

Non-Commutative Oscillators and Cavity-Induced Atom Cooling

Dedicated to K. R. Ito on the occasion on his 60th birthday

岡山大学大学院自然科学研究科 廣川 真男 (Masao HIROKAWA)
The Graduate School of Natural Science and Technology,
Okayama University

1 序

これまでエネルギー交差が、それぞれの観点から研究されてきたが [4, 14, 18, 38], 本講演では非可換振動子に対する **Dicke-型のエネルギー交差**[22] について紹介する。さらに、そこで展開した数学を用い、共振器量子電磁力学における共振器内でレーザーを用いた原子の冷却方法に応用し、新しい原子の超冷却技術の可能性を提案する [23].

第 2 章では, Parmeggiani と若山により導入された, 非可換調和振動子 [41, 42, 43] を記述する行列係数の Schrödinger 作用素 (Hamiltonian) のあるクラスに属する相互作用を持つ Hamiltonian のスペクトルを考察する. 一瀬, Parmeggiani, 若山により非可換調和振動子の Hamiltonian のスペクトルとゼータ関数の関わりが調べられているが [27, 28, 40, 41, 42, 43], 本講演ではスペクトルの交差という性質に着目する. Parmeggiani と若山が命名した「非可換調和振動子」という数学的概念と, 物理で研究されている非可換空間上の調和振動子 (これも非可換調和振動子と呼ばれる) との関係は未だ詳しく調べられていないが, 本講演では前者を扱い, これを単に「非可換振動子」と呼ぶことにする. 非可換振動子の調和性・非調和性に関しては, [22] で調べ始められている.

第 3 章では, 第 2 章で展開した数学をレーザー冷却の物理に応用してみる. レーザー冷却は現代物理学の最も注目すべきテーマの一つである. イオン冷却 [39], Doppler 冷却 [6], シジフォス冷却 [8] 等が実際に実験可能であることが示されてきた. このレーザー冷却の発達により, 多くの理論物理学における基本的現象が観測されるようになった. その中の顕著な例が, Bose-Einstein 凝縮 (BEC) である [9, 30]. 約 10 年前に上述のものとは違った, 強い原子-光相互作用を用いたレーザー冷却法が提案されたが, そのような強い原子-光相互作用は, 共振器量子電磁力学 (cavity QED) によって現実のものとなっている [11, 19, 24, 31, 35, 49]. この cavity QED における新しいレーザー冷却は, Ritsch らのグループにより, 単一モードのレーザー光と相互作用した 2 準位原子の系で理論物理学的に調べられ, シジフォス冷却に似たメカニズムが得られた [26]. このメカニズムを用いた新しいレーザー冷却を Ritsch らは **cavity-induced atom cooling (CIAC)** と呼んだ. この CIAC の過程において, 光子と相互作用した原子からエネルギーを奪い去る方法は, atomic decay のみならず cavity decay でも

可能であると主張された。Atomic decay とは原子からの光子の自然放射のことであり、cavity decay とは共振器に閉じ込められたレーザー光の光子を共振器の外に抜き出す技術である。ここで、原子と光の結合が強くなったときは、自然放射による遷移確率は小さくなることを注意しておく。Cavity decay がこの冷却法でうまく機能することが、Rempe のグループと Kimble のグループにより実験的にも検証されている [15, 25, 33].

一方、cavity QED に関して Domokos と Ritsch は、原子の自己組織化と cavity 内の多原子の協働現象を利用した超放射的冷却を提案した [10]. 強結合領域における原子-光子相互作用は、通常の atomic decay からは想像もつかない違った状況を作り出す [11]. この特性を CIAC に取り込むことを試みる。レーザーと相互作用した 2 準位原子の集合体が光学的協働効果 [2, 16] としての超放射の可能性を持つように、たとえレーザーと相互作用した 2 準位原子が 1 個でも、それが強結合領域にあれば、他の超放射的現象がエネルギー・スペクトルに現れる可能性がある [12, 20, 21, 44, 45]. この超放射は、「最初は基底エネルギーと励起エネルギーであった 2 つのエネルギーの関係が、ある程度の相互作用時間を経過した後に、お互いの関係を入れ替える」というエネルギー交差をもたらす。すなわち、ある種の相転移の可能性が指摘されているのである。これは多原子間の協働現象ではないが、光が誘導する相転移という光学的現象である。BEC の冷却過程における原子-レーザー相互作用に話を限れば、ある物理的条件下で超放射が実験的に観測されている [13, 29, 50, 53]. また、この現象は理論的にも示されている [46, 47, 48].

本講演では CIAC に新しいアイデアを提示する。まず、結合領域が弱結合領域と強結合領域の間を入れ替わるとき、Dicke-型エネルギー交差が生じることを示す。さらに、この交差を用い、エネルギー・スペクトルの観点から新たな超放射的冷却法の可能性を提案する。この提案では、共振器内の原子を冷却する理論において、次のような可能性があるかどうかを議論する：

1) 共振器内の原子を励起させるためのレーザーを照射すること無しに、レーザーを単に原子-共振器の相互作用を制御するのみのために使うことはできないか？

2) cavity decay によるエネルギー損失を大きくできないか？

1) の問題に関しては、Rempe のグループが、cavity decay の有効性のみならず、冷却過程で原子を励起させる必要が無い実験方法を与えている [33]. この実証技術はレーザー冷却において重要なものとなる。それは、共振器内で原子を励起させるためのレーザーを照射することは、原子-共振器系の加熱効果を生じるからである [34].

以上のように、第 2 章で展開される数学は、cavity QED における強結合領域に見られる物理現象の非摂動論的解析のためのものである。このような強結合領域を得る cavity QED は実際の原子と光のみならず、Josephson 接合を用いて、原子を超伝導量子ビットで作る人工原子、共振器を超伝導回路、レーザー光をマイクロ波で置き換え、実験的に作り出すことが理論的に予想され [32], 近年実験可能となった [5, 37, 52] (この cavity QED を Josephson cavity QED という)。このように、強結合領域は我々の身近なものとなってきており、それを解析する数学が期待されている。

2 非可換振動子とエネルギー交差

2.1 数学的設定

非可換振動子の Hamiltonian を構成するには、まず次の非可換二次形式を考える：

$$\begin{aligned} Q(p, q, r) = & A_{11}p^2 + A_{12}pq + A_{13}pr \\ & + A_{21}qp + A_{22}q^2 + A_{23}qr \\ & + A_{31}rp + A_{32}rq + A_{33}r^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここで、 $A_{kl} \in M_2(\mathbb{C})$ で、非可換変数 p, q, r には後で正準量子化で得られる運動量作用素 $-id/dx$ と位置作用素 $x \times$ が代入される。また、非可換変数 r にはゼロ作用素 0 か恒等作用素 Id が代入される。従って、 $A_{11} \neq 0$ のとき、 $Q(-id/dx, x \times, r)$ は行列係数の Schrödinger 作用素 [1, 7, 17] となる。例えば、 A_{kl} ($k, l = 1, 2$) を

$$A_{11} = A_{22} = \frac{\alpha + \beta}{4}\sigma_0 + \frac{\alpha - \beta}{4}\sigma_3, \quad (2.2)$$

$A_{12} = A_{21} = \frac{1}{2}\sigma_2$ のように取ると、微分作用素 $Q(-id/dx, x \times, 0)$ は、一瀬, Parmeggiani, 若山らによって研究されている非可換調和振動子の微分作用素 [27, 28, 40, 41, 42, 43] となる。

