

New results on Broué's and Rouquier's conjectures¹

ブルエの予想およびルキエの予想 に関する新しい結果

越谷 重夫 (こしたに)

千葉大学 理学研究科

Shigeo Koshitani, Chiba University

e-mail koshitan@math.s.chiba-u.ac.jp

§1. 序.²

ここでの話題は有限群の表現論, 特にモジュラー表現論である. ここ 20 年くらい, この分野で重要と考えられている問題は次の 3 つの予想を解くことである, と言って差し支えないと思う.³ 少し荒っぽく言うと, その起源はやはり Richard Brauer (1901–1977) に遡る (さかのぼる). いずれにせよ, Brauer の思想 (哲学) を, この分野の大御所である次の 3 人が, 現代的な言い方⁴ で提言したものが, その予想である.

¹2009 年 1 月 9 日 (金) の講演の際には, 例によって話が横道に逸れ (つい調子に乗って, 1988 年 7 月に 3 週間にわたって開かれたイギリス・Manchester での研究集会に於ける Broué の講演と John Thompson (1970 年フィールズ賞受賞者) のコメント等の話を少し詳しく話し過ぎて, 時間が足りなくなってしまった), 2 つ目の話題について触れることが, 実質的に全くできなかった. ここではそれに対するお詫び及び補足も込めて, 少しきちんと書いてみたいと思う.

²普通このような文章ではいろいろな用語の説明, 例えばブロック (block), ブロック代数 (block algebra) の定義をしないといけないのだが, それは教科書 [6] に譲ることにして, 今回のこの記事では, 普通のテキスト, 論文にはあまり書かれていないことを, なるべく雰囲気伝わるような感じで述べる.

³もちろん, これに異議のある人が多く存在していることも重々承知しているが.

⁴「現代的」と言ったが, この言い方は, 若い方々には違和感があるかも知れない. これは「筆者の世代以上の人間にとって」と言う意味である. 「十年一昔」と言うが, その意味ではもう「ふた昔」以上前の話になってしまったのだから.

- (i) Alperin の重み予想 (Alperin's Weight Conjecture = AWC), 1986
- (ii) Dade の予想 (AWC を精密化したもの), 1990
- (iii) Broué の可換不足群 (アーベル不足群) 予想 (Broué's Abelian Defect Group Conjecture = ADGC), 1988

モジュラー表現なのだから, もちろん素数標数 $p > 0$ を持つ体 k 上での, 有限群 G の表現についての話しである (ここでは簡単のために k を代数的閉体と仮定しておく). この記号を使うとき, 有り体に言えば, 上記の予想は

「 G の k 上での表現 (つまり群代数 kG 上の加群) についての情報」は, かなりの部分が「 G の局所部分群, つまり $N_G(P)$ の k 上での表現 (つまり群代数 $kN_G(P)$ 上の加群) についての情報」から得られるのではないか?

というふう述べることができる. ここで P は自明ではない G の p -部分群である. $N_G(P)$ は言うまでもなく, P の G での正規化部分群. 少し雑に言うと, この P は例えば, Sylow p -部分群と思ってもよい. ポイントは, 代数 kG とその部分代数 $kN_G(P)$ の間が分離的 (separable), つまり環としての拡大 $kN_G(P) \subseteq kG$ が分離拡大になっている場合を考えること, である. 一般に環 A とその部分環 B があつたとき (それぞれ, 単位元の存在くらいは仮定するが一般にはもちろん非可換環を考える) 「分離拡大」とは以下の意味である.

A は B の分離拡大である \iff

自然な全射準同型写像 $A \otimes_B A \longrightarrow A$, $a_1 \otimes a_2 \mapsto a_1 a_2$ が

(A, A) -加群準同型として分裂的全準同型 (split-epi)

実は, 有限群 G とその部分群 H に対しては, 「 $kG \supseteq kH$ は分離拡大 $\iff p \nmid |G:H|$ 」がわかる. これはまさしく, かの有名は Maschke の定理 (1898) そのものである.

あとモジュラー表現で次に重要なことは, G の p -部分群 P の元たちの共役の様子である. つまり,

$P - \{1\} \ni u, v$ に対して, u と v が G で共役ならば, u と v は H で既に共役になっているか? ここで H は P を含む G の部分群である.

§2. Brauer の哲学 (思想).

有限群 G とその部分群 H を考える. A, B をそれぞれ群代数 (group algebra) kG と kH の block 代数 とする. そして,

(*) これらは共通の不足群 (defect group) P をもっていると仮定する.

