数理解析研究所講究録
第 1656 巻 2009 年 74-83

Even lattices obtained from doubly even codes and VOAs obtained from even lattices

島倉 裕樹 (Hiroki SHIMAKURA)

愛知教育大学 数学教育講座
Department of Mathematics,
Aichi University of Education
e-mail: shima@auecc.aichi-edu.ac.jp

序

重偶符号から偶格子の構成法, 偶格子から頂点作用素代数の構成法がいくつか知られている. 本稿ではそれらの間の同型問題について述べる.

1 符号, 格子と頂点作用素代数

本章では符号, 格子, 頂点作用素代数に関する定義を述べる. 符号や格子については [CS99] を, 頂点作用素代数については [FLM88, FHL93] を参照せよ.

1.1 (二元線形) 符号

$\mathbb{F}_2$ 上の n 次元ベクトル空間 $\mathbb{F}_2^n$ の基底を一つ固定し, それによる座標表示を考える. $\mathbb{F}_2^n$ 上には $x=(x_i)$, $y=(y_i)\in\mathbb{F}_2^n$ に対して, $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i \mod 2$ で定義される内積がある. $x=(x_i)\in\mathbb{F}_2^n$ の**重さ (weight)** とは $\mathrm{wt}(x)=|\{i\mid x_i\neq 0\}|$ である. $\mathbb{F}_2^n$ の部分空間を**長さ (length)** n の (二元線形) **符号 (code)** という.[1] 符号 $\mathcal{C}$ の **双対符号 (dual code)** $\mathcal{C}^\perp$ とは直交補空間 $\mathcal{C}^\perp=\{x\in\mathbb{F}_2^n\mid\langle x,y\rangle=0,\ \forall y\in\mathcal{C}\}$ のことをいう. $\mathcal{C}$ が**重偶 (doubly even)** であるとは $\mathcal{C}$ の全ての元 x が $\mathrm{wt}(x)\in 4\mathbb{Z}$ を満たすことをいい, **自己双対 (self-dual)** とは $\mathcal{C}=\mathcal{C}^\perp$ を満たすことをいう. 長さ n の符号 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ が**同型 (同値)** であるとは, $g(\mathcal{C})=\mathcal{D}$ となる n 次対称群の元 g が存在することである.

しばしば, $\Omega_n=\{1,2,\dots,n\}$ の冪集合 $\mathcal{P}(\Omega_n)$ と $\mathbb{F}_2^n$ を同一視する.

[1] 本稿では二元線形符号しか扱わないので, 単に符号ということにする.

1.2 格子

$\mathbb{R}$ 上の n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を考え, $(,)$ で (正定値な) 内積を表す. $v \in \mathbb{R}^n$ に対して, (v,v) を v の**ノルム (norm)** と言う. $L \subset \mathbb{R}^n$ が**階数 (rank)** n の**格子 (lattice)** であるとは, ある $\mathbb{R}^n$ の基底 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ があって $L = \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}e_i$ と書けることである. 格子 L の**双対格子 (dual lattice)** L^* とは $L^* = \{w \in \mathbb{R}^n \mid (v,w) \in \mathbb{Z}\ \forall v \in L\}$ である. 格子 L が**偶 (even)** とは L の全ての元のノルムが偶数であることをいい, **ユニモジュラ (unimodular)** とは $L = L^*$ を満たすことをいう. 階数 n の格子 L, N が**同型**であるとは, $g(L) = N$ となるような $g \in O(\mathbb{R}^n, (,))$ が存在することである.

1.3 頂点作用素代数

定義 1.1. [Bo86, FLM88] **頂点作用素代数 (vertex operator algebra)**[2] とは $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-次数付き $\mathbb{C}$ 上の線形空間 $V = \oplus_{i=0}^{\infty} V_i$, 線形写像

$$\begin{aligned} Y:\ V &\rightarrow (\mathrm{End}V)[[z, z^{-1}]], \\ v &\mapsto Y(v,z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} v_i z^{-i-1}, \end{aligned}$$

真空元 (vacuum vector) と呼ばれる $\mathbf{1}_V \in V_0$ と **ヴィラソロ元 (Virasoro element)** と呼ばれる $\omega_V \in V_2$ の四つ組 $(V, Y, \mathbf{1}_V, \omega_V)$ で次の公理を満たすものである.

