

グレブナー基底による幾何定理の証明について (II) — イdeal成分の分解の利用

森継 修一

SHUICHI MORITSUGU*

筑波大学大学院 図書館情報メディア研究科

GRADUATE SCHOOL OF LIBRARY, INFORMATION AND MEDIA STUDIES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

荒井 千里

CHISATO ARAI†

筑波大学大学院 図書館情報メディア研究科

GRADUATE SCHOOL OF LIBRARY, INFORMATION AND MEDIA STUDIES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

1 はじめに

幾何定理の代数的証明のため 1977 年に Wu Wen-Tsün が導入したアルゴリズムは、以後広く使われ、多数の定理が証明されてきている。1988 年に Chou Shang-Ching [3] は、Wu の方法 [20] で証明に成功した多数の初等幾何の定理の中から、512 題を一覧として示した。現在では、同書に示された一連の定理を多項式イdeal計算に関する一種のベンチマークとして整備しようとする計画も進められている [5]。

一方で、グレブナー基底 [2] に基づく証明法も多くの著者 [7, 8, 19] によって提案されてきている。Chou 自身、上記 512 題の定理に対して、グレブナー基底の方法も適用しているが、1988 年の時点では 35 題が未解決（4 時間で計算打ち切り）となっていた。計算効率の面で、グレブナー基底に対する Wu の方法の優位性はたびたび指摘されてきたところである。筆者らは 2004 年以来、未解決の 35 題の定理を対象として、最新の実装に基づくグレブナー基底計算による証明を試み、「26 題について証明に成功したものの、残る 9 題についてはグレブナー基底の計算が本質的に困難である」ことを示した [10, 11]。

証明に成功した 26 題のうちの 7 題では、「非退化条件の追加」による計算の工夫が本質的である。本稿では、この「非退化条件の追加」が「イdeal成分の分解」に対応していることを示し、計算効率の改善と非退化条件の自動抽出の可能性を探る。特に、以下の 2 つの定理については詳細に検討する。

- Thèbault-Taylor の定理
イdeal成分を分解することにより、グレブナー基底の方法では世界で初めて証明に成功した [10]。
- Chou による例題 109
「退化した場合」についても、新たな仮定の式を追加することによって証明が可能になることを示す。

*moritsug@slis.tsukuba.ac.jp

†arai@slis.tsukuba.ac.jp

2 基本算法

Chou[3]にしたがって、幾何定理における一連の仮定を次の形の多項式表現に翻訳する。

$$f_1, \dots, f_\ell \in \mathbf{Q}(u_1, \dots, u_m)[x_1, \dots, x_n].$$

ここで、変数は以下の2種類に区分される。

- u_i : 自由な値をとることのできるパラメータ
- x_j : 他の変数 u_i, x_k に依存して値の決まる変数

次に、定理の結論も同じ形の多項式に翻訳する。

$$g \in \mathbf{Q}(u_1, \dots, u_m)[x_1, \dots, x_n]$$

これらの設定の下で、「定理を証明する」ために次の関係を適用する。

$$g \text{ は } f_1, \dots, f_\ell \text{ から一般に導かれる} \Leftrightarrow g \in \sqrt{(f_1, \dots, f_\ell)}$$

この「根基所属判定問題」を解くためには、種々の計算法が知られているが、ここでは、グレブナー基底の方法に基づく以下の命題 [4] を適用することとする。(より詳しい議論は [17] にもある。)

命題 1 (根基所属判定)

K を任意の係数体とし、 $I = (f_1, \dots, f_\ell) \subset K[x_1, \dots, x_n]$ を多項式イデアルとする。任意の項順序により I のグレブナー基底 G を計算し、 $g \in K[x_1, \dots, x_n]$ を別の多項式とする。このとき、 $g \in \sqrt{I}$ であることと、以下の3条件は同値である。

- $\exists s \in \mathbf{N}$, $g^s \xrightarrow{G} 0$ ($s = 1, 2, \dots$ に対して計算せよ。)
- $J = (I, 1 - yg) \subset K[x_1, \dots, x_n, y]$ に対して、任意の項順序によるグレブナー基底が (1) となる。
- $J = (I, g - y) \subset K[x_1, \dots, x_n, y]$ に対して、 $\{x_1, \dots, x_n\} \succ^{\text{lex}} y$ というブロック順序でグレブナー基底を計算したとき、 y^s ($\exists s \in \mathbf{N}$) という一変数多項式が基底の中に含まれる。 ■

