数理解析研究所講究録
第1656巻 2009年 34-43

Multivariate generalization of Hankel determinants of Catalan numbers and middle binomial coefficients

名古屋大学多元数理科学研究科
岡田 聡一 (Soichi OKADA)

1 はじめに

数列 $\{a_m\}_{m\geq 0}$ と非負整数 k, n に対して,

$$H_n^{(k)}(\{a_m\}) = \det\left(a_{k+i+j}\right)_{i,j=0}^{n-1} = \det\begin{pmatrix} a_k & a_{k+1} & a_{k+2} & \cdots & a_{k+n-1} \\ a_{k+1} & a_{k+2} & a_{k+3} & \cdots & a_{k+n} \\ a_{k+2} & a_{k+3} & a_{k+4} & \cdots & a_{k+n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+n-1} & a_{k+n} & a_{k+n+1} & \cdots & a_{k+2n-2} \end{pmatrix}$$

とおく.(0 次の行列式は 1 であると約束する. つまり, $H_0^{(k)}(\{a_m\}) = 1$ である.) この形の行列式が **Hankel 行列式**と呼ばれるものである. ここでは, 元の数列が Catalan 数や 2 項係数で与えられる場合の Hankel 行列式の多変数化を考える.

非負整数 m に対して,

$$c_m = \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}, \quad b_m = \binom{2m+1}{m}, \quad d_m = \binom{2m}{m}$$

とおく. c_m は Catalan 数と呼ばれ, さまざまな形の組合せ論的な意味づけが可能である. (Stanley [8] によると, 2009 年 4 月 3 日現在 169 通りの解釈が知られている.) これらの数列 $\{c_m\}_{m\geq 0}$, $\{b_m\}_{m\geq 0}$, $\{d_m\}_{m\geq 0}$ からできる Hankel 行列式は, 次のように簡単な積の形に表すことができる. (例えば, [9] を見よ.)

命題 1.1. 非負整数 k, n に対して,

$$H_n^{(k)}(\{c_m\}) = \begin{cases} 1 & (k=0 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\prod_{1\leq i\leq j\leq k-1} \frac{i+j+2n}{i+j} & (k\geq 1 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{1}$$

$$H_n^{(k)}(\{b_m\}) = \prod_{1\leq i\leq j\leq k} \frac{i+j-1+2n}{i+j-1}, \tag{2}$$

$$H_n^{(k)}(\{d_m\}) = 2^n \prod_{0\leq i<j\leq k-1} \frac{i+j+2n}{i+j}. \tag{3}$$

Desainte-Catherine–Viennot [2] は，半標準盤の数え上げ問題に関連して (1) の Hankel 行列式を考察している．分割 λ が与えられたとき，λ の Young 図形に k 以下の正整数を次の条件 (a), (b) をみたすように書き込んだもの（**λ を枠とする半標準盤**という）全体のなす集合を，$\mathrm{SSTab}(\lambda,[k])$ と表すことにする．

(a) 各行は左から右に単調非減少である．

(b) 各列は上から下に単調増加である．

例えば，

$$T = \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & \\ 4 & & & \end{matrix}$$

は，$\lambda = (4,3,1)$ を枠とする半標準盤である．Desainte-Catherine–Viennot は，偶分割（成分がすべて偶数である分割）を枠とする半標準盤の個数について，

$$\sum_{\lambda \subset \square(k,2n):\text{偶分割}} \#\,\mathrm{SSTab}(\lambda,[k]) = H_n^{(k+1)}(\{c_m\})$$

（ここで，和は Young 図形が $k \times 2n$ の長方形 $\square(k,2n) = ((2n)^k)$ に含まれるような偶分割 λ 全体にわたる）となることを示し，Viennot [10] の結果を用いて，

$$\sum_{\lambda \subset ((2n)^k):\text{偶分割}} \#\,\mathrm{SSTab}(\lambda,[k]) = \prod_{1 \le i \le j \le k} \frac{i+j+2n}{i+j} \tag{4}$$