(1) $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\dim V_p < \infty$.

(2) $a, b \in V$ に対して, ある $p_0 \in \mathbb{Z}$ が存在して $a_p b = 0$ $(p > p_0)$ を満たす.

(3) $v \in V$ に対して $Y(v,z)\mathbf{1}_V \in v + Vz[[z]]$.

(4) **(Borcherds identity)** 全ての $a, b, v \in V$, $p, q, r \in \mathbb{Z}$ に対して次が成り立つ.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{p}{i} (a_{r+i}b)_{p+q-i} v = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{r}{i} \Big(a_{p+r-i}(b_{q+i}v) - (-1)^r b_{q+r-i}(a_{p+i}v) \Big).$$

(5) $L(p) = (\omega_V)_{p+1}$ と置くと, 次を満たす**中心電荷 (central charge)** $n \in \mathbb{C}$ が存在する.

$$[L(p), L(q)] = (p-q)L(p+q) + \frac{p^3 - p}{12} \delta_{p+q,0} n.$$

(6) $v \in V_p$ に対して $L(0)v = pv$.

(7) $v \in V$ に対して

$$\frac{d}{dz} Y(v,z) = Y(L(-1)v, z).$$

[2] 略して VOA と書く.

二つの VOA V, V' が**同型** であるとは次を満たす線形同型写像 $g : V \to V'$ が存在することである.

- $gY(v,z) = Y(gv,z)g$ が任意の $v \in V$ に対して成立.
- $g\omega_V = \omega_{V'}$ と $g\mathbf{1}_V = \mathbf{1}_{V'}$ が成立.

2 重偶符号から得られる格子の同型問題

本章では重偶符号から得られる格子を紹介し, それらの間の同型問題を考える.

2.1 重偶符号から得られる偶格子

本節では, 符号から格子を構成する方法を紹介する. 詳しい内容は [CS99] を参照せよ. 長さ n の重偶符号 $\mathcal{C}$ から得られる次の三つの偶格子を考える.[3]

$$
\begin{aligned}
A_2(\mathcal{C}) &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\{(v_i) \in \mathbb{Z}^n \mid (v_i \mod 2) \in \mathcal{C}\} \subset \mathbb{R}^n,\\
B_2(\mathcal{C}) &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\{(v_i) \in \mathbb{Z}^n \mid (v_i \mod 2) \in \mathcal{C},\ \sum_{i=1}^n v_i \in 4\mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^n,\\
L_2(\mathcal{C}) &:= \begin{cases} B_2(\mathcal{C}) + \mathbb{Z}\frac{1}{2\sqrt{2}}(1,1,\ldots,1) & n \in 16\mathbb{Z},\\ B_2(\mathcal{C}) + \mathbb{Z}\frac{1}{2\sqrt{2}}(-3,1,1,\ldots,1) & n \in 16\mathbb{Z}+8. \end{cases}
\end{aligned}
$$

ただし, $L_2(\mathcal{C})$ は $n \in 8\mathbb{Z}$ の場合のみ考える. $\mathcal{C}$ から $A_2(\mathcal{C}), B_2(\mathcal{C})$ を作る方法はそれぞれ**構成法 A**, **構成法 B** と呼ばれる.[4]

注意 2.1. 長さ 24 のゴレイ符号 G_{24} に対して, $L_2(G_{24})$ はリーチ格子となる.

注意 2.2. $n \in 16\mathbb{Z}$ のとき $v = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1^n) \in B_2(\mathcal{C})^*$, $n \in 16\mathbb{Z}+8$ のとき $v = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-3, 1^{n-1}) \in B_2(\mathcal{C})^*$ と置く.