実は, A の不足群 P は「 $A \otimes_{kP} A \rightarrow A, a_1 \otimes a_2 \mapsto a_1 a_2$ が (A, A) -加群の全準同型として分裂的 (split-epi) になるような G の部分群 P のうちで最小のもの」と定義できる.⁵

もちろん B についても同様である.

次に考える条件は,

(**) $u, v \in P - \{1\}$ に対して u, v は G で共役 $\Leftrightarrow u, v$ は H で共役

が言えていると仮定する. もしもこの2つの条件が満たされていれば, 2つの block algebra A, B の様子はとても似ているのではないか?⁶

§3. Broué の可換不足群予想.

有限群 G に対して, これの block algebra を A , そしてその不足群 (defect group) を P とする. また H として $H := N_G(P)$ をとる. すると「 A の Brauer 対応子」と呼ばれる H の block algebra B がいつも一意的に存在することがわかっている. そして B の不足群も同じ P である.

⁵すると自動的に P は G の p -部分群となる. これも Maschke の定理からの帰結である.

⁶厳密に言えばこれは実はウソなのである. もっとも, 「似ている」の定義に依存した話ではあるが. 詳しく言うと直ぐ後で述べる「perfect isometry の存在」くらいは成立していないと「似ている」と言いたくはない. 「安定同値 (stable equivalence) の存在」くらいでは不満足なのである. 例えば $p = 2, G := Sz(8)$ (鈴木群) とおいたときの G の principal 2-block A がその典型的なものなのであるが, ここでは詳しいことは省略する.

(大事な仮定): P は可換群である, と仮定する. (すると, Maschke の定理, Burnside の定理から上記の条件 (*) と (**) が満たされることがわかる. したがって, 上の Brauer の哲学 (思想) から言えば, 2つの block algebra A と B は似ているべき, となるわけだが, それを正確に数学の言葉で記述すると, 2つの導来圏 (derived category) $D^b(\text{mod-}A)$ と $D^b(\text{mod-}B)$ は同値になるのではないか?⁷

あるいはこれより少し弱い形の結論で

2つのブロック A, B の間にパーフェクト・アイソメトリー (perfect isometry) と呼ばれる全単射 $I : \mathbb{Z}\text{Irr}(A) \rightarrow \mathbb{Z}\text{Irr}(B)$ が存在するのではないか? ([5] を参照).

ということになる. ここでの記号であるが, $\text{mod-}A$ は有限生成右 A -加群全体からなる圏 (アーベル圏になる) であって, これの有界 (bounded) 導来圏 $D^b(\text{mod-}A)$ を考えている. 導来圏は一般にはアーベル圏にはならず, 3角圏 (triangulated category) なので, 上記の「同値」は「3角圏としての同値」の意味である. また, $\text{Irr}(A)$ は A に属する G の通常既約指標 (irreducible ordinary character) 全体の集合, そして $\mathbb{Z}\text{Irr}(A)$ はその集合の元たちを基底にもつ \mathbb{Z} 上自由加群を意味している.

さて, 表題の "new results" のうちの最初のもの, つまり Broué の ADGC (可換不足群予想) に関する新しい結果とは次のものである.

定理 1 (Jürgen Müller との共同の仕事, 2008). 有限群 G として散在型有限単純群の一つである HN, つまり原田群 (原田-Norton 群)⁸ を考える. すると, すべての素数 p に対しても, Broué の ADGC (可換不足群予想) が成立している.

⁷より正確には, 考えている2つのブロック代数 A, B は単に k 上のものを考えるのではなくて, k を剰余体 (residue field) に持つ完備離散付値環 (complete discrete valuation ring) \mathcal{O} 上での対応するブロック上での話にすべきである. なぜならば, そうしないと, 標数 0 の体上での表現, つまり通常表現の話と結び付かないので, 片手落ちなのである.

⁸「原田」は, もちろん「原田 耕一郎」の意味である.

次に2つめの話題に移る.

§4. Rouquier の予想 (ブロックの不足群の超焦点部分群が可換群の場合), ただし 主ブロック (principal block) 版.⁹

唐突だが G, A, P を上記 Broué の可換不足群予想でのものと同じとする. ただしここでは principal block (主ブロック) のみを考えるので, P は自動的に G の Sylow p -部分群となっている. そして $Q := h_G(P) := P \cap O^p(G)$ とし, この $h_G(P)$ を G における P の超焦点部分群 (hyperfocal subgroup of P in G) と呼ぶことにする. ここで, $O^p(G)$ はもちろん G の正規部分群でその剰余群が p -群になるようなもののうちで最小のもの, のことである.