と積で与えられることを導いている．

一方，(4) は，古典群の指標の関係式を用いて示すこともできる．半標準盤 T に対して，T に現れる数字 i の個数を m_i とし，$x^T = \prod_{i=1}^k x_i^{m_i}$ とおく．このとき，$\mathrm{SSTab}(\lambda,[k])$ の母関数は

$$\sum_{T \in \mathrm{SSTab}(\lambda,[k])} x^T = s_\lambda(x_1,\cdots,x_k)$$

と，分割 λ に対応する Schur 関数で与えられる．さらに，(4) の和に対応する Schur 関数の和は，

$$\sum_{\lambda \subset ((2n)^k):\text{偶分割}} s_\lambda(x_1,\cdots,x_k) = (x_1\cdots x_k)^n \cdot \mathbf{Sp}_{2k}(\square(n,k);x_1,\cdots,x_k) \tag{5}$$

と，長方形の Young 図形に対応する斜交群 $\mathbf{Sp}_{2k}(\mathbb{C})$ の既約指標 $\mathbf{Sp}_{2k}(\square(2n,k);x_1,\cdots,x_k)$（定義は §2 を参照）を用いて表される．(例えば [6] を見よ.) 従って，(5) において $x_1 = \cdots = x_k = 1$ とおき，Weyl の次元公式を用いることにより，(4) が導かれる．

この報告の目的は，このような観点から，命題 1.1 に与えた Hankel 行列式について古典群の指標を用いた多変数版を与えることである．以下，§2 で主定理（命題 1.1 の多変数版）とその帰結を述べ，§3 でその証明のアイデアについて解説する．最後に §4 では類似の Hankel 行列式に触れる．

2 主定理

主定理を述べるために，まず古典群の既約指標についてまとめておく．

非負整数の広義単調減少列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ $(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0)$ で 0 でない成分が有限個しかないものを，**分割**といい，その 0 でない項の個数を λ の**長さ**という．また，正の半整数 ($\mathbb{N} + 1/2$ の元) の広義単調減少列 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ を長さ n の**半整数分割**と呼ぶことにする．

以下，m を正整数とし，$\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_m)$ を変数とする．長さ m 以下の分割 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ に対して，

$$\mathbf{Sp}_{2m}(\lambda; t_1, \cdots, t_m) = \frac{\det\left(t_i^{\lambda_j+m-j+1} - t_i^{-\lambda_j-m+j-1}\right)_{i,j=1}^{m}}{\det\left(t_i^{m-j+1} - t_i^{-m+j-1}\right)_{i,j=1}^{m}}$$

とおく．また，長さ m 以下の分割，あるいは長さ m の半整数分割 λ に対して，

$$\mathbf{O}_{2m+1}(\lambda; t_1, \cdots, t_m) = \frac{\det\left(t_i^{\lambda_j+m-j+1/2} - t_i^{-\lambda_j-m+j-1/2}\right)_{i,j=1}^{m}}{\det\left(t_i^{m-j+1/2} - t_i^{-m+j-1/2}\right)_{i,j=1}^{m}},$$

$$\mathbf{O}_{2m}(\lambda; t_1, \cdots, t_m) = \begin{cases} \dfrac{\det\left(t_i^{\lambda_j+m-j} + t_i^{-\lambda_j-m+j}\right)_{i,j=1}^{m}}{\frac{1}{2}\det\left(t_i^{m-j} + t_i^{-m+j}\right)_{i,j=1}^{m}} & (\lambda_m \neq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{\det\left(t_i^{\lambda_j+m-j} + t_i^{-\lambda_j-m+j}\right)_{i,j=1}^{m}}{\det\left(t_i^{m-j} + t_i^{-m+j}\right)_{i,j=1}^{m}} & (\lambda_m = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおく．このとき，$\mathbf{Sp}_{2m}(\lambda; t_1, \cdots, t_m)$ は，斜交群 $\mathbf{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$ の最高ウェイト λ をもつ既約表現（$\mathbf{Sp}_{2m}(\lambda)$ と表す）の指標（の対角行列での値）である．また，$\mathbf{O}_M(\lambda; t_1, \cdots, t_m)$ は，直交群 $\mathbf{O}_M(\mathbb{C})$ あるいはその 2 重被覆群 $\widetilde{\mathbf{O}}_M(\mathbb{C})$ の「最高ウェイト」λ をもつ既約表現（$\mathbf{O}_M(\lambda)$ と表す）の指標である．