条件 (a) を用いる場合は、まず $g \xrightarrow{G} 0$ を試すことになる。幾何定理から導かれるイデアルでは、ほとんどすべての場合 $s = 1$ であることが知られている [3, 4] ので、この方法は十分実用的である。実際、本稿で証明に成功した 26 題の定理においては、すべて $g \xrightarrow{G} 0$ を得ている。したがって、以下の議論では、条件 (a) により「イデアル所属判定問題」として計算することとする。

条件 (b) の適用は、計算効率の面からは考慮に値するが、 $(f_1, \dots, f_j, \dots, f_\ell) \neq (1)$ であることは先に確認すべきである。仮定となる条件の翻訳を間違えると、しばしば $(f_1, \dots, \tilde{f}_j, \dots, f_\ell) = (1)$ となるので注意を要する。

条件 (c) を用いる場合、係数体が $K = \mathbf{Q}(u_1, \dots, u_m)$ であることから、計算効率上の困難を招くことが多い。また、上述のように、幾何定理の証明においては具体的に s の値を求める必要性はほとんどない。

3 計算結果に関する検討

3.1 計算環境および結果

表 1 に示した環境で、Chou の例題 512 題のうち、1988 年時点でグレブナー基底によって証明不可能だった 35 題の計算を行った。グレブナー基底計算は、全次数逆辞書式順序 ($x_n > x_{n-1} > \dots > x_1$) を用い、

表 1: Environment for Maple & Epsilon

CPU	Pentium 4 (3.6 GHz)
OS	Windows XP professional ed.
Main Memory	2.0 GB

表 2: Success / Failure for Chou's Examples

No.	# x_i	# u_i	# f_i	Gröbner	Epsilon	No.	# x_i	# u_i	# f_i	Gröbner	Epsilon
6	12	11	12	*	○	96	7	4	7	◇	○
7	12	11	12	*	○	99	10	4	13	♣	○
8	11	8	13	○	○	106	8	4	9	○	○
10	20	6	23	*	○	109	7	6	11	♣	○
11	20	6	23	*	○	115	8	3	10	♣	○
12	20	6	23	*	○	240	10	3	10	♣	○
13	17	6	19	*	○	310	14	5	16	◇	○
14	17	6	19	*	○	311	13	4	17	○	○
19	17	6	19	*	○	315	20	4	23	◇♣	○
21	11	4	13	○	○	316	24	4	31	◇	○
26	13	7	14	○	○	367	14	5	18	○	○
40	15	3	15	○	○	379	9	4	11	○	○
45	14	3	14	○	○	395	5	3	6	○	○
48	10	6	11	◇	○	396	14	5	16	♣	○
63	15	6	19	○	○	401	7	6	9	○	○
72	10	6	13	◇♣	○	492	17	3	18	○	○
80	14	5	16	*	○	507	8	7	8	○	○
94	7	3	8	○	○						

係数体を $\mathbb{Q}(u_1, \dots, u_m)$ として、Maple11[9] (計算オプションは `method=buchberger` を指定) により求めた。

結果として、35 題のうち 26 題は証明に成功したが、残る 9 題は計算不可能なまま残った。この結果は、他の数式処理システム Reduce3.6[6] および Risa/Asir[12] を用いた場合も同様だったので、この 9 題に関しては、グレブナー基底の計算が本質的に困難であると考えられる。比較のため、D.Wang による Epsilon ライブラリ [18] を用いて、Wu の方法によっても計算を行った結果、35 題すべてが計算可能であることを確かめた。

詳細なタイミングデータは先行論文 [10] に示したので、ここでは各例題に対する計算の成否のみを表 2 にまとめた。各列および表中の記号の意味は以下のとおりである。計算法の工夫 (◇, ♣) のうち、インクリメンタルなグレブナー基底計算 (◇) [10, 11] については本稿では扱わないものとし、「非退化条件の追加 (♣)」と「イデアル成分の分解」の関係を以下の節で議論する。