本講演では、

$$\sigma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

としておく。ただし、 $i := \sqrt{-1}$ 。

2.2 数学における主定理

実数 $\omega > 0$ を任意に固定する。角振動数 ω を持った量子調和振動子の Hamiltonian h_{os}^ω を 1-次元 Schrödinger 作用素：

$$h_{\text{os}}^\omega := -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{2} x^2$$

で与える。Hilbert 空間 $\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R})$ 上に作用する微分作用素 H_0 を

$$H_0 := \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\sigma_0 + \frac{\alpha - \beta}{2}\sigma_3 \right) \otimes h_{\text{os}}^\omega, \quad \alpha, \beta > 0,$$

とする。このとき、 H_0 は $\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R})$ 上の自己共役作用素となる。角振動数 ω を $\omega = 1$ と取れば、 H_0 はまさに一瀬, Parmeggiani, 若山が扱った自由 Hamiltonian である [27, 28, 40, 42, 43]。議論を簡単にするため、

$$\beta \geq \alpha \quad \text{or} \quad \alpha \geq 3\beta \quad (2.3)$$

としておくが、この仮定は本質的ではない。

関数 $\psi_n^\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を

$$\psi_n^\omega(x) := \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\omega x^2/2} H_n(\sqrt{\omega}x), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

で与える。ここで、 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は \mathbb{R} 上の Schwartz クラスの関数全体で、 $H_n(\xi)$ は Hermite 多項式である。 \mathbb{C}^2 -値関数 Ψ_n^\uparrow と Ψ_n^\downarrow を

$$\Psi_n^\uparrow(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \psi_n^\omega(x) \quad \text{and} \quad \Psi_n^\downarrow(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \psi_n^\omega(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.4)$$

で与える。このとき、関数 $\Psi_n^\#$ は H_0 の固有関数である：

$$H_0 \Psi_n^\uparrow = \left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha \omega \Psi_n^\uparrow \quad \text{and} \quad H_0 \Psi_n^\downarrow = \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta \omega \Psi_n^\downarrow.$$

また、Hamiltonian H_0 のスペクトル $\sigma(H_0)$ は

$$\sigma(H_0) = \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha \omega, \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta \omega \mid n \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

と完全に決まり、固有値 $\lambda \in \sigma(H_0)$ の縮退度は 2 以下となる。ここで、閉作用素 T に対するスペクトルを $\sigma(T)$ と記した。固有値に現れる n を量子数と呼ぶ。

次に、相互作用の役割を担う微分作用素の形を考えるために、 $\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R})$ 上で作用する微分作用素 $V_\infty(t)$ と $W(t)$ を考える ($t \in \mathbb{R}_+$)。さらに、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0$ をみたす連続関数 $\gamma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ を 1 つ取る。これら $V_\infty(t)$, $W(t)$, $\gamma(t)$ を用いて相互作用となる微分作用素 $V(t)$ の形を

$$V(t) := V_\infty(t) + \gamma(t)W(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

とする。この $V_\infty(t)$ を Dicke-型エネルギー交差のソース・ポテンシャル、 $\gamma(t)W(t)$ を Dicke-型エネルギー交差に対するエラー・ポテンシャルと呼ぶことにする。また、相互作用の強さを決める関数を $\lambda: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ で、 $\lambda(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} |\lambda(t)| = \infty$, かつ s と t が十分大きいとき、 $s < t$ ならば $|\lambda(s)| < |\lambda(t)|$ をみたす連続関数として与えておく。

以上の道具立ての上で、物理系の全 Hamiltonian $H_{\lambda, \gamma}(t)$ を次のように与える：

$$H_{\lambda, \gamma}(t) := H_0 + \lambda(t)V(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Dicke-型エネルギー交差を定義するために、次のような概念を導入しておく： $H_{\lambda, \gamma}(t)$ の固有値 $E_{\text{des}}(t)$ が H_0 の基底エネルギーの子孫であるとは、 $E_{\text{des}}(t)$ が $t \in \mathbb{R}_+$ の連続関数であって、 $E_{\text{des}}(0) = \inf \sigma(H_0)$ をみたすときをいう。

Definition 2.1 (Dicke-型エネルギー交差) $H_{\lambda,\gamma}(t)$ の全ての固有値が $t \in \mathbb{R}_+$ の連続関数であるとする. このとき, Hamiltonian の族 $\{H_{\lambda,\gamma}(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ が Dicke-型エネルギー交差を持つとは, 各 $t \in \mathbb{R}_+$ に対して $H_{\lambda,\gamma}(t)$ のある固有値 $E_{\lambda,\gamma}(t)$ が存在し, 次の条件 (DC1) と (DC2) をみたすときをいう:

(DC1) $E_{\lambda,\gamma}(0)$ は H_0 の励起エネルギーである. すなわち, $E_{\lambda,\gamma}(0) > \inf \sigma(H_0)$;

(DC2) ある適当な $t_* > 0$ が存在して $E_{\lambda,\gamma}(t_*) < E_{\text{des}}(t_*)$ が全ての H_0 の基底エネルギーの子孫 $E_{\text{des}}(t)$ に対して成り立つ.

さらにこのとき, もし $E_{\lambda,\gamma}(t_*) = \inf \sigma(H_{\lambda,\gamma}(t_*))$ となるならば, $E_{\lambda,\gamma}(t_*)$ を超放射的基底エネルギーと呼ぶ.

一瀬, Parmeggiani, 若山は

$$V_{\text{IPW}} = -i\sigma_2 \otimes \left(x \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.5)$$

なる相互作用を研究したが, 本講演では以下に示す別の相互作用を扱う:

関数 $c_\ell^k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ($k, \ell = 0, 1$) に対して $V_\infty(t)$ を

$$V_\infty(t) := \sum_{k,\ell=0,1} i^k c_\ell^k(t) \sigma_{\tau(\ell+1)} \otimes x^{1-k} \left(\frac{d}{dx} \right)^k, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2.6)$$

で与える. ここで, τ は $\tau(1) = 2, \tau(2) = 1$ で与えられる $\{1, 2\}$ の置換である.

以下, 記述を簡単にするために, $H_{\lambda,0}(t)$ を $H_\lambda(t)$ で表す:

$$H_\lambda(t) := H_{\lambda,0}(t) = H_0 + \lambda(t)V_\infty(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

関数 $c_\ell^k(t)$ を以下のように具体的に与えて議論する:

$$\begin{pmatrix} c_0^0(t) + ic_0^1(t) \\ c_1^0(t) + ic_1^1(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sqrt{1/2\omega} \\ \sqrt{\omega/2} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (2.7)$$

従って, $H_\lambda(t)$ を得るには, $r = \text{Id}$ として $Q(p, q, r)$ を正準量子化し, 各行列係数を, A_{11} を Eq.(2.2) で, その他は $A_{22} = \omega^2 A_{11}, A_{12} = A_{21} = A_{33} = 0,$

$$A_{13} + A_{31} = -\sqrt{\frac{1}{2\omega}} \{ \sin t \sigma_1 + \cos t \sigma_2 \} \lambda(t),$$

$$A_{23} + A_{32} = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \{ \cos t \sigma_1 - \sin t \sigma_2 \} \lambda(t),$$

で与えればよい.