λ が分割であるとき，半整数分割 $\lambda + \frac{1}{2}$ を

$$\lambda + \frac{1}{2} = \left(\lambda_1 + \frac{1}{2}, \cdots, \lambda_m + \frac{1}{2}\right)$$

とおいて定める．このとき，$\mathbf{O}_M(\lambda + \frac{1}{2}; t_1, \cdots, t_m)$ （$M = 2m$ または $2m+1$）は $\prod_{i=1}^m (t_i^{1/2} + t_i^{-1/2})$ で割り切れるので，

$$\mathbf{O}'_M(\lambda; t_1, \cdots, t_m) = \frac{1}{\prod_{i=1}^m (t_i^{1/2} + t_i^{-1/2})} \mathbf{O}_M(\lambda + \frac{1}{2}; t_1, \cdots, t_m)$$

とおくことにする．これは，$t_1, \cdots, t_m$ の Laurent 多項式となる．実は，次の関係式が成り立っている．

$$\mathbf{O}'_{2m+1}(\lambda; t_1, \cdots, t_m) = \mathbf{Sp}_{2m}(\lambda; t_1, \cdots, t_m),$$

$$\mathbf{O}'_{2m}(\lambda; t_1, \cdots, t_m) = (-1)^{|\lambda|}\mathbf{O}_{2m+1}(\lambda; -t_1, \cdots, -t_m).$$

また，

$$\square(a,b) = (b^a) = (\underbrace{b, b, \cdots, b}_{a\text{ 個}})$$

と書くことにする．このとき，命題 1.1 は次のように古典群の指標を用いて多変数化できる．

定理 2.1. $z_1, \cdots, z_k, x_1, \cdots, x_{n-1}, y_1, \cdots, y_{n-1}$ を変数とする．$\{G_k\}$ が系列 $\{\mathbf{O}_{2k+1}\}$, $\{\mathbf{O}'_{2k+1}\}$, $\{\mathbf{Sp}_{2k}\}$, $\{\mathbf{O}'_{2k}\}$ のいずれかであるとき，

$$\det\Big(G_{k+i+j}(\square(k+i+j,1); z_1, \cdots, z_k, x_1, \cdots, x_i, y_1, \cdots, y_j)\Big)_{i,j=0}^{n-1} = G_k(\square(k,n); z_1, \cdots, z_k). \quad (6)$$

また，偶数次直交群の系列 $\{\mathbf{O}_{2k}\}$ については，

$$\det\Big(\mathbf{O}_{2(k+i+j)}(\square(k+i+j,1); z_1, \cdots, z_k, x_1, \cdots, x_i, y_1, \cdots, y_j)\Big)_{i,j=0}^{n-1} = 2^{n-1}\mathbf{O}_{2k}(\square(k,n); z_1, \cdots, z_k). \quad (7)$$

注意. この定理において，行列式の成分には変数 $x_1, \cdots, y_1, \cdots$ が含まれているが，行列式を取るとこれらの変数には依存しなくなっていることが特徴的である．また，行列式の成分に現れている長方形の縦の長さが群の階数に等しいことが，このような関係式を成り立たせる鍵である．

定理 2.1 においてすべての変数に 1 を代入すると，命題 1.1 の等式が得られる．その意味で，定理 2.1 は命題 1.1 の多変数版であるとみなすことができる．実際，縦 1 列の Young 図形に対応する既約表現の次元は

$$\dim \mathbf{Sp}_{2k}(\square(k,1)) = c_{k+1} = \frac{1}{k+2}\binom{2k+2}{k+1},$$
$$\dim \mathbf{O}_{2k+1}(\square(k,1)) = b_k = \binom{2k+1}{k},$$
$$\dim \mathbf{O}_{2k}(\square(k,1)) = d_k = \binom{2k}{k},$$
$$\dim \mathbf{O}_{2k}(\square(k,\tfrac{3}{2})) = 2^k c_k = 2^k \cdot \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$$