# x_i	仮定の式の中で、他に依存する変数の個数
# u_i	仮定の式における、自由パラメータの個数
# f_i	仮定を翻訳することによって得られる多項式の個数
○	グレブナー基底を直接計算して証明に成功
◇	グレブナー基底をインクリメンタルに計算して証明に成功
♣	非退化条件を仮定の式に追加して証明に成功
*	メモリ不足により証明失敗
Gröbner	命題 1 条件 (a) に基づく計算
Epsilon	関数 'CharSet' および 'prem' による計算

3.2 非退化条件の追加 (♣) とイデアル成分の分解

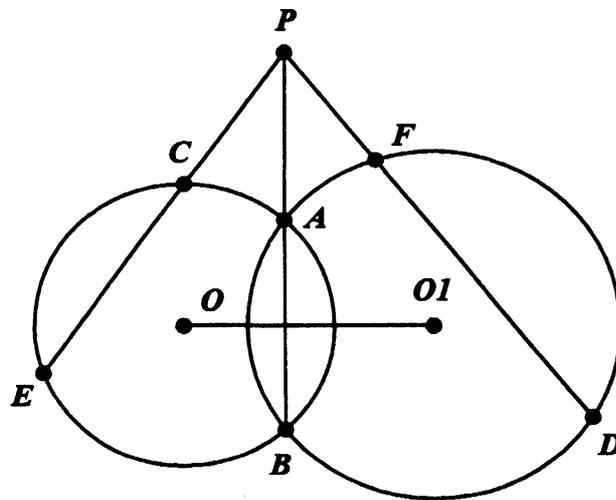


図 1: Example 109

表 2 において、♣が示されている例題では、多項式に翻訳された仮定だけでは条件が不足していて、 $g \xrightarrow{G} 0$ とならない。これらの例題に対しては、Chou[3] の証明システムが検出した「非退化条件」を追加して、グレブナー基底を再計算することにより証明を完成させている。具体的に次の例題を探り上げて、その詳細を見直すことにする。

例 1 (例題 109: 図 1)

円 O および O_1 が 2 点 A, B で交わっているとき、直線 AB 上に点 P をとる。点 P から両円に割線 PCE および PDF を引いたとき、 $PC \cdot PE = PF \cdot PD$ が成り立つことを示せ。

仮定 AB と OO_1 の交点を原点 $X(0,0)$ にとり、各点の座標を $O(u_1, 0)$, $O_1(u_2, 0)$, $A(0, u_3)$, $B(0, x_1)$, $P(0, u_4)$, $E(x_2, u_5)$, $C(x_4, x_3)$, $F(x_5, u_6)$, $D(x_7, x_6)$ とおいて、以下の条件を順に多項式に翻訳する。 O_1 は OX 上, $AX \perp XO$, X は AB の中点, P は AB 上, $EO \equiv OA$, $CO \equiv OA$, C は PE 上, $FO_1 \equiv O_1A$, $DO_1 \equiv O_1A$, D は PF 上。結果として、11 個の多項式 f_1, \dots, f_{11} を得る。

結論 条件 $PC \cdot PE = PF \cdot PD$ を多項式 g で表す。

証明 イデアル $I = (f_1, \dots, f_{11})$ に対しては、 $g \notin I$ となるため、以下の非退化条件を追加する必要がある。

$$C(x_4, x_3) \neq E(x_2, u_5) \Rightarrow h_1 := (x_3 - u_5)z_1 - 1 = 0$$

$$D(x_7, x_6) \neq F(x_5, u_6) \Rightarrow h_2 := (x_6 - u_6)z_2 - 1 = 0$$

これらの多項式 h_1, h_2 を $I = (f_1, \dots, f_{11})$ に追加し、 $I' = (I, h_1, h_2)$ とすると、 $g \in I'$ を得るため、証明が完成する。

注 上記の非退化条件は、 $I = (f_1, \dots, f_{11})$ のグレブナー基底から導くことができる。イデアル I における x_3 および x_6 に関する最小多項式を求めると、次を得る。

$$I \ni (x_3 - u_5) \cdot \varphi_3(x_3), \quad (x_6 - u_6) \cdot \varphi_6(x_6) \quad \varphi_k(x_k) \in \mathbb{Q}(u_1, \dots, u_6)[x_k]. \quad (k = 3, 6)$$