(1) $B_2(\mathcal{C})^* = A_2(\mathcal{C}^\perp) + \mathbb{Z}v$

(2) $\mathcal{C}$ が自己双対ならば, $A_2(\mathcal{C})$ と異なる $B_2(\mathcal{C})$ の拡大として得られる偶格子は一意的で $L_2(\mathcal{C})$ である.

(3) $\mathcal{C}$ が自己双対でないならば, $A_2(\mathcal{C}^\perp)$ の部分格子とならないような指数 2 の $B_2(\mathcal{C})$ の拡大として得られる偶格子は(一意的ではないが) $L_2(\mathcal{C})$ と同型になる. すなわち, 偶数ノルムの元 $w \in B_2(\mathcal{C})^* \setminus A_2(\mathcal{C}^\perp)$ に対して $L_2(\mathcal{C}) \cong B_2(\mathcal{C}) + \mathbb{Z}w$ である.

[3] しばしば重偶符号でない符号に対して, これらの格子を考えることがある.

[4] $L_2(\mathcal{C})$ には特に名前がない. 構成法 C は [CS99] において別の構成法を意味する.

2.2 $A_2(\mathcal{C})$ と $B_2(\mathcal{C})$ の同型問題について

前節で定義した偶格子 $A_2(\mathcal{C})$ と $B_2(\mathcal{C})$ に対して, 次のような同型問題を考える.

問題 2.3. $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ を重偶符号とする.

(L1) $A_2(\mathcal{C}) \cong A_2(\mathcal{D})$ となるのはどんなときか?

(L2) $B_2(\mathcal{C}) \cong B_2(\mathcal{D})$ となるのはどんなときか?

(L3) $B_2(\mathcal{C}) \cong A_2(\mathcal{D})$ となるのはどんなときか?

この問題は [KKM91] で研究されており, 特に (L1) は完全に解決されている.

命題 2.4. [KKM91] $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ を重偶符号とする. $A_2(\mathcal{C}) \cong A_2(\mathcal{D})$ となるための必要十分条件は $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$ である.

また, (L2) に関して, $n > 16$ の場合に次の解答が得られている.

命題 2.5. [KKM91] $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ を長さが 16 より大きい重偶符号とする. このとき, $B_2(\mathcal{C}) \cong B_2(\mathcal{D})$ となるための必要十分条件は $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$ である.

非同型な長さ 16 の重偶自己双対符号が二つであることが知られており, それらを $H_8 \oplus H_8$, d_{16}^+ と書くことにする. このとき, 次が成り立つ.

補題 2.6. [KKM91] $B_2(H_8 \oplus H_8) \cong B_2(d_{16}^+)$

長さ 16 以下の重偶符号の分類 ([PLF97, CS99]) から次のことが確かめられる.[5]

命題 2.7. $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ を長さ 16 以下の重偶符号とする. このとき, $B_2(\mathcal{C}) \cong B_2(\mathcal{D})$ ならば $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$ または $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の両方が長さ 16 の重偶自己双対符号である.

これら結果を合わせて次の系を得る.

系 2.8. $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ を重偶符号とする. このとき, $B_2(\mathcal{C}) \cong B_2(\mathcal{D})$ となるための必要十分条件は次のうちの一つが成り立つことである.

- $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$.
- $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の両方が長さ 16 の重偶自己双対符号である.

(L3) の解答を述べる前に言葉を導入する.

長さ n の符号 $\mathcal{E}$ を $\mathcal{P}(\Omega_n)$ の部分集合とみる. $n = 4l$, $l \in \mathbb{Z}$ と仮定する.[6] このとき, $\{T_i \mid 1 \le i \le l\} \subset \mathcal{P}(\Omega_n)$ が $\mathcal{E}$ の **tetrad-分解** であるとは次を満たすことである.[7]

[5] 分類を用いずにも確かめられる.

[6] 今後, tetrad-分解を考えるときは常に $n \in 4\mathbb{Z}$ を仮定する.

[7] $n = 4l$ から $\sum_{i=1}^{l} T_i = \Omega_n$ となることが分解という言葉を使っている理由である.

- $|T_i \cap T_j| = 4\delta_{ij}$.
- $T_i + T_j \in \mathcal{E}$.