で与えられ，Weyl の次元公式から，長方形の Young 図形に対応する既約表現の次元は

$$\dim \mathbf{Sp}_{2k}(\square(k,n)) = \prod_{1\le i\le j\le k} \frac{2n+i+j}{i+j},$$
$$\dim \mathbf{O}_{2k+1}(\square(k,n)) = \prod_{1\le i\le j\le k} \frac{2n+i+j-1}{i+j-1},$$

$$\dim \mathbf{O}_{2k}(\square(k,n)) = 2 \prod_{0\le i<j\le k-1} \frac{2n+i+j}{i+j},$$
$$\dim \mathbf{O}_{2k}(\square(k,n+\frac{1}{2})) = 2^k \prod_{1\le i\le j\le k-1} \frac{2n+i+j}{i+j}$$

で与えられる.

一般に, n 次正方行列 M が与えられたとき, M から第 i 行, 第 j 列を取り除いてできる $n-1$ 次正方行列を M_j^i, M から第 i 行, 第 k 行, 第 j 列, 第 l 列を取り除いてできる $n-2$ 次正方行列を $M_{j,l}^{i,k}$ と表す. このとき, 次の Desnanot–Jacobi の公式が成り立つことが知られている.

命題 2.2. n 次正方行列 M に対して,

$$\det M \cdot \det M_{1,n}^{1,n} = \det M_n^n \cdot \det M_1^1 - \det M_1^n \cdot \det M_n^1.$$

この Desnanot–Jacobi の公式を定理 2.1 の行列に適用すると, 次の系が導かれる.

系 2.3. $z_1,\cdots,z_k,x,y$ を変数とする. $\{G_k\}$ を系列 $\{\mathbf{O}_{2k+1}\}$, $\{\mathbf{Sp}_{2k}\}$, $\{\mathbf{O}_{2k}\}$ のいずれかとし, p を非負整数, あるいは正の半整数 (ただし, $\{G_k\}=\{\mathbf{Sp}_{2k}\}$ の場合は p は整数であるとする) とする. このとき,

$$\begin{aligned} &G_k(\square(k,p+2);z_1,\cdots,z_k)\cdot G_{k+2}(\square(k+2,p);z_1,\cdots,z_k,x,y)\\ &\quad = G_k(\square(k,p+1);z_1,\cdots,z_k)\cdot G_{k+2}(\square(k+2,p+1);z_1,\cdots,z_k,x,y)\\ &\quad - G_{k+1}(\square(k+1,p+1);z_1,\cdots,z_k,x)\cdot G_{k+1}(\square(k+1,p+1);z_1,\cdots,z_k,y). \end{aligned}$$

3 主定理の証明

定理 2.1 は, 行列の基本変形を用いて Jacobi–Trudi 型の行列式に帰着させることによって, 証明できる.

変数 $\boldsymbol{t}=(t_1,\cdots,t_m)$ に関する Laurent 多項式 $h_i^{G_m}(\boldsymbol{t})$, $e_i^{G_m}(\boldsymbol{t})$ を次の母関数で定義する.