主定理を述べる前に各 $\lambda \in \mathbb{R}$ と各 $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して重要な役割を担った数 $E_n^\mp(\lambda; \alpha, \beta)$ を定義する：

$$E_n^-(\lambda; \alpha, \beta) := \begin{cases} \frac{(\alpha + \beta)}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega + \frac{\beta \omega}{2} - \frac{1}{2} \Omega_n^-(\lambda; \alpha, \beta) & \text{もし } \beta \geq \alpha, \\ \frac{(\alpha + \beta)}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega - \frac{\alpha \omega}{2} - \frac{1}{2} \Omega_n^-(\lambda; \alpha, \beta) & \text{もし } 3\beta \leq \alpha, \end{cases} \quad (2.8)$$

ここで,

$$\Omega_n^-(\lambda; \alpha, \beta) = \sqrt{\left\{(\beta - \alpha) \left(n + \frac{1}{2}\right) + \beta\right\}^2 \omega^2 + 4(n+1)\lambda^2}$$

もし $\beta \geq \alpha$, また,

$$\Omega_n^-(\lambda; \alpha, \beta) = \begin{cases} -\frac{\alpha + \beta}{2} \omega & \text{for } n = 0, \\ \sqrt{\left\{(\alpha - \beta)(n - 1) + \frac{\alpha - 3\beta}{2}\right\}^2 \omega^2 + 4n\lambda^2} & \text{for } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

もし $3\beta \leq \alpha$. さらに,

$$E_n^+(\lambda; \alpha, \beta) := \begin{cases} \frac{(\alpha + \beta)}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega - \frac{\alpha \omega}{2} + \frac{1}{2} \Omega_n^+(\lambda; \alpha, \beta) & \text{もし } \beta \geq \alpha, \\ \frac{(\alpha + \beta)}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega + \frac{\beta \omega}{2} + \frac{1}{2} \Omega_n^+(\lambda; \alpha, \beta) & \text{もし } 3\beta \leq \alpha, \end{cases} \quad (2.9)$$

ここで,

$$\Omega_n^+(\lambda; \alpha, \beta) = \sqrt{\left\{(\beta - \alpha) \left(n + \frac{1}{2}\right) + \alpha\right\}^2 \omega^2 + 4n\lambda^2}$$

もし $\beta \geq \alpha$, また,

$$\Omega_n^+(\lambda; \alpha, \beta) = \sqrt{\left\{(\alpha - \beta)n + \frac{\alpha - 3\beta}{2}\right\}^2 \omega^2 + 4(n+1)\lambda^2}$$

もし $3\beta \leq \alpha$.

本講演の主定理は：

Theorem 2.2 条件 (2.3) を仮定する. $V_\infty(t)$ を Eq.(2.6) で, $c_\ell^k(t)$ を Eq.(2.7) で与える. エラー・ポテンシャル $\gamma(t)W(t)$ に対して条件 (A1)-(A3) を仮定する：

(A1) $W(t)$ は $\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R})$ 上の対称作用素で各 $t \in \mathbb{R}_+$ に対して $D(W(t)) \supset D(H_0)$ をみたす;

(A2) ある定数 $b_1 > 0$ が存在して

$$\|W(t)\Psi\|_{\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R})} \leq b_1 \|H_0\Psi\|_{\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R})} + b_2(t) \|\Psi\|_{\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R})}$$

が任意の $\Psi \in D(H_0)$ と全ての $t \in \mathbb{R}_+$ に対して成り立つ。ここで, $b_2(t) > 0$ は $t \in \mathbb{R}_+$ のみによる;

(A3) $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |\lambda(t)\gamma(t)| < b_1^{-1}$.

このとき, 次の (i) – (iii) が成り立つ:

- (i) $H_{\lambda,\gamma}(t)$ は $D(H_0)$ 上で自己共役で, 各 $t \in \mathbb{R}_+$ に対して下から有界.
- (ii) $\sigma(H_{\lambda,\gamma}(t)) = \sigma_{\text{dis}}(H_{\lambda,\gamma}(t))$. 詳しくは, $\sigma(H_{\lambda,\gamma}(t))$ は固有値 $\mathcal{E}_n(t)$ のみから成り有限縮退度を持つ. また, $\mathcal{E}_n(t)$ に対応した固有関数 $\Phi_n(t)$ の全体で, $\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R})$ の完全正規直交系を作ることができる. 各 $\mathcal{E}_n(t)$ は $H_\lambda(t)$ の Eq.(2.8) と Eq.(2.9) で与えられる固有値 $E_n(t)$ の近くに存在する.
- (iii) 各 $t \in \mathbb{R}_+$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(t) = \infty$.

さらに, ある定数 $T > 0$ が存在して, $t > T$ なる t に関して $|\lambda(t)\gamma(t)|$ は減少し, $\lim_{t \rightarrow \infty} |\lambda(t)|^3 |\gamma(t)| = 0$, $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |b_2(t)| < \infty$ とする. このとき, 次の (iv) が成り立つ:

- (iv) $\{H_{\lambda,\gamma}(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ は Dicke-型エネルギー交差を持ち, $H_{\lambda,\gamma}(t)$ の超放射的基底エネルギーが, $H_\lambda(t)$ の超放射的基底エネルギーの近くに存在する.

この定理の証明, 物理的に重要な調和性・非調和性の性質等詳しい内容は [22] を参照のこと.

3 物理への応用

まず, Ritsch のグループが [26] で扱った Hamiltonian を紹介する. そのために, いくつか作用素を導入する: 原子の量子力学的位置 (resp. 運動量) を x (resp. p) とし, 光子の消滅作用素 (resp. 生成作用素) を a (resp. a^\dagger) とする. 2 状態 (基底状態 $|0\rangle$ と 1 つの励起状態 $|1\rangle$) の状態間の正射影作用素を $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$ ($i, j = 0, 1$) で与える. CIAC のための全 Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2m} p^2 - \Delta \sigma_{11} - \Delta_c a^\dagger a + i\Omega(x) (\sigma_{01} a^\dagger - \sigma_{10} a) + i\alpha(a - a^\dagger)$$

で与えられる. ただし, 実数 Δ は原子-ポンプの離調 ($-\infty < \Delta < +\infty$), 実数 Δ_c はポンプ振動数に対する空洞共振器の相対的離調 ($\Delta_c < 0$), $\Omega(x)$ は原子-共振器の結合定

数であり、通常、原子の位置 x とレーザーの光子の波数 k に対して $\Omega(x) = \Omega_0 \cos kx$ で与えられる。 $i\alpha(a - a^\dagger)$ はポンプ場のエネルギーを表す。ここで、 $\alpha = 0$ のとき、この Hamiltonian H は、原子とマイクロ波の場の共鳴相互作用を議論するとき用いられるものであることを注意しておく [51]。

この Hamiltonian H を次のように一般化する：

- (1) 線形相互作用のみならず、非線形相互作用も取り込む [19, §.8.1.3]；
- (2) 結合定数 $\Omega(x)$ に原子-共振器相互作用を強めるのに必要な相互作用時間を取り込む；
- (3) ポンプ場のエネルギーのみならず、この物理系を検証する実験環境から来る誤差項を取り込むような一般項 $W(x, t)$ を考える。例えば、 $W(x, t)$ は結合定数を強めたときに現れる可能性のある項を含める：

$$W(x, t) = i \left\{ \alpha_1 (a - a^\dagger) + \alpha_2 (\sigma_{01} a - \sigma_{10} a^\dagger) \right\}, \quad 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1.$$