ここで、イデアル $I = (f_1, \dots, f_{11})$ を分解して、 $\tilde{I} = (I, \varphi_3, \varphi_6)$ に限定して考えれば、 $g \in \tilde{I}$ となり、証明が完成する。これは、 $x_3 - u_5 \neq 0, x_6 - u_6 \neq 0$ が非退化条件として必要だったことを意味する。

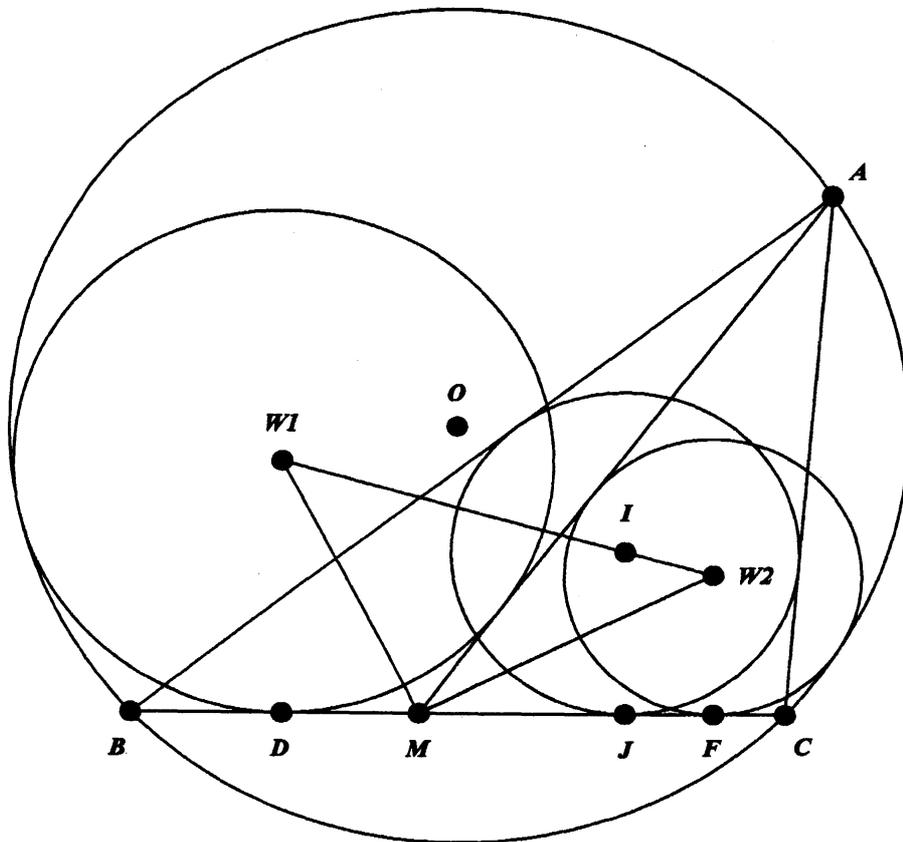


図 2: Thèbault-Taylor's Theorem

Chou[3] には、証明に成功した 512 題以外に、イデアル成分の分解のために非常に複雑な計算が必要な例として、次に示す「Thèbault-Taylor の定理」が紹介されている。Chou 自身を含めて、これまで何通りかの証明がなされている [16] が、グレブナー基底による成功例は筆者 [10] が世界初と見られる。ここでは、

Chouによる第2の定式化 ([3] pp.67-68) に従って、幾何学的条件を多項式に翻訳するものとする。これは、いくつかの補助的な点を追加することにより、計算が容易になるよう工夫された記術となっている (図2)。

例2 (Thèbault-Taylorの定理)

三角形 ABC の頂点 A と、底辺 BC 上の点 M とを結ぶ。また、 ABC の外心を O 、内心を I とする。次に、円 w_1 は辺 AM, MB と外接円 O に接し、円 w_2 は辺 AM, MC と内接円 I に接するものとする。このとき、3点 w_1, w_2, I は同一直線上にあることを示せ。

仮定 幾何学的条件を順次翻訳すると、 $f_1, \dots, f_{14} \in \mathbf{Q}(u_2, u_3, u_4)[x_1, \dots, x_{14}]$ を得る。