$$\sum_{i=0}^{\infty} h_i^{G_m}(\boldsymbol{t})u^i = \begin{cases} \dfrac{1+u}{\prod_{j=1}^m(1-t_iu)(1-t_i^{-1}u)} & (G_m=\mathbf{O}_{2m+1}\text{ のとき})\\ \dfrac{1}{\prod_{j=1}^m(1-t_iu)(1-t_i^{-1}u)} & (G_m=\mathbf{O}'_{2m+1}\text{ のとき})\\ \dfrac{1}{\prod_{j=1}^m(1-t_iu)(1-t_i^{-1}u)} & (G_m=\mathbf{Sp}_{2m}\text{ のとき})\\ \dfrac{1-u^2}{\prod_{j=1}^m(1-t_iu)(1-t_i^{-1}u)} & (G_m=\mathbf{O}_{2m}\text{ のとき})\\ \dfrac{1-u}{\prod_{j=1}^m(1-t_iu)(1-t_i^{-1}u)} & (G_m=\mathbf{O}'_{2m}\text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} e_i^{G_m}(\boldsymbol{t})u^i = \begin{cases} (1+u)\prod_{j=1}^{m}(1-t_iu)(1-t_i^{-1}u) & (G_m = \mathbf{O}_{2m+1}\ \text{のとき}) \\ (1-u^2)\prod_{j=1}^{m}(1-t_iu)(1-t_i^{-1}u) & (G_m = \mathbf{O}'_{2m+1}\ \text{のとき}) \\ (1-u^2)\prod_{j=1}^{m}(1-t_iu)(1-t_i^{-1}u) & (G_m = \mathbf{Sp}_{2m}\ \text{のとき}) \\ \prod_{j=1}^{m}(1-t_iu)(1-t_i^{-1}u) & (G_m = \mathbf{O}_{2m}\ \text{のとき}) \\ (1-u)\prod_{j=1}^{m}(1-t_iu)(1-t_i^{-1}u) & (G_m = \mathbf{O}'_{2m}\ \text{のとき}) \end{cases}$$

このとき，$G_m = \mathbf{O}_{2m+1}$, $\mathbf{O}'_{2m+1}$, $\mathbf{Sp}_{2m}$, $\mathbf{O}_{2m}$, $\mathbf{O}'_{2m}$ に対して，

$$h_i^{G_m}(\boldsymbol{t}) = G_m(\square(1,i);\boldsymbol{t}) \quad (i \geq 0),$$
$$e_i^{G_m}(\boldsymbol{t}) = G_m(\square(i,1);\boldsymbol{t}) \quad (0 \leq i \leq m)$$

である．また，一般の λ に対応する既約指標は次のように Jacobi–Trudi 型の行列式で表される．(例えば，[7], [4] を見よ.)

命題 3.1. G_m を $\mathbf{O}_{2m+1}$, $\mathbf{O}'_{2m+1}$, $\mathbf{Sp}_{2m}$, $\mathbf{O}_{2m}$, $\mathbf{O}'_{2m}$ のいずれかとする．長さ m 以下の分割 λ に対して，

$$G_m(\lambda;\boldsymbol{t}) = \frac{1}{2}\det\left(e^{G_m}_{{}^t\lambda_i-i+j}(\boldsymbol{t}) + e^{G_m}_{{}^t\lambda_i-i-j}(\boldsymbol{t})\right).$$

ここで，${}^t\lambda$ は λ に共役な分割である．つまり，

$${}^t\lambda_i = \#\{j : \lambda_j \geq i\} \quad (i \geq 1).$$

証明の鍵となるのは，古典群の指標を成分とする n 次正方行列と n 項ベクトルの間の次の関係式（補題 3.2, 3.3）である．変数の列 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots)$ と正整数 i に対して，

$$\boldsymbol{x}[i] = (x_1, \cdots, x_i)$$

と表すことにする．

補題 3.2. $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots)$, $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots)$ を変数とする．$\{G_k\}$ が系列 $\{\mathbf{O}_{2k+1}\}$, $\{\mathbf{O}'_{2k+1}\}$, $\{\mathbf{Sp}_{2k}\}$, $\{\mathbf{O}'_{2k}\}$ のいずれかであるとき，

$$\left((-1)^{i-j}h_{i-j}^{G_{j+1}}(\boldsymbol{x}[j+1])\right)_{i,j=0}^{n-1} \cdot \left(e_{l+i}^{G_{l+i}}(\boldsymbol{w}[l],\boldsymbol{x}[i])\right)_{i=0}^{n-1} = \left(e_{l-i}^{G_l}(\boldsymbol{w}[l])\right)_{i=0}^{n-1}.$$