従って、扱う系の全 Hamiltonian は

$$H(\Omega, \alpha; d) = \frac{1}{2m} p^2 - \Delta \sigma_{11} - \Delta_c a^\dagger a + i\Omega(x, t) (\sigma_{01} a^{\dagger d} - \sigma_{10} a^d) + \alpha(x, t) W(x, t)$$

となる。ここで、 $d \in \mathbb{N}$ 、 $\Omega(x, t)$ と $\alpha(x, t)$ は (x, t) の連続実数値関数で、 $\Omega(x, 0) = 0 = \alpha(x, 0)$ としておく。結合定数 $\Omega(x, t)$ は、例えば、 $\Omega(x, t) = \Omega_0(t) \gamma(x)$ とし、 $\Omega_0(t)$ は時間 $t \geq 0$ の連続実数値関数で、 $\Omega_0(0) = 0$ とする。また、 $\gamma(x)$ は有界な連続実数値関数で、例えば $\gamma(x) = \cos kx$ を考える。

3.1 $\alpha \equiv 0$ の場合

ここでは、 $\alpha(x, t) \equiv 0$ のときを考える。Ritsch らのように [26]、 $\Omega(x, t)$ の位置 x を人工的にコントロールするパラメータ z とし、よく知られた同一視を行うと、Hamiltonian $H(\Omega, 0; d)$ は

$$H_0(z, t; d) := \begin{pmatrix} -\Delta_c a^\dagger a + \varepsilon_1 - \Delta & -i\Omega(z, t) a^d \\ i\Omega(z, t) a^{\dagger d} & -\Delta_c a^\dagger a + \varepsilon_0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

とみなせる。以下、

$$\varepsilon_1 - \Delta > \varepsilon_0 \quad (3.2)$$

を仮定する。

第2章と同様に、 $H_0(z, t; d)$ のスペクトルは固有値のみからなり、その固有値を完全に求めることができる。まず、

$$\Xi_n(d) = -\Delta_c n + \frac{1}{2} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + d\Delta_c - \Delta)$$

とし、一般化された Rabi 振動数 $\Upsilon_n(z, t; d)$ を

$$\Upsilon_n(z, t; d) = \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0 + d\Delta_c - \Delta)^2 + 4|\Omega(z, t)|^2 \frac{n!}{(n-d)!}} \quad (3.3)$$

で与える. このとき, $H_0(z, t; d)$ の全ての固有値は次で与えられる $E_n^0(z, t; d)$, $E_n^\pm(z, t; d)$ となる: $0 \leq n < d$ をみたす $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$E_n^0(z, t; d) = -\Delta_c n + \varepsilon_0.$$

また, $n \geq d$ をみたす非負の整数 n に対して

$$E_n^-(z, t; d) = \begin{cases} \Xi_n(d) - \Upsilon_n(z, t; d) & \text{もし } \varepsilon_1 - \varepsilon_0 \geq \Delta - d\Delta_c \\ \Xi_{n+d}(d) - \Upsilon_{n+d}(z, t; d) & \text{もし } \varepsilon_1 - \varepsilon_0 < \Delta - d\Delta_c, \end{cases}$$

$$E_n^+(z, t; d) = \begin{cases} \Xi_{n+d}(d) + \Upsilon_{n+d}(z, t; d) & \text{もし } \varepsilon_1 - \varepsilon_0 \geq \Delta - d\Delta_c, \\ \Xi_n(d) + \Upsilon_n(z, t; d) & \text{もし } \varepsilon_1 - \varepsilon_0 < \Delta - d\Delta_c. \end{cases}$$

今2つの時空領域を定義する: $\max\{d, m\} < n$ なる非負の整数 m と n に対して

$$\mathbb{D}_{mn}^{\text{wc}}(d) := \{(z, t) \mid E_m^0(z, t; d) < E_n^-(z, t; d) \text{ if } m < d; \\ E_m^-(z, t; d) < E_n^-(z, t; d) \text{ if } m \geq d\},$$

$$\mathbb{D}_{mn}^{\text{sc}}(d) := \{(z, t) \mid E_m^0(z, t; d) > E_n^-(z, t; d) \text{ if } m < d; \\ E_m^-(z, t; d) > E_n^-(z, t; d) \text{ if } m \geq d\}.$$

3.1.1 $d = 1$ の場合

この §3.1.1 では $d = 1$ とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して正の定数 C_{0n}^0 を

$$C_{0n}^0 := \begin{cases} \Delta_c^2 n - \Delta_c (\varepsilon_1 - \varepsilon_0 + \Delta_c - \Delta) & \text{もし } \varepsilon_1 - \varepsilon_0 \geq \Delta - \Delta_c, \\ \Delta_c^2 (n+1) - \Delta_c (\varepsilon_1 - \varepsilon_0 + \Delta_c - \Delta) & \text{もし } \varepsilon_1 - \varepsilon_0 < \Delta - \Delta_c, \end{cases}$$

で定義する.

ここで3つの時空領域を定義する: 弱結合領域を表す時空領域 $\mathcal{D}_{0n}^{\text{wc}}(1)$ を

$$\mathcal{D}_{0n}^{\text{wc}}(1) := \{(z, t) \mid |\Omega(z, t)|^2 < C_{0n}^0\},$$

強結合領域を表す時空領域 $\mathcal{D}_{0n}^{\text{sc}}(1)$ を

$$\mathcal{D}_{0n}^{\text{sc}}(1) := \{(z, t) \mid |\Omega(z, t)|^2 > C_{0n}^0\}.$$

最後に, 臨界領域となる時空領域 $\mathcal{D}_{0n}^{\text{cr}}(1)$ を

$$\mathcal{D}_{0n}^{\text{cr}}(1) := \{(z, t) \mid |\Omega(z, t)|^2 = C_{0n}^0\}$$

で与える.

Dicke-型エネルギー交差がどのように起こるかを次のように完全に決定できる:

Theorem 3.1 $n \in \mathbb{N}$ とする. このとき, $\mathcal{D}_{0n}^{\text{wc}}(1) = \mathbb{D}_{0n}^{\text{wc}}(1)$, $\mathcal{D}_{0n}^{\text{sc}}(1) = \mathbb{D}_{0n}^{\text{sc}}(1)$. すなわち,

$$E_0^0(z, t; 1) < E_n^-(z, t; 1) \iff (z, t) \in \mathcal{D}_{0n}^{\text{wc}}(1), \quad (3.4)$$

$$E_0^0(z, t; 1) = E_n^-(z, t; 1) \iff (z, t) \in \mathcal{D}_{0n}^{\text{cr}}(1), \quad (3.5)$$

$$E_0^0(z, t; 1) > E_n^-(z, t; 1) \iff (z, t) \in \mathcal{D}_{0n}^{\text{sc}}(1). \quad (3.6)$$

今 $1 < m < n$ なる $m, n \in \mathbb{N}$ を考える. $E_0^0(z, t; 1)$ と $E_n^-(z, t; 1)$ の間に上述のように Dicke-型エネルギー交差が生じれば, 必ず $E_m^-(z, t; 1)$ と $E_n^-(z, t; 1)$ との間にエネルギー交差が起こっていないなければならない. この様子も把握することができる.