さらに, tetrad-分解 $\{T_i \mid 1 \le i \le l\}$ が次を満たす時 **B** 型であるという.

- $T_i \notin \mathcal{E}$ かつ $T_i \in \mathcal{E}^{\perp}$.

(L3) の解答は次の通りである.

命題 2.9. [Sh] $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ を長さ n の重偶符号とする. このとき $B_2(\mathcal{C}) \cong A_2(\mathcal{D})$ となるための必要十分条件は $\mathcal{C} \cong \mathbb{F}_2\langle T_1, \mathcal{D}\rangle$ を満たす B 型の $\mathcal{D}$ の *tetrad*-分解 $\{T_i\}$ が存在することである.

この証明の鍵は次の命題である.

命題 2.10. [Sh] $\mathcal{C}$ を長さ n の重偶符号とする. このとき, $\mathcal{C}$ の B型の *tetrad*-分解 $\{T_i\}$ が存在するための必要十分条件は $|\{c \in d+\mathcal{C} \mid \mathrm{wt}(c) = 4)\}| = n/4 + |\{c \in \mathcal{C} \mid \mathrm{wt}(c) = 4\}|$ が成り立つ $d + \mathcal{C} \in \mathcal{C}^{\perp}/\mathcal{C}$ が存在することである.

2.3 $L_2(\mathcal{C})$ に関する同型問題について

前節と同様に $L_2(\mathcal{C})$ に関する次のような同型問題を考えることが出来る.

問題 2.11. $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ を重偶符号とする.

(1) $L_2(\mathcal{C}) \cong L_2(\mathcal{D})$ となるのはどんなときか?

(2) $L_2(\mathcal{C}) \cong A_2(\mathcal{D})$ となるのはどんなときか?

(3) $L_2(\mathcal{C}) \cong B_2(\mathcal{D})$ となるのはどんなときか?

(1) に対して, 次の結果 [KKM91] が知られている.[8]

命題 2.12. $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ を長さが 32 より大きい重偶符号とする. このとき $L_2(\mathcal{C}) \cong L_2(\mathcal{D})$ となるための必要十分条件は $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$ である.

また, $n = 24$ または $n = 32$ の場合には非同型な長さ n の自己双対重偶符号 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ で $L_2(\mathcal{C}) \cong L_2(\mathcal{D})$ を満たす例が [KKM91] で与えられている. (1) は次の問題が解ければ解決される.

問題 2.13. 長さが 32 以下の非同型な重偶符号の組 $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ で $L_2(\mathcal{C}) \cong L_2(\mathcal{D})$ を満たすものを分類せよ.

---

[8] 筆者は (2), (3) に関する研究は知らない.

3 格子から得られる頂点作用素代数の同型問題

本章では格子から得られる VOA について紹介し, それらの同型問題を考える.

3.1 格子から得られる頂点作用素代数

本節では格子から得られる VOA を紹介する. 詳細については [FLM88] を参照せよ.

L を階数 n の偶格子とする. 線形空間 $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ を可換リー代数と見て, 付随するアフィンリー環 $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ を考える. そして $\hat{\mathfrak{h}}$ の部分環 $\hat{\mathfrak{h}}^- = \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ の対称代数を $S(\hat{\mathfrak{h}}^-)$ とする. また $\mathbb{C}[L]$ で L の群環を表すとする.

命題 3.1. [Bo86, FLM88] $V_L = S(\hat{\mathfrak{h}}^-) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[L]$ は *VOA* 構造を持つ.

この VOA V_L は偶格子 L に付随する**格子頂点作用素代数 (lattice VOA)** と呼ばれる.

V_L の部分 VOA を考えよう. $-1 \in \mathrm{Aut}(L)$ の持ち上げ $\theta \in \mathrm{Aut}(V_L)$ を取る[9]. すると, その固定部分空間 $V_L^+ = \{v \in V_L^+ \mid \theta(v) = v\}$ は部分 VOA となる.[10] このような位数 2 の自己同型群の固定点として得られた部分 VOA は **$\mathbb{Z}_2$-軌道体模型 ($\mathbb{Z}_2$-orbifold model)** と呼ばれる.