また，偶数次直交群の系列 $\{\mathbf{O}_{2k}\}$ については，

$$\left((-1)^{i-j}h_{i-j}^{G_{j+1}}(\boldsymbol{x}[j+1])\right)_{i,j=0}^{n-1} \cdot \left(e_{l+i}^{G_{l+i}}(\boldsymbol{w}[l],\boldsymbol{x}[i])\right)_{i=0}^{n-1} = \left(2^{\chi(i\neq 0)}e_{l-i}^{G_l}(\boldsymbol{w}[l])\right)_{i=0}^{n-1}.$$

ここで，命題 P に対して，

$$\chi(P) = \begin{cases} 1 & (P\ \text{が真であるとき}) \\ 0 & (P\ \text{が偽であるとき}) \end{cases}$$

である．

変数 $\boldsymbol{t}=(t_1,\cdots,t_m)$ の Laurent 多項式 $h_i^\circ(\boldsymbol{t})$ を

$$\sum_{i=0}^{\infty} h_i^\circ(\boldsymbol{t})u^i = \frac{1-u^2}{\prod_{j=1}^{m}(1-t_iu)(1-t_i^{-1}u)}$$

によって定義する.

補題 3.3. $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots)$, $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots)$ を変数とする. $\{G_k\}$ を系列 $\{\mathbf{O}_{2k+1}\}$, $\{\mathbf{O}'_{2k+1}\}$, $\{\mathbf{Sp}_{2k}\}$, $\{\mathbf{O}_{2k}\}$, $\{\mathbf{O}'_{2k}\}$ のいずれかとするとき,

$$\left(e_{r+j}^{G_{l+j}}(\boldsymbol{w}[l],\boldsymbol{y}[j])\right)_{j=0}^{n-1}\cdot\left((-1)^{j-i}h_{j-i}^\circ(\boldsymbol{y}[i+1])\right)_{i,j=0}^{n-1}$$
$$=\left(2^{-\chi(j=0)}(e_{r+j}^{G_l}(\boldsymbol{w}[l])+e_{r-j}^{G_l}(\boldsymbol{w}[l]))\right)_{j=0}^{n-1},$$

定理 2.1 の証明. (6) を示す. ((7) も同様である.) 補題 3.2 より,

$$\left((-1)^{i-j}h_{i-j}^{G_{j+1}}(\boldsymbol{x}[j+1])\right)_{i,j=0}^{n-1}\cdot\left(e_{k+i+j}^{G_{k+i+j}}(\boldsymbol{z}[k],\boldsymbol{x}[i],\boldsymbol{y}[j])\right)_{i,j=0}^{n-1}$$
$$=\left(e_{k-i+j}^{G_{k+j}}(\boldsymbol{z}[k],\boldsymbol{y}[j])\right)_{i,j=0}^{n-1}$$

また, 補題 3.3 より,

$$\left(e_{k-i+j}^{G_{k+j}}(\boldsymbol{z}[k],\boldsymbol{y}[j])\right)_{i,j=0}^{n-1}\cdot\left((-1)^{j-i}h_{j-i}^\circ(\boldsymbol{y}[j+1])\right)_{i,j=0}^{n-1}$$
$$=\left(2^{-\chi(j=0)}(e_{k-i+j}^{G_k}(\boldsymbol{z}[k])+e_{k-i-j}^{G_k}(\boldsymbol{z}[k]))\right)_{i,j=0}^{n-1}$$

ここで,

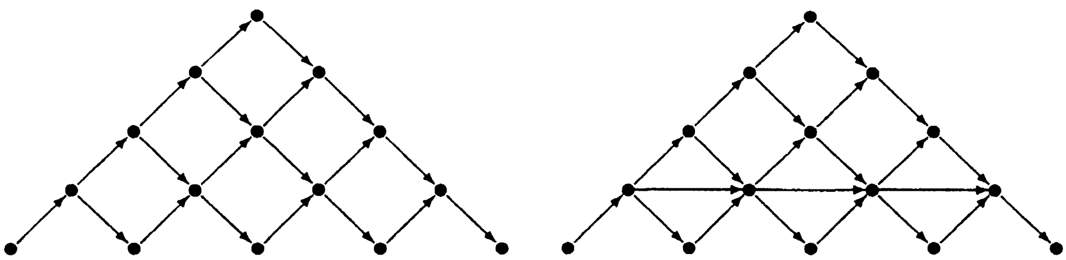
$$\left((-1)^{i-j}h_{i-j}^{G_{j+1}}(\boldsymbol{x}[j+1])\right)_{i,j=0}^{n-1},\quad \left((-1)^{j-i}h_{j-i}^\circ(\boldsymbol{y}[j+1])\right)_{i,j=0}^{n-1}$$