$m < n$ なる $m, n \in \mathbb{N}$ に対して正の実数 C_{mn}^{wc} と C_{mn}^{sc} を

$$C_{mn}^{\text{wc}} := \begin{cases} \Delta_c^2 \left\{ \frac{m+n}{2} + \sqrt{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 + \frac{K^2}{2\Delta_c^2}} \right\} & \text{もし } \varepsilon_1 - \varepsilon_0 \geq \Delta - \Delta_c, \\ \Delta_c^2 \left\{ \frac{m+n+2}{2} + \sqrt{\left(\frac{m+n+2}{2}\right)^2 + \frac{K^2}{2\Delta_c^2}} \right\} & \text{もし } \varepsilon_1 - \varepsilon_0 < \Delta - \Delta_c, \end{cases}$$

$$C_{mn}^{\text{sc}} := \begin{cases} \Delta_c^2 \left\{ m+n+2 + \sqrt{mn + \frac{K^2}{4\Delta_c^2}} \right\} & \text{もし } \varepsilon_1 - \varepsilon_0 \geq \Delta - \Delta_c, \\ \Delta_c^2 \left\{ m+n+2 + 2\sqrt{m+n+mn + \frac{K^2}{4\Delta_c^2}} \right\} & \text{もし } \varepsilon_1 - \varepsilon_0 < \Delta - \Delta_c, \end{cases}$$

とおく. ここで, $K := \varepsilon_1 - \varepsilon_0 + \Delta_c - \Delta$.

再び, 2つの時空領域を定義する: 弱結合領域を表す時空領域 $\mathcal{D}_{mn}^{\text{wc}}(1)$ を

$$\mathcal{D}_{mn}^{\text{wc}}(1) := \{(z, t) \mid 0 \leq |\Omega(z, t)|^2 < C_{mn}^{\text{wc}}\},$$

強結合領域を表す時空領域 $\mathcal{D}_{mn}^{\text{sc}}(1)$ を

$$\mathcal{D}_{mn}^{\text{sc}}(1) := \{(z, t) \mid |\Omega(z, t)|^2 > C_{mn}^{\text{sc}}\}$$

で定義する. このとき, $E_m^-(z, t; 1)$ と $E_n^-(z, t; 1)$ との間のエネルギー交差は次の様に起こる:

Theorem 3.2 $m, n \in \mathbb{N}$ を $1 < m < n$ とする. このとき, $\mathcal{D}_{mn}^{\text{wc}}(1) \subset \mathbb{D}_{mn}^{\text{wc}}(1)$, $\mathcal{D}_{mn}^{\text{sc}}(1) \subset \mathbb{D}_{mn}^{\text{sc}}(1)$. すなわち,

$$E_m^-(z, t; 1) < E_n^-(z, t; 1), \quad (z, t) \in \mathcal{D}_{mn}^{\text{wc}}(1), \quad (3.7)$$

$$E_m^-(z, t; 1) > E_n^-(z, t; 1), \quad (z, t) \in \mathcal{D}_{mn}^{\text{sc}}(1). \quad (3.8)$$

これら2つの定理の証明は [23] にあるので、ここでは証明の代わりに具体的な例でこれらの定理が言っていることを見てみる。今 $\gamma(z)$ として $\cos 2\pi z$ を採用する。 $z = x/\lambda$ とする。ただし、 λ はレーザー光の波長： $\lambda = 2\pi/k$ 。位置のパラメータを $z = 0$ と固定したとき、エネルギー（固有値） $E_0^0(0, t; 1)$, $E_1^-(0, t; 1)$, $n = 1, 2, 3, 4$, は図1のようにエネルギー交差を得る。次に、結合定数 $|\Omega_0(t)|$ を $|\Omega_0(t)| = 2\kappa, 4\kappa, 6\kappa, 8\kappa$ のように与えると、エネルギー（固有値） $E_0^0(z, t; 1)$ と $E_1^-(z, t; 1)$ は図2のようにエネルギー交差を得る。

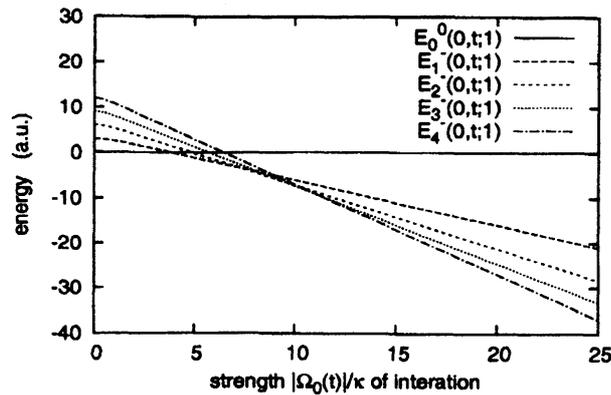


図 1: $\gamma(z)=\cos 2\pi z$ に対する Dicke-型エネルギー交差。 $E_0^0(0, t; 1) = 0$ (solid line), $E_1^-(0, t; 1)$ (dashed), $E_2^-(0, t; 1)$ (short-dashed), $E_3^-(0, t; 1)$ (dotted), $E_4^-(0, t; 1)$ (dashed-dotted). 物理パラメータは $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 6\kappa$, $\Delta = 1\kappa$, $\Delta_c = -3\kappa$ と定める。ただし、 κ はある単位で、位置のパラメータ z は $z = 0$ とする。

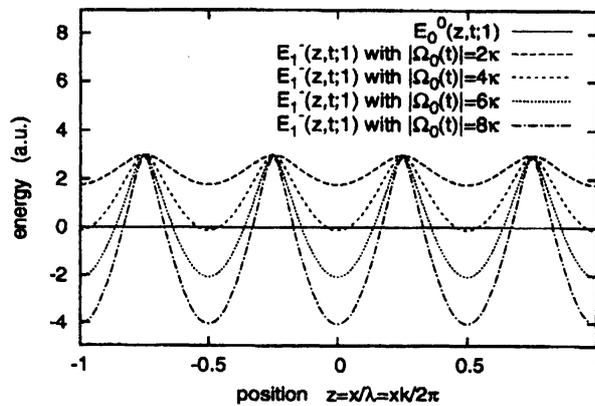


図 2: $\gamma(z)=\cos 2\pi z$ に対する Dicke-型エネルギー交差。 $E_0^0(z, t; 1) = 0$ (solid line), $|\Omega_0(t)| = 2\kappa$ のときの $E_1^-(z, t; 1)$ (dashed), $|\Omega_0(t)| = 4\kappa$ のときの $E_1^-(z, t; 1)$ (short-dashed), $|\Omega_0(t)| = 6\kappa$ のときの $E_1^-(z, t; 1)$ (dotted), $|\Omega_0(t)| = 8\kappa$ のときの $E_1^-(z, t; 1)$ (dashed-dotted). 時間 t は $|\Omega_0(t)| = 2\kappa, 4\kappa, 6\kappa, 8\kappa$ となるように固定。

今話を簡単にするために、 $\varepsilon_1 - \varepsilon_0 \geq \Delta - \Delta_c$ とする。まず、原子が最初 $(z_0, t_0) \in D_{mn}^{wc}(1)$ ($0 \leq m < n; m, n \in \mathbb{N}$) でエネルギー $E_m^-(z_0, t_0; 1)$ の状態に居たとしよう。原子にとっては、エネルギー $E_n^-(z_0, t_0; 1)$ の状態に移るよりもエネルギー $E_m^-(z_0, t_0; 1)$