結論 2円の接線に関する条件を多項式 g で表す。

証明 以下の手順により、結論 g が成立するイデアル成分を見つけることに成功した。

Step 1 $I = (f_1, \dots, f_{14})$ のグレブナー基底を計算すると $g \notin I$ である。実際には、 g を簡約する過程で式が爆発してしまい、標準形の計算が不可能である。

Step 2 イデアル I に属する一変数多項式で因数分解可能なものを探すと、 $\varphi_5(x_5) \cdot \varphi'_5(x_5) \in I$ (各因子は x_5 の2次式) を得る。

Step 3 $\tilde{I} = (I, \varphi_5(x_5))$ とおくと、 \tilde{I} に対するグレブナー基底計算から $g \notin \tilde{I}$ を得る。そこで、イデアル \tilde{I} に属する一変数多項式で因数分解可能なものを探すと、 $\varphi_{11}(x_{11}) \cdot \varphi'_{11}(x_{11}) \in \tilde{I}$ (各因子は x_{11} の2次式) を得る。

Step 4 一方、 $\tilde{I}' = (I, \varphi'_5(x_5))$ とおいても、 \tilde{I}' に対するグレブナー基底計算から $g \notin \tilde{I}'$ である。そこで、イデアル \tilde{I}' に属する一変数多項式で因数分解可能なものを探すと、 $\varphi''_{11}(x_{11}) \cdot \varphi'''_{11}(x_{11}) \in \tilde{I}'$ (各因子は x_{11} の2次式) を得る。

Step 5 以上のことから、イデアル I は以下の4成分に分解されることが分かる。

$$\begin{aligned} I_1 &= ((I, \varphi_5(x_5)), \varphi_{11}(x_{11})) & I_2 &= ((I, \varphi_5(x_5)), \varphi'_{11}(x_{11})) \\ I_3 &= ((I, \varphi'_5(x_5)), \varphi''_{11}(x_{11})) & I_4 &= ((I, \varphi'_5(x_5)), \varphi'''_{11}(x_{11})) \end{aligned}$$

このとき、 I_j に対するグレブナー基底をそれぞれ計算することにより、 $g \in I_1$ および $g \notin I_2, I_3, I_4$ を得る。すなわち、定理の結論 g はイデアル成分 I_1 の上のみで成立することが確かめられた。 ■

全体の計算時間は、表1に示した環境下で、約1900秒である。そのうち95%以上のCPU時間がStep 1, 3 および 4 における I, \tilde{I}, \tilde{I}' のグレブナー計算に費やされている。

4 イデアル成分の分解

4.1 例題109再論

例2 (Thèbault-Taylorの定理) の証明に倣って例1 (Chouによる例題109) の証明を完成させると、 $I = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4$ と分解された各成分に対し、 $g \in I_1$ および $g \notin I_2, I_3, I_4$ となっていることが確かめられる。ここで、

$$\begin{aligned} I_1 &= (I, \varphi_3(x_3), \varphi_6(x_6)) & I_2 &= (I, \varphi_3(x_3), x_6 - u_6) \\ I_3 &= (I, x_3 - u_5, \varphi_6(x_6)) & I_4 &= (I, x_3 - u_5, x_6 - u_6) \end{aligned}$$

であり、各成分の幾何学的条件は

$$\begin{aligned}
 I_1 : C \neq E, D \neq F & & I_2 : C \neq E, D = F \\
 I_3 : C = E, D \neq F & & I_4 : C = E, D = F
 \end{aligned}$$

に対応する。したがって、「PCEおよびPFDがともに割線である」という前提に立てば、「退化した場合 I_2, I_3, I_4 」を除外して、イデアル成分 I_1 だけを考えればよい。一方、いわゆる方べきの定理 [14] を考えると、「PCEまたはPFDが接線である」場合にも、同じ結論 $PC \cdot PE = PF \cdot PD$ が成り立つことは明らかである。（[14]では、「割線の場合」と「接線の場合」との両者それぞれを「方べきの定理」として示し、個別に証明を与えている。）

この例題 109 に対しても、種々の検討を行った結果、イデアル成分 I_2, I_3, I_4 についても証明が可能になるためには、以下の修正を加えればよいことが判った。