ここで $n \in 8\mathbb{Z}$ を仮定する. そして, 整数の重さを持つ twisted 型の V_L^+-既約加群 $V_L^{T,+}$ を考える.[11] ここで, $\sqrt{2}L^*$ が偶格子の時には [ADL05] より $V_L^{T,+}$ は自己双対な単純カレントとなることに注意する.

命題 3.2. [FLM88, Hu96, LY08] L を偶格子で $\sqrt{2}L^*$ が偶であるとする. さらに V_L^+ が有理的かつ $V_L^{T,+}$ 上の不変内積が対称的と仮定する. このとき $\tilde{V}_L = V_L^+ \oplus V_L^{T,+}$ は V_L^+ の単純カレント拡大として *VOA* 構造を持つ.

このような VOA の構成法は **$\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法 ($\mathbb{Z}_2$-orbifold construction)** と呼ばれる.[12]

注意 3.3. リーチ格子 Λ に対して, $\tilde{V}_\Lambda$ はムーンシャイン VOA となる.

注意 3.4. (1) L がユニモジュラならば T の取り方が一意的であり, $V_L^{T,+}$ が一意的に決まる.

(2) L がユニモジュラでない場合は T の取り方は一意ではない. しかし $\sqrt{2}L^*$ が偶格子の仮定の下では T の取り方によらず $\tilde{V}_L$ の V_L^+ の単純カレント拡大としての VOA 構造は持つとすれば同型を除いて一意的である.

---

[9] $1 \to \mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H \to \mathrm{Aut}(L) \to 1$ という完全列を持つ $\mathrm{Aut}(V_L)$ の部分群 H がある. そして $-1 \in \mathrm{Aut}(L)$ の逆像の中から θ を選ぶのである.

[10] θ の取り方は一意ではないが, V_L^+ は同型を除いて一意である ([DGH98]).

[11] twisted 型とは, 既約 θ-twisted V_L-加群から得られる既約 V_L^+-加群のことである. L がユニモジュラであることから, twisted 型の既約 V_L^+-加群の同型類は二つあり, 一つが整数の重さを持ち, もう一つは半整数の重さをもつ.

[12] $\sqrt{2}L^*$ が偶である偶格子 L に対して, 常に命題の仮定を満たすかどうかは確かめられていないように思われる.

3.2 V_L と V_L^+ の同型問題

前節で定義した VOA V_L と V_L^+ に対して, 次のような同型問題を考える.

問題 3.5. L, N を階数 n の偶格子とする.

(V1) $V_L \cong V_N$ となるのはどんなときか?

(V2) $V_L^+ \cong V_N^+$ となるのはどんなときか?

(V3) $V_L^+ \cong V_N$ となるのはどんなときか?

(V1) の解答はよく知られている.[13]

命題 3.6. L, N を階数 n の偶格子とする. このとき, $V_L \cong V_N$ となるための必要十分条件は $L \cong N$ である.

この証明で鍵となる事実は次の通りである.

事実 3.7. リー代数 $(V_L)_1$ のカルタン部分代数は $N(V_L) = \{\exp(v_0) \mid v \in (V_L)_1\}$ の作用で共役である.

さて, (V2) を考えよう. もちろん $L \cong N$ ならば $V_L^+ \cong V_N^+$ である. また, 階数 16 のユニモジュラ偶格子 $E_8 \oplus E_8$ と D_{16}^+ に対して次が成り立つ.

命題 3.8. [Sh06, Sh07] $V_{E_8 \oplus E_8}^+ \cong V_{D_{16}^+}^+$.

ここで, 階数 16 のユニモジュラ偶格子は同型を除いて $E_8 \oplus E_8$ と D_{16}^+ だけであることを注意しておく ([CS99]). [Sh] において, これらだけが例外的な偶格子の組であることを証明し, (V2) の解答を得た.