の状態に居るほうが安定なので、原子はエネルギー $E_m^-(z_0, t_0; 1)$ の状態に留まろうとする。しかしながら、一度 (z, t) が $\mathcal{D}_{mn}^{\text{sc}}(1)$ に突入すると、定理 3.1 や定理 3.2 のようにエネルギー交差が生じ、原子はエネルギー $E_n^-(z_0, t_0; 1)$ の状態に移るほうが安定なので、そちらへ遷移する。結合定数が大きいので自然放射による遷移確率は低いが、Ritsch が指摘した cavity decay による遷移を期待できる [26]。このような冷却は熱力学的平衡状態にはないが、[36, Eq.(5.1)] や [3, Eq.(2.1)] のように強引に熱力学の法則に従い、この遷移により系が失う温度 $\Delta T_{m \rightarrow n}$ を見積もると、

$$\Delta T_{m \rightarrow n} \approx \frac{2(n-m)}{k_B} \left| \frac{|\Omega(z, t)|^2}{\Upsilon_m(z_0, t_0; 1) + \Upsilon_n(z, t; 1)} - |\Delta_c| \right| + \frac{2m}{k_B} \left| \frac{|\Omega(z, t)|^2 - |\Omega(z_0, t_0)|^2}{\Upsilon_m(z_0, t_0; 1) + \Upsilon_n(z, t; 1)} \right|, \quad (3.9)$$

$$(z_0, t_0) \in \mathcal{D}_{mn}^{\text{wc}}(1), (z, t) \in \mathcal{D}_{mn}^{\text{sc}}(1),$$

となる。ここで、 k_B は Boltzmann 定数。

逆に、原子が最初 $(z_0, t_0) \in \mathcal{D}_{mn}^{\text{sc}}(1)$ ($0 \leq m < n; m, n \in \mathbb{N}$) でエネルギー $E_n^-(z_0, t_0; 1)$ の状態に居たとしよう。すると、原子が居る時空の領域が $\mathcal{D}_{mn}^{\text{sc}}(1)$ から $\mathcal{D}_{mn}^{\text{wc}}(1)$ に変わったとき、先ほどと逆の過程をたどり、やはりエネルギー交差を生じる。ここでも先ほど同様、 $\Delta T_{n \rightarrow m} = \Delta T_{m \rightarrow n}$ なる温度損失 $\Delta T_{n \rightarrow m}$ が見込める。この様子を図 3 にあるエネルギー $E_1^-(z, t; 1)$ と $E_3^-(z, t; 1)$ でみると、太い下向き矢印のように温度損失が期待できる。

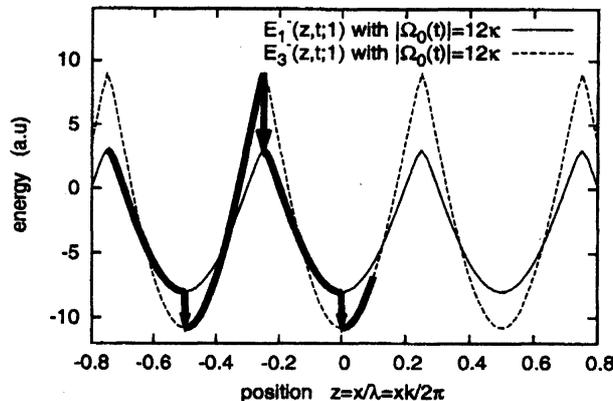


図 3: $E_1^-(z, t; 1)$ (solid line) と $E_3^-(z, t; 1)$ (dashed) の間のエネルギー損失の様子。物理パラメータは図 1 と同じで、 $|\Omega_0(t)|$ を 12κ で固定。ただし $\gamma(z) = \cos 2\pi z$ 。太い下向き矢印がエネルギー損失の様子を表す。

以上により、次のような超放射的冷却の可能性が覗える：各 $\ell = 0, 1, \dots, N-1$ ($N \in \mathbb{N}$) に対して、 $(z_{2\ell+1}, t_{2\ell+1}) \in \mathcal{D}_{01}^{\text{wc}}(1)$, $(z_{2\ell+2}, t_{2\ell+2}) \in \mathcal{D}_{01}^{\text{sc}}(1)$ とする。Eq.(3.9) により、 $K \geq 0$ のとき、Dicke-型エネルギー交差とその逆過程によるエネルギー交差

により，共振器内の原子のエネルギー損失は最大で

$$\frac{2}{k_B} \sum_{\nu=1}^{2N} \frac{|\Omega(z_\nu, t_\nu)|^2}{|K|/2 + \Upsilon_1(z_\nu, t_\nu; 1)} - \frac{4N}{k_B} |\Delta_c| \quad (3.10)$$

を見定める． $K < 0$ のときも同様の議論ができる．もちろん，原子が常に時空領域 $\mathbb{D}_{01}^{wc}(1)$ にあるならば，上のような超放射的冷却は無く，単に Ritsch らが見つけた通常の CIAC を期待するのみである (図 4)．図 4 の太い上向き矢印は，共振器内の原子に

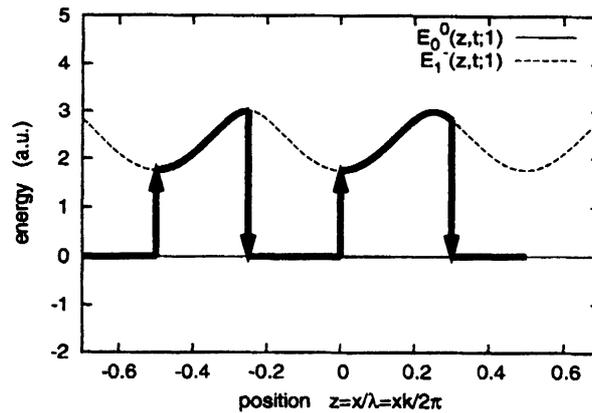


図 4: $\mathbb{D}_{01}^{wc}(1)$ での $E_0^0(z, t; 1) = 0$ (solid line) と $E_1^-(z, t; 1)$ (dashed) の間の通常の CIAC (bold line)．物理パラメータは図 1 と同じ．

レーザーを照射することによって，そのレーザーの光子を吸収し励起する過程を示す．この時空領域 $\mathbb{D}_{01}^{wc}(1)$ では，先ほどの時空の点列 $\{(z_\nu, t_\nu)\}_{\nu=1}^{2L}$ は期待できない．従って，Eq.(3.10) は得られない．しかし，次に図示するように，結合の強さを $|\Omega_0| = 8\kappa$ のようにとると，今度はその $\{(z_\nu, t_\nu)\}_{\nu=1}^{2N}$ が期待できる (図 5)．図 4 と図 5 を比較し

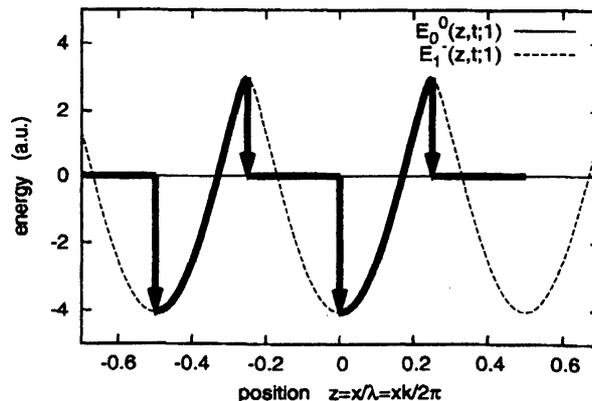


図 5: $E_0^0(z, t; 1) = 0$ (solid line) と $E_1^-(z, t; 1)$ (dashed) の間の Dicke-型超放射と CIAC (bold line)．物理パラメータは図 1 と同じ．