- $D(x_7, x_6) = F(x_5, u_6)$ (PF が接線) の場合
 $PF \perp FO_1$ を表す式 p_1 を仮定に追加し、 u_6 を従属変数として扱う。
- $C(x_4, x_3) = E(x_2, u_5)$ (PE が接線) の場合
 $PE \perp EO$ を表す式 p_2 を仮定に追加し、 u_5 を従属変数として扱う。

したがって、各成分を次のようなイデアルに置き換えることにより、 $g \in \bar{I}_2, \bar{I}_3, \bar{I}_4$ が得られ、4つのケースすべてについて結論 g が成立することが証明された。

$$\begin{aligned}
 \bar{I}_2 & := (I_2, p_1) \subset \mathbf{Q}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)[x_1, \dots, x_7, u_6] \\
 \bar{I}_3 & := (I_3, p_2) \subset \mathbf{Q}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_6)[x_1, \dots, x_7, u_5] \\
 \bar{I}_4 & := (I_4, p_1, p_2) \subset \mathbf{Q}(u_1, u_2, u_3, u_4)[x_1, \dots, x_7, u_5, u_6]
 \end{aligned}$$

4.2 定理の成立するイデアル成分の抽出

表 3: Results of Decomposition of Ideals

Ex.	dim R/I	# ideal components	
		total	true
72	8	8	3
99	16	8	1
109	16	4	1
115	16	8	3
240	∞	8	2 [†]
315	∞	(unknown)	1(?)
396	8	8	2
T.T.	8	4	1

†: 2 components \times (dim $R/I = 4$)

これまでに計算した多数の例題から、最初に翻訳した仮定から作られるイデアル I に対して $g \notin I$ となる場合は、退化した図形が含まれていることが原因になっている可能性がある。その際、追加すべき非退化条件も未知の場合、前節の議論から、非常に大まかな方向として、次の証明手順が考えられる。

- (i) イデアルを (準素) 成分に分解する。
- (ii) 各成分において、結論が成立するかどうか調べる。

この方針に基づき、Chou の例題から「非退化条件の追加 (表 2:♣)」を行った 7 題と Thèbault-Taylor の定理について、イデアル成分の分解を計算した結果を表 3 に示した。計算は Maple11 の因数分解機能に基づく。「定理の成立する成分を分離できる」範囲でイデアルを分解したので、求まった各成分が (準) 素イデアルかどうかについては確認していない。

例題 315 については、複雑な基底をもつイデアルのため、結論の成立する成分を抽出することはできたが、その他の成分の構成については未知である。Risa/Asir にはイデアルの準素分解を計算する関数 `primedec` が実装されているが、直接計算可能だったのは例題 72, 240, 396 の 3 題のみであり、一般には $\mathbb{Q}(u_i)$ 係数での分解は計算困難と見られる。

予想外なことに、「定理の成立するイデアル成分」は 1 個とは限らないという結果が得られている。Chou による証明系が見つけた「非退化条件」を追加することは、「定理の成立するイデアル成分 1 個を特定すること」に対応するので、両者で「証明できる範囲」に差があることになったが、その幾何学的意味については個別の検討を要するものと考えられる。

また、前節で見たように、例題 109 については「割線が退化したものが接線である」という解釈に基づいて、4 成分すべてについて定理が成立するよう仮定の式を再構成することに成功した。しかしながら、その他の例題については、それぞれの成分に対応する幾何学的条件が見通せないことの方が多く、表 3 の解釈には、今後のさらなる検討を要する。

5 おわりに

本稿では、グレブナー基底による幾何定理証明の際、「非退化条件の追加」を「イデアル成分の分解」ととらえて、定理の成立する成分を抽出する試みを行った。しかしながら、分解された成分のもつ幾何学的意味を明らかにしつつ、効率的なアルゴリズムとして一般化するには至っていない。以下に未解決点を列挙して、今後の課題としたい。

- (1) 同様の視点は、すでに [1, 13] などでも提案されている。Chou の例題 109 について、退化したケースまで含めて証明可能にした点は本研究の成果であるが、そのまま一般化するのは困難と考えられる。
- (2) イデアルを分解して求められた各成分が、幾何学的条件とどういう対応付けができるのか、現時点では人間による解釈が不可欠である。
- (3) パラメータ u_i と変数 x_j を合わせると、非常に変数の多い系においてイデアルの分解を行わなければならないため、複雑な定理に対しては計算の実行が困難である。
- (4) 現状では、使用する数式処理システムの機能の制約から、多項式を有理数係数と考え、因数分解を $\mathbb{Q}[u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n]$ 上で行っている。これに対し、代数拡大体上での因数分解を用いる算法 [15] も提案されているので、その必要性も含めて比較検討が必要である。