この部分群 $h_G(P)$ についてはいろいろな特徴付けができるが, ここでは典型的なもの一つだけ挙げておく. つまり,

$$h_G(P) = 1 \iff G \text{ は } p\text{-ベキ零群 (} p\text{-nilpotent group)}$$

が言える. 読者はこれを見て次のことを思い出すかも知れない. つまり

$$f_G(P) = 1 \iff G \text{ は可換 Sylow } p\text{-部分群 } P \text{ を持つ } p\text{-ベキ零群}$$

ここで $f_G(P)$ は $f_G(P) := P \cap [G, G]$ で定義され通常 G における P の焦点部分群 (focal subgroup) と呼ばれているものである. $[G, G]$ はもちろん G の交換子部分群.

少し横道にそれてしまったが, 以下に Raphaël Rouquier が 2001–2002 年頃に以下の問題 (予想) を提示した.¹⁰ つまり,

⁹もちろんこの予想の各ブロック毎の予想 (block-wise version) もある. 詳しくは [7, p.161, Remark 13.14], [9, p.108, 下方 主定理] を参照.

¹⁰ただし, これは Broué の可換不足群予想とは比較にならないくらい知られていない. ある意味で, Broué の可換不足群予想の一般化にはなっている. しかし, 2002 年以降, 興味を持っている人はそんなにはいないと思われる. 文献としては [8, p.140, 最後の段落] を挙げておく.

もともとの不足群 (ここでは Sylow p -部分群) P が非可換群であっても, その超焦点部分群 $Q := \mathfrak{h}_G(P)$ が可換であれば, G の主ブロック (principal block) A とその Brauer 対応子 (Brauer correspondent) B ¹¹ とは導来同値ではないか? つまり, 対応する 2 つの有界導来圏 (bounded derived category) たちは同値になるのではないか?あるいは, 少し弱い結論だが, A と B の間にパーフェクト・アイソメトリー (perfect isometry) が存在するのではないか? [8, p.140, 下から 7 行目辺り]

というのがここで言う Rouquier の予想である. ただし一言注意. B は $N_G(P)$ のブロックではなくて, $N_G(Q)$ のブロックである. 超焦点部分の定義から一般に $N_G(P) \subseteq N_G(Q)$ なので (つまり, $N_G(Q)$ は, G により近いので, やはり Brauer 対応子 (ここでは自動的に $N_G(Q)$ の主ブロック) B が存在, 定義できることに注意.

さて, 表題の "new results" のうちの後半のもの, つまり Rouquier の「可換である超焦点部分群予想」に関する新しい結果とは次のものである.

定理 2 (Miles Holloway と Naoko Kunugi との共同の仕事, 2008).

(i) G の Sylow p -部分群 P が $P = M_{n+1}(p) (\cong C_{p^n} \rtimes C_p, \exists n \geq 2)$ を満たしているとする. このとき上記の Rouquier の予想のうち弱い方は「ほぼ」成立する. 詳しく言うと, G の principal block $A = B_0(G)$ と $N_G(\mathfrak{h}_G(P))$ の principal block $B = B_0(N_G(\mathfrak{h}_G(P)))$ の間には isometry $I : \mathbb{Z}\text{Irr}(A) \rightarrow \mathbb{Z}\text{Irr}(B)$ が存在して, そして「 I が perfect」までは言えないのであるが「separation condition (分離条件)」は満たし, また指標の高さ (height) を保つ. ここで記号の説明であるが, $M_{n+1}(p)$ は Gorenstein の教科書 [3, p.190] に出ている. $M_{n+1}(p)$ は $M_{n+1}(p) := \langle a, b \mid a^p = b^{p^n} = 1, a^{-1}ba = b^{p^{n-1}+1} \rangle$ で定義される, 位数 p^n の巡回群 C_{p^n} と位数 p の巡回群 C_p の半直積になっている非可換かつメタ巡回群である. そしてこのことから, 少なくとも「principal block A に対しては, S. Hendren の予想が正しい」ということがわかる. 実際,

¹¹Brauer の第 3 主定理から B も自動的に principal block になる.

$$\begin{aligned}
k_0(A) &= pe + p(p^{n-1} - 1)/e, \\
k_1(A) &= p^{n-2}(p - 1)/e, \\
k(A) &= pe + (p^n + p^{n-1} - p^{n-2} - p)/e, \\
\ell(A) &= e
\end{aligned}$$

が得られる. ここで, $k(A)$ は block A に属する G の通常既約指標の個数, そして $k_i(A)$ は, このうちで高さが i のものの個数を表している. また, $\ell(A)$ は block A に属する G の既約ブラウアー指標 (irreducible Brauer character) の個数を意味している. そして, e はブロック A の inertial index, つまり $e := |N_G(P)/P \cdot C_G(P)|$ で定義されている. また今の設定では, $e|(p-1)$ であることに注意.