て見ると，図 5 には太い上向き矢印が全く無い事に気が付く．これは，cavity 内の原

子を励起させるためにレーザーを照射する必要なく冷却過程を作れる可能性を示唆している。この過程はある種の超放射 [20, 21, 44] によるものである。

時空の関数としてエネルギー $E_0^0(z, t; 1)$ と $E_1^-(z, t; 1)$ の作る局面の様子を図 6 と図 7 にあげておく。

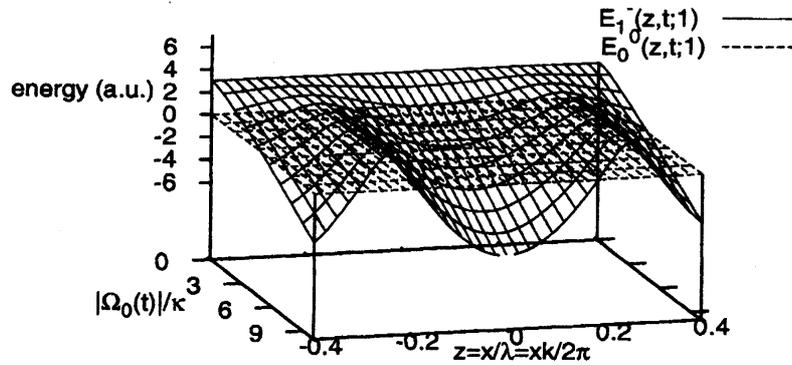


図 6: $E_0^0(z, t; 1) = 0$ (dashed line) と $E_1^-(z, t; 1)$ (solid) の局面。物理パラメータは図 1 と同じ。

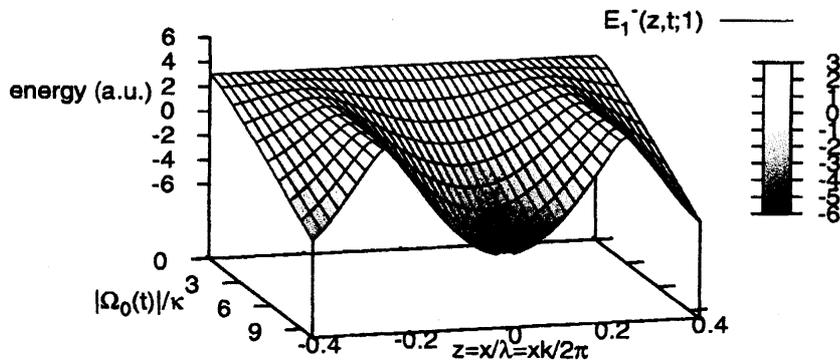


図 7: $E_1^-(z, t; 1)$ (solid line) の局面。ただし, $E_0^0(z, t; 1) = 0$. 物理パラメータは図 1 と同じ。

3.1.2 $d \geq 2$ の場合

§3.1.2 では, $d \geq 2$ の場合を議論する. $m, n \in \mathbb{Z}$ を $0 \leq m < d \leq n$ とする. 正の実数 $C_{mn}^0(d)$ を

$$C_{mn}^0(d) := \begin{cases} \frac{(n-d)!}{n!} (n-m) |\Delta_c| \left\{ |\Delta_c| (n-m) + K_d \right\} & \text{もし } \varepsilon_1 - \varepsilon_0 \geq \Delta - d\Delta_c, \\ \frac{n!}{(n+d)!} (n+d-m) |\Delta_c| \times \\ \quad \times \left\{ |\Delta_c| (n+d-m) + K_d \right\} & \text{もし } \varepsilon_1 - \varepsilon_0 < \Delta - d\Delta_c, \end{cases}$$

で与える. ただし, $K_d := \varepsilon_1 - \varepsilon_0 + d\Delta_c - \Delta$.

3つの時空領域を次のように決める: 弱結合領域を表す時空領域 $\mathcal{D}_{mn}^{\text{wc}}(d)$ を

$$\mathcal{D}_{mn}^{\text{wc}}(d) := \{(z, t) \mid |\Omega(z, t)|^2 < C_{mn}^0(d)\},$$

強結合領域を表す時空領域 $\mathcal{D}_{mn}^{\text{sc}}(d)$ を

$$\mathcal{D}_{mn}^{\text{sc}}(d) := \{(z, t) \mid |\Omega(z, t)|^2 > C_{mn}^0(d)\}$$

と定義する. 臨界領域を表す時空領域 $\mathcal{D}_{mn}^{\text{cr}}(d)$ は

$$\mathcal{D}_{mn}^{\text{cr}}(d) := \{(z, t) \mid |\Omega(z, t)|^2 = C_{mn}^0(d)\}$$

である. すると次の定理が成り立つ:

Theorem 3.3 $d \geq 2$ とする. このとき, $m < d \leq n$ なる $m, n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbb{D}_{mn}^{\text{wc}}(d) = \mathcal{D}_{mn}^{\text{wc}}(d)$, $\mathbb{D}_{mn}^{\text{sc}}(d) = \mathcal{D}_{mn}^{\text{sc}}(d)$. すなわち,

$$E_m^0(z, t; d) < E_n^-(z, t; d) \iff (z, t) \in \mathcal{D}_{mn}^{\text{wc}}(d), \quad (3.11)$$

$$E_m^0(z, t; d) = E_n^-(z, t; d) \iff (z, t) \in \mathcal{D}_{mn}^{\text{cr}}(d), \quad (3.12)$$

$$E_m^0(z, t; d) > E_n^-(z, t; d) \iff (z, t) \in \mathcal{D}_{mn}^{\text{sc}}(d). \quad (3.13)$$

また, $\mathcal{D}_{0n}^{\text{sc}}(1) \subset \mathcal{D}_{0n}^{\text{sc}}(d)$. つまり, 非線形結合 ($d \geq 2$) のほうが線形結合 ($d = 1$) より Dicke-型エネルギー交差が起りやすい.

ところで, 非線形結合を持つと, 結合定数があまり大きく成り過ぎると, 基底状態が存在しなくなる場合がある:

Theorem 3.4 $\varepsilon_1 - \varepsilon_0 \approx \Delta - d\Delta_c$ とする. もし (z, t) が $|\Omega(z, t)| > |\Delta_c|/\sqrt{(d-1)!}$ をみたすならば, $H_0(z, t; d)$ は基底状態を持たない.

4 $\alpha \neq 0$ の下での CIAC と Dicke-型エネルギー交差の安定性

この章では再び $d = 1$ とし, $\alpha(z, t)W(z, t)$ の影響下での CIAC と Dicke-型エネルギー交差の安定性を見る.

以下物理の記法に合わせて, $H_\alpha(z, t; d)$ の作用する Hilbert 空間 $\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R})$ の内積を $\langle \Psi | \Phi \rangle$ と表す.