定理 3.9. [Sh] L, N を偶格子とする. $V_L^+ \cong V_N^+$ であるための必要十分条件は次のうちの一つを満たすことである.

- $L \cong N$.
- L, N の両方が階数 16 のユニモジュラ偶格子である.

証明の方針は次の通りである. ($\Rightarrow$) を示せばよい. V_N^- を V_L^+-加群としてみた時にどの加群と同型になるかを考えると次の 3 通りある.

Case 1: $V_N^- \cong V_L^-$. [DM04] の単純カレント拡大の一意性から $V_L \cong V_N$ がわかる. (V1) から $L \cong N$ である.

Case 2: $V_N^- \cong V_{\lambda+L}^\varepsilon$. 指標の比較をすることで [Sh04, Sh06] の結果を適用できることがわかり, $g \circ V_L^- \cong V_{\lambda+L}^\varepsilon$ となる $g \in \mathrm{Aut}(V_L^+)$ が存在することがわかる. まず $g \circ V_L \cong V_L^+ \oplus V_N^- \cong V_N$ という V_L^+-加群としての同型から, [DM04] の結果を用いて VOA とし

[13]論文や本には特に書かれていないが, 証明は簡単なためよく知られている事実だと思われる.

て $g \circ V_L \cong V_N$ がわかる．また $g \circ V_L \cong V_L$ という VOA としての同型がある．ゆえに $V_L \cong V_N$ がわかり (V1) から $L \cong N$ となる．

Case 3: $V_N^- \cong V_L^{T_\chi,\epsilon}$. まず, 指標を比べて L の階数は 8 または 16 であることがわかる．さらに, twist 型の既約加群が自己双対であることから, $\sqrt{2}L^*$ が偶であることがわかる．このような条件の下で格子の特徴付けを行って, L が $\sqrt{2}E_8$ を含むか BW_{16} を含むことを示す．そして L が階数 16 のユニモジュラ偶格子で無い場合は [Sh06] の結果から Case 2 と同様な議論が行われることがわかり $L \cong N$ が示せる．

さらに [Sh] で (V3) の解答も得ている．

定理 3.10. [Sh] L, N を偶格子とする．$V_L^+ \cong V_N$ となるための必要十分条件は $L \cong B_2(\mathcal{C})$ かつ $N \cong A_2(\mathcal{C})$ となる重偶符号 $\mathcal{C}$ が存在することである．

この証明での鍵は次の定理である．

定理 3.11. [Sh06] L を階数 n の偶格子とする．$L \cong B_2(\mathcal{C})$ となるための必要十分条件は $|\{v \in \lambda + L \mid (v,v) = 2\}| = 2n + |\{w \in L \mid (w,w) = 2\}|$ を満たす $\lambda \in L^* \cap L/2$ が存在することである．

3.3 $\tilde{V}_L$ に関する同型問題

本節では $\tilde{V}_L$ に関する次の同型問題を提起しておく．[14]

問題 3.12. L, N を偶格子で $\tilde{V}_L$ と $\tilde{V}_N$ が *VOA* 構造を持つと仮定する．

- $\tilde{V}_L \cong \tilde{V}_N$ となるのはどんなときか？
- $\tilde{V}_L \cong V_N$ となるのはどんなときか？
- $\tilde{V}_L \cong V_N^+$ となるのはどんなときか？

4 まとめ

ここまでの結果をまとめる．

その前に構成法 A, B で得られた格子の枠による特徴付け [KKM91] を用いると, 偶格子 L, N に対して次の二つが同値であることを注意しておく．

- $L \cong A_2(\mathcal{E})$, $N \cong B_2(\mathcal{E})$ となる重偶符号 $\mathcal{E}$ が存在．
- $L \cong \mathbb{Z}\langle N, \alpha_1 \rangle$ を満たす N の B 型の枠 $\{\pm\alpha_i\}$ が存在．

このことを用いて, 表 1 を得る．そこから, 非常に類似の結果が得られたことが読み取れる．これは V_L と $A_2(\mathcal{C})$, V_L^+ と $B_2(\mathcal{C})$ が対応しあうことの一つの証拠である．

[14] どんな格子 L に対して $\tilde{V}_L$ に VOA 構造が入るかどうかの研究がまだ十分に行われていないと思われるため, 注意を要する．また, 物理学者が書いた $\tilde{V}_L$ の VOA 構造やこれら同型問題に関連する論文 ([DGM90] 等) があることを注意しておく．

表 1: 同型問題とその解答

	問題	解答
(L1)	$A_2(\mathcal{C}) \cong A_2(\mathcal{D})$	$\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$
(V1)	$V_L \cong V_N$	$L \cong N$
(L2)	$B_2(\mathcal{C}) \cong B_2(\mathcal{D})$	$\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$ または $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の両方が長さ 16 の重偶自己双対符号
(V2)	$V_L^+ \cong V_N^+$	$L \cong N$ または L, N の両方が階数 16 のユニモジュラ偶格子
(L3)	$B_2(\mathcal{C}) \cong A_2(\mathcal{D})$	$\mathcal{C} \cong \mathbb{F}_2\langle \mathcal{D}, T_1\rangle$ を満たす $\mathcal{D}$ の B 型の tetrad-分解 $\{T_i\}$ が存在
(V3)	$V_L^+ \cong V_N$	$L \cong \mathbb{Z}\langle N, \alpha_1\rangle$ を満たす N の B 型の枠 $\{\pm\alpha_i\}$ が存在

参考文献

[ADL05] T. Abe, C. Dong and H. Li, Fusion rules for the vertex operator algebras $M(1)^+$ and V_L^+, *Comm. Math. Phys.* **253** (2005), 171–219.

[Bo86] R.E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat'l. Acad. Sci. U.S.A,* **83** (1986), 3068–3071.

[CS99] J.H. Conway and N.J.A. Sloane, Sphere packings, lattices and groups, 3rd Edition, Springer, New York, 1999.

[DGM90] L. Dolan, P. Goddard and P. Montague, Conformal field theory, triality and the Monster group, *Phys. Lett. B* **236** (1990), 165–172.

[DM04] C. Dong and G. Mason, Rational vertex operator algebras and the effective central charge, *Int. Math. Res. Not.* (2004), 2989–3008.

[DGH98] C. Dong, R.L. Griess and G. Höhn, Framed vertex operator algebras, codes and the Moonshine module, *Comm. Math. Phys.* **193** (1998), 407–448.

[FHL93] I. Frenkel, Y. Huang, J. Lepowsky, On axiomatic approaches to vertex operator algebras and modules, Mem. Amer. Math. Soc. **104** 1993.

[FLM88] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex operator algebras and the Monster, Pure and Appl. Math., Vol.134, Academic Press, Boston, 1988.

[Hu96] Y. Huang, A nonmeromorphic extension of the moonshine module vertex operator algebra, *Contemp. Math.* **193** (1996), 123–148.

[KKM91] M. Kitazume, T. Kondo and I. Miyamoto, Even lattices and doubly even codes, *J. Math. Soc. Japan* **43** (1991), 67–87.

[LY08] C.H. Lam and H. Yamauchi, On the structure of framed vertex operator algebras and their pointwise frame stabilizers, *Comm. Math. Phys.* **277** (2008), 237–285.

[PLF97] V. Pless, J.S. Leon, and J. Fields, All Z_4 codes of type II and length 16 are known, *J. Combin. Theory Ser. A* **78** (1997), 32–50.

[Sh04] H. Shimakura, The automorphism group of the vertex operator algebra V_L^+ for an even lattice L without roots, *J. Algebra* **280** (2004), 29–57.

[Sh06] H. Shimakura, The automorphism groups of the vertex operator algebras V_L^+: general case, *Math. Z.* **252** (2006), 849–862.

[Sh07] H. Shimakura, Lifts of automorphisms of vertex operator algebras in simple current extensions, *Math. Z.* **256** (2007), 491–508.

[Sh] H. Shimakura, On isomorphism problems of even lattices obtained from doubly even codes and vertex operator algebras obtained from even lattices, preprint.