はともに対角成分がすべて 1 であるような下三角行列でありその行列式は 1 となるから,

$$\det\left(e_{k+i+j}^{G_{k+i+j}}(\boldsymbol{z}[k],\boldsymbol{x}[i],\boldsymbol{y}[j])\right)_{i=0}^{n-1}=\frac{1}{2}\left(e_{k-i+j}^{G_k}(\boldsymbol{z}[k])+e_{k-i-j}^{G_k}(\boldsymbol{z}[k])\right)_{i,j=0}^{n-1}$$

よって, Jacobi–Trudi 型の行列式 (命題 3.1) により, 証明が完成する. □

注意. 斜交群 $\mathbf{Sp}_{2k}$, 奇数次直交群 $\mathbf{O}_{2k+1}$ の場合は, 次の形のグラフ上の非交差経路 (non-intersecting lattice path) を考え Lindström–Gessel–Viennot の補題を用いることによっても証明できる.



4 類似の Hankel 行列式

上では直交群，斜交群の既約指標を考えたが，一般線型群の既約指標（Schur 関数）についても類似の等式が成り立つ．

定理 4.1. $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \cdots)$ を変数の列（無限でもよい）とする．このとき，

$$\det\Big(e_{k+i+j}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}[i-1], \boldsymbol{y}[j-1])\Big)_{i,j=0}^{n-1} = (-1)^{n(n-1)/2} s_{\square(k+n-1,n)}(\boldsymbol{z}),$$

ここで，e_l は l 次基本対称関数であり，s_λ は分割 λ に対応する Schur 関数である．

この定理の行列に Desnanot–Jacobi の公式（命題 2.2）を適用すると，

系 4.2. $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \cdots)$ を変数の列（無限でもよい）とするとき，

$$\begin{aligned} &- s_{\square(k+n+1,n+2)}(\boldsymbol{z}) \cdot s_{\square(k+n+1,n)}(\boldsymbol{z}, x, y) \\ &\qquad = s_{\square(k+n,n+1)}(\boldsymbol{z}) \cdot s_{\square(k+n+2,n+1)}(\boldsymbol{z}, x, y) \\ &\qquad\qquad - s_{\square(k+n+1,n+1)}(\boldsymbol{z}, x) \cdot s_{\square(k+n+1,n+1)}(\boldsymbol{z}, y). \end{aligned}$$

最後に，Catalan 数を成分とする Hankel 行列式 (1) の別方向の一般化にも触れておく．Catalan 数の母関数は

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = \frac{1-(1-4x)^{1/2}}{2x}$$

で与えられる．Gessel–Xin [3] は，

$$\sum_{m=0}^{\infty} g_m x^m = \frac{1-(1-9x)^{1/3}}{3x},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} g'_m x^m = \frac{1-(1-9x)^{2/3}}{3x}$$

によって定まる数列 $\{g_m\}$, $\{g'_m\}$ に対して，Hankel 行列式を与えている．

定理 4.3. (Gessel–Xin [3])

$$H_n^{(0)}(\{g_m\}) = 3^{n(n-1)/2} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!}, \tag{8}$$

$$H_n^{(0)}(\{g'_m\}) = 3^{n(n-1)/2} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+2)(3i)!}{(n+i)!}. \tag{9}$$

ここに現れる（3 のべきを除いた）積は，それぞれ

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!} = n \text{ 次交代符号行列の個数},$$