まず, 任意 $\epsilon > 0$ に対して, $C_\epsilon(z, t)$ を

$$C_\epsilon(z, t) := (1 + \epsilon) \left\{ 1 + \left(\frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \right)^2 (\epsilon_0 + |\epsilon_1 - \Delta|) + \left(\frac{1 + \epsilon}{\epsilon} \right)^2 \frac{|\Omega(z, t)|^2}{4\Delta_c^2} \right\}^{1/2}$$

とおき, 各 $n \in \mathbb{N}$ と各 $\theta \geq 0$ に対して, 正の実数 $C_{0n}^0[\theta]$ を

$$C_{0n}^0[\theta] := \begin{cases} (\theta - \Delta_c)^2 n + (\theta - \Delta_c)(\epsilon_1 - \epsilon_0 + \Delta_c - \Delta) & \text{もし } \epsilon_1 - \epsilon_0 \geq \Delta - \Delta_c, \\ (\theta - \Delta_c)^2 (n + 1) + (\theta - \Delta_c)(\epsilon_1 - \epsilon_0 + \Delta_c - \Delta) & \text{もし } \epsilon_1 - \epsilon_0 < \Delta - \Delta_c, \end{cases}$$

とおく. さらに, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, 正の実数 $C[n]$ を

$$C[n] := \begin{cases} \Delta_c^2 n + \frac{\epsilon_0(\epsilon_1 + \Delta_c - \Delta)}{n} - \Delta_c(\epsilon_0 + \epsilon_1 + \Delta_c - \Delta) & \text{もし } \epsilon_1 - \epsilon_0 \geq \Delta - \Delta_c, \\ \Delta_c^2 (n + 1) + \frac{\epsilon_0(\epsilon_1 + \Delta_c - \Delta)}{n + 1} - \Delta_c(\epsilon_0 + \epsilon_1 + \Delta_c - \Delta) & \text{もし } \epsilon_1 - \epsilon_0 < \Delta - \Delta_c, \end{cases}$$

とおく.

またさらに, 任意の正の関数 $f(z, t)$ と任意の $b, \epsilon' > 0$ に対して, 時空領域 $\mathcal{D}(\epsilon, \epsilon'; b, f)$ を

$$\mathcal{D}(\epsilon, \epsilon'; b, f) := \left\{ (z, t) \mid |\alpha(z, t)| < \frac{\epsilon'}{2b}, \right. \\ \left. |\alpha(z, t)| \left(bC_\epsilon(z, t) + f(z, t) \right) < \frac{\epsilon'(1 + \epsilon)}{2} \right\}$$

で定義し, 時空領域 $\mathcal{D}_{0n}^{\text{sc}}(1; \theta)$ を

$$\mathcal{D}_{0n}^{\text{sc}}(1; \theta) := \{(z, t) \mid |\Omega(z, t)|^2 > C_{0n}^0[\theta], |\Omega(z, t)|^2 > C[n]\}$$

で定義する.

安定性に関する定理は次のようになる:

Theorem 4.1 $W(z, t)$ が次の条件 (A1)–(A3) をみたすとする :

(A1) 任意の (z, t) に対して, $D(H_0(z, 0; 1))$ 上で $W(z, t)$ は対称 ;

(A2) ある定数 $b_1 > 0$ が存在して

$$\begin{aligned} & \langle W(z, t)\Psi | W(z, t)\Psi \rangle^{1/2} \\ & \leq b_1 \langle H_0(z, 0; 1)\Psi | H_0(z, 0; 1)\Psi \rangle^{1/2} + b_2(z, t) \langle \Psi | \Psi \rangle^{1/2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

が全ての $\Psi \in D(H_0(z, 0; 1))$, (z, t) で成り立つ. ただし, $b_2(z, t) > 0$ は (z, t) のみによる ;

(A3) ある定数 $\epsilon > 0$ が存在して, $\epsilon < 1$, かつ, 任意の (z, t) に対して $|\alpha(z, t)| < \{b_1(1 + \epsilon)\}^{-1}$ が成り立つ.

このとき, $H_\alpha(z, t; 1)$ は $E_n^{\natural}(z, t; 1)$ の近くに固有値 $\mathcal{E}_n^{\natural}(z, t; 1)$ を持つ. ここで, $\natural = 0, \pm$. さらに, もしある $\theta > 0$ に対して $(z_*, t_*) \in \mathcal{D}(\epsilon, \kappa_0; b_1, b_2) \cap \mathcal{D}_{0n}(1; \theta)$ ならば, $0 < \kappa_0 < 1/4$ をみたすある定数 κ_0 が存在して, $\mathcal{E}_0^0(z, t; 1)$ と $\mathcal{E}_n^-(z, t; 1)$ との間で $(z, 0)$ から (z_*, t_*) へ移るときに Dicke-型エネルギー交差が起り, $H_\alpha(z_*, t_*; 1)$ は超放射的基底エネルギーを持つ.

参考文献

- [1] B. P. Allakhverdiev, *Izv. Math.* **59** (1995), 45.
- [2] A. V. Andreev, V. I. Emel'yanov, and Yu. A. Il'inskiĭ, *Cooperative Effects in Optics* (Institute of Physics Publishing, Bristol, 1993).
- [3] F. Bardou, J.-P. Bouchaud, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *Lévy Statistics and Laser Cooling* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [4] D. Bresch, B. Desjardins, and E. Grenier, *J. Diff. Equations* **241** (2007), 207.
- [5] I. Chiorescu, P. Bertet, K. Semba, Y. Nakamura, C. J. P. M. Harmans, and J. E. Mooij, *Nature* **431** (2004), 159.
- [6] S. Chu, L. W. Hollberg, J. E. Bjorkholm, A. Cable, and A. Ashkin, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985), 48.
- [7] S. Clark, F. Gesztesy, H. Holden, and B. M. Levitan, *J. Diff. Equations* **167** (2000), 181.
- [8] C. Cohen-Tannoudji and W. D. Phillips, *Physics Today* **43** (1990), 33.
- [9] E. A. Cornell and C. E. Wieman, *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002), 875.

- [10] P. Domokos and H. Ritsch, *J. Opt. Soc. Am. B* **20** (2003), 1098.
- [11] S. M. Dutra, *Cavity Quantum Electrodynamics* (Wiley-Interscience Publication, Ney York 2005).
- [12] C. P. Enz, *Helv. Phys. Acta* **70** (1997), 141.
- [13] L. Fallani, C. Fort, N. Piovella, M. Cola, F. S. Cataliotti, M. Inguscio, and R. Bonifacia, *Phys. Rev. A* **71** (2005), 033612.
- [14] C. Fermanian-Kammerer and P. Gérard, *Ann. Inst. H. Poincaré* **4** (2003), 513.
- [15] T. Fischer, P. Maunz, P. W. H. Pinkse, T. Puppe, and G. Rempe, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002), 163002.
- [16] C. C. Gerry and P. L. Knight, *Introductory Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).
- [17] F. Gesztesy, A. Kiselev, and K. A. Makarov, *Math. Nachr.* **239/240** (2002), 103.
- [18] G. A. Hagedorn, *Molecular propagation through electron energy level crossings*. Mem. AMS. **111** No.536, 1994.
- [19] S. Haroche and J.-M. Raimond, *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities, and Photons* (Oxford University Press, Oxford, 2006).
- [20] M. Hirokawa, *Rev. Math. Phys.* **13** (2001), 221-251.
- [21] _____, *Phys. Lett. A* **294** (2002), 13.
- [22] _____, *The Dicke-type crossings among eigenvalues of differential operators in a class of non-commutative oscillators*, to appear in *Indiana Univ. Math. J.* (<http://www.iujm.indiana.edu/IUMJ/forthcoming.php>).
- [23] _____, *