba, T. Takagi and A. Takenouchi, *Bethe ansatz and inverse scattering transform in a periodic box-ball system*, *Nucl. Phys. B* **747**, no. 3, 354-397 (2006).
- [13] J. Mada, M. Idzumi and T. Tokihiro *On the initial value problem of a periodic box-ball system*. *J. Phys. A* **39** L617-L623 (2006).
- [14] G. Mikhalkin, *Enumerative tropical algebraic geometry in \mathbb{R}^2* , math.AG/0312530.

- [15] G. Mikhalkin and I. Zharkov, *Tropical curves, their Jacobians and theta functions*, math.AG/0612267.
- [16] A. Nagai, T. Tokohiro and J. Satsuma, *Ultra-discrete Toda molecule equation*, Phys. Lett. A, **244**, 383-388 (1998).
- [17] D. Speyer and B. Sturmfels, *Tropical Mathematics*, math.CO/0408099.
- [18] D. Takahashi and J. Satsuma, *A soliton cellular automaton*, J. Phys. Soc. Japan, **59**, 3514-3519 (1990).
- [19] 田中俊一, 伊達悦朗, *KdV 方程式 - 非線形数理物理入門* (紀伊國屋書店, 1979).
- [20] 戸田盛和, *非線形格子力学* (岩波書店, 1978).
- [21] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, *From Soliton Equations to Integrable Cellular Automata through a Limiting Procedure*, Phys. Rev. Lett., **76**, 3247-3250 (1996).
- [22] F. Yura and T. Tokihiro, *On a periodic soliton cellular automaton*, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 3787-3801 (2002).