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+2)(3i)!}{(n+i)!} = \text{一辺の長さ } n \text{ の立方体に含まれる巡回対称な平面分割の個数}$$

$$= \frac{2n \text{ 次の } 180^\circ \text{ 回転で不変な交代符号行列の個数}}{n \text{ 次の交代符号行列の個数}}$$

と，組合せ論において興味深い量である．(交代符号行列 (alternating sign matrix) や平面分割 (plane partition) の数え上げ問題については，Bressoud の本 [1] に読みやすく書かれている．)

Catalan 数の Hankel 行列式 (1) と Gessel–Xin の Hankel 行列式 (8), (9) は，次のように統一的に考えることができる．分割 λ に対して，u の多項式 $D_\lambda(u)$ を

$$D_\lambda(u) = \prod_{x \in \lambda} \frac{u + c(x)}{h(x)}$$

(ここで，$x = (i, j)$ は λ の Young 図形の箱全体をわたり，$c(x) = j - i$ は x におけ容量，$h(x) = \lambda_i + {}^t\lambda_j - i - j + 1$ は x における鉤の長さである) とおいて定める．このとき，正の整数 n と長さ n 以下の分割 λ に対して，$D_\lambda(n)$ は一般線型群 $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ の λ に対応する既約表現の次元を与える．また，Catalan 数 c_m や Gessel–Xin の数列 g_m，g'_m は

$$\begin{aligned} c_m &= (-1)^m 2^{2m+1} \cdot D_{\square(m+1,1)}\left(\frac{1}{2}\right), \\ g_m &= (-1)^m 3^{2m+1} \cdot D_{\square(m+1,1)}\left(\frac{1}{3}\right), \\ g'_m &= (-1)^m 3^{2m+1} \cdot D_{\square(m+1,1)}\left(\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

と縦 1 列の Young 図形 $\square(m+1, 1)$ に対応する $D_{\square(m+1,1)}(u)$ の特殊値で表される．

多項式 $D_\lambda(u)$ は Schur 関数 s_λ の特殊化として得られる (Macdonald [5, I.3, Ex. 4] を見よ) ので，Schur 関数に対する Jacobi–Trudi の行列式から，数列 $\{D_{\square(m,1)}(u)\}_{m \geq 0}$ の Hankel 行列式が次のように与えられる．

命題 4.4. 非負整数 k, n に対して，

$$H_n^{(k)}\left(\{D_{\square(m,1)}(u)\}\right) = (-1)^{n(n-1)/2} D_{\square(k+n-1,n)}(u).$$

この命題において，$u = \frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$ とすることによって，(1), (8), (9) が得られる．

参考文献

[1] D. M. Bressoud, Proofs and Confirmations : The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture, Cambridge Univ. Press, 1999.

[2] M. Desainte-Catherine and X. G. Viennot, Enumeration of certain Young tableaux with bounded height, in "Combinatoire Énumérative" (eds. G. Labelle and P. Leroux), Lecture Notes in Mathematics **1234**, Springer-Verlag, 1986, pp.58–67.

[3] I. M. Gessel and G. Xin, The generating function of ternary trees and continued fractions, Electron. J. Combin. **13** (1) (2006), #R53.

[4] K. Koike, Representations of spinor groups and the difference characters of $SO(2n)$, Adv. Math. **128**, 40–81.

[5] I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials (2nd ed.), Oxford Univ. Press, 1995.

[6] S. Okada, Applications of minor-summation formulas to rectangular-shaped representations of classical groups, J. Algebra **205** (1998), 337–367.

[7] 岡田 聡一，古典群の表現論と組合せ論（上・下），培風館，2006.

[8] R. P. Stanley, Catalan addendum, `http://math.mit.edu/~rstan/ec/`

[9] U. Tamm, Some aspects of Hankel matrices in coding theory and combinatorics, Electronic J. Combin. **8** (2001), # A1.

[10] X. G. Viennot, A combinatorial interpretation of the quotient-difference algorithm, in "Formal Power Series and Algebraic Combinatorics" (eds. D. Krob, A. A. Mikhalev, and A. V. Mikhalev), Springer-Verlag, 2000, pp.379–390.