参 考 文 献

- [1] Bazzotti, L., Dalzotto, G., and Robbiano, L.: Remarks on Geometric Theorem Proving, *Automated Deduction in Geometry 2000* (Richter-Gebert, J. and Wang, D., eds.), *LNAI*, 2061, Zurich, Springer, 2001, 104–128.

- [2] Buchberger, B.: *Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal*, PhD thesis, Universität Innsbruck, 1965.
- [3] Chou, S.-C.: *Mechanical Geometry Theorem Proving*, D.Reidel, Dordrecht, 1988.
- [4] Cox, D., Little, J., and O'Shea, D.: *Ideals, Varieties, and Algorithms (2nd ed.)*, Springer, N.Y., 1997. (邦訳 シュプリンガー・フェアラーク東京 2000).
- [5] Gräbe, H.-G.: The SymbolicData Project, <http://www.symbolicdata.org/>, 2000–2006.
- [6] Hearn, A. C.: *Reduce User's Manual (Ver. 3.6)*, RAND Corp., Santa Monica, 1995.
- [7] Kapur, D.: Using Gröbner Bases to Reason About Geometry Problems, *J.Symbolic Computation*, **2**(4), 1986, 399–408.
- [8] Kutzler, B. and Stifter, S.: On the Application of Buchberger's Algorithm to Automated Geometry Theorem Proving, *J.Symbolic Computation*, **2**(4), 1986, 389–397.
- [9] Maplesoft: *Maple 11 User Manual*, Maplesoft, 東京, 2007. (日本語版).
- [10] Moritsugu, S. and Arai, C.: On the Efficiency of Geometry Theorem Proving by Gröbner Bases, *Calculus/MKM 2007 Work in Progress, RISC-Linz Report Series*, **07-06**, 2007, 35–45.
- [11] 森継修一, 荒井千里: グレブナー基底による幾何定理の代数的証明の効率について, 日本応用数学会論文誌, **17**(2), 2007, 183–193.
- [12] Noro, M. and Takeshima, T.: Risa/Asir - A Computer Algebra System, *ISSAC '92* (Wang, P., ed.), Berkeley, ACM, 1992, 387–396.
- [13] Recio, T. and Vélez, M. P.: Automatic Discovery of Theorems in Elementary Geometry, *J. of Automated Reasoning*, **23**(1), 1999, 63–82.
- [14] 佐々木元太郎: ユークリッド幾何, 現代数学レクチャーズ A-5, 培風館, 東京, 1979.
- [15] Wang, D.: Algebraic Factoring and Geometry Theorem Proving, *CADE 12* (Bundy, A., ed.), *LNAI*, **814**, Nancy, Springer, 1994, 386–400.
- [16] Wang, D.: Geometry Machines: From AI to SMC, *AISMC 3* (Calmet, J., Campbell, J. A., and Pfalzgraf, J., eds.), *LNCS*, **1138**, Steyr, Springer, 1996, 213–239.
- [17] Wang, D.: Gröbner Bases Applied to Geometric Theorem Proving and Discovering, *Gröbner Bases and Applications* (Buchberger, B. and Winkler, F., eds.), *London Mathematical Society Lecture Note Series*, **251**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, 281–301.
- [18] Wang, D.: *Elimination Practice : Software Tools and Applications*, Imperial College Press, London, 2004.
- [19] Winkler, F.: A Geometrical Decision Algorithm Based on the Gröbner Bases Algorithm, *ISSAC '88* (Gianni, P., ed.), *LNCS*, **358**, Rome, Springer, 1988, 356–363.
- [20] Wu, W.-T.: On the decision problem and the mechanization of theorem-proving in elementary geometry, *Automated Theorem Proving : After 25 Years* (Bledsoe, W. and Loveland, D., eds.), *Contemporary Mathematics*, **29**, AMS, Providence, 1983, 213–234.