(ii) $G = \mathrm{SL}_2(q^p) \rtimes C_p$ とする. もちろん q はある素数のべきである. また, ここでの C_p は $C_p \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{F}(q^p)/\mathbb{F}(q))$ によって自然に $\mathrm{SL}_2(q^p)$ の上に働くので, それを使って上記の半直積を定義するのである. $Q \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{SL}_2(q^p))$ が巡回群である場合を考える. つまり $Q \cong C_{p^n}, \exists n \geq 2$ を仮定するのである. すると, $P := Q \rtimes C_p$ はもちろん G の Sylow p -部分群になるが, この時 $P \cong M_{n+1}(p)$ となっていて, そして, $Q = \mathfrak{h}_G(P)$ となっていることがわかる. したがって, Rouquier の予想の設定になっている訳である. その上更に,

$$(***) \quad Q \cong C_9 \quad (\because p = 3), \quad P = M_3(3)$$

を仮定する. このとき $N_G(Q) = N_G(P) = P \rtimes C_2$ がわかる. そして $A := B_0(G)$, $B := B_0(N_G(Q))$ をそれぞれの principal 3-block とする. すると (条件 (***) を仮定するが) A と B は (完備付値環 \mathcal{O} 上で考えても) 導来同値 (derived equivalence) になっている. つまり, Rouquier の予想が成立していることが証明できる.

(iii) 上記 (ii) と似た状況だが,

$$p = 5, \quad G = \mathrm{Sz}(2^5) \rtimes C_5$$

の場合を考える. $Sz(2^5)$ は有限体 $\mathbb{F}(2^5)$ 上で定義される鈴木群の一つである. そして G での半直積は (ii) の場合と同様 $C_5 \cong \text{Gal}(\mathbb{F}(2^5)/\mathbb{F}(2))$ から自然に定められる作用で定義されている. すると $P \cong M_3(5) = 5_1^{+2}$, $Q := h_G(P) \cong C_{25}$, $Q \in \text{Syl}_5(Sz(2^5))$, $N_G(P) = N_G(Q) \cong P \rtimes C_4$ となっている. すると A, B を (ii) と同様に $G, N_G(Q)$ での principal 5-block とおくと, A, B 間には (導来同値の存在よりは弱いのであるが) 少なくとも perfect isometry (パーフェクト・アイソメトリー) の存在は証明することができる.¹² C. Eaton の最近の論文 [2, pp.2307–2308, 3 節 ${}^2G_2(3)$, 4 節 $\text{Aut}({}^2B_2(32))$] を参照.

謝辞 今回の研究集会では, 研究代表者であった山田裕理さん (一橋大学) に大変御世話になりました. ここに深く感謝の意を表します.

参考文献

- [1] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson, Atlas of Finite Groups, Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [2] C.W. Eaton, Perfect generalized characters inducing the Alperin-McKay conjecture, J. Algebra **320** (2008), 2301–2327.
- [3] D. Gorenstein, Finite Groups, Chelsea (1980).
- [4] S. Hendren, Extra special defect groups of order p^3 and exponent p^2 , J. Algebra **291** (2005), 457–491.
- [5] S. König, A. Zimmermann, Derived Equivalences for Group Rings, Lecture Notes in Math., Vol. **1685**, Springer, 1998.
- [6] 永尾 汎-津島行男, 有限群の表現論, 裳華房, 1987.

¹²もっともこれは関係するすべての群の character table がわかっているのであるから, それらからほぼ容易にわかることではあるが.

- [7] L. Puig, *Blocks of Finite Groups (The hyperfocal subalgebra of a block)*, Springer, 2002.
- [8] R. Rouquier, *Block theory via stable and Rickard equivalences*. in; *Modular representation theory of finite groups*, edited by M.J. Collins et al., Walter de Gruyter, 2001, pp.101–146.
- [9] 渡辺 アツミ, 書評「Lluis Puig: *On the local structure of Morita and Rickard equivalences between Brauer blocks*, Birkhäuser, 1999」, 「Lluis Puig: *Blocks of Finite Groups*, Springer, 2002」, 雑誌「数学」58巻2号(2006), pp.218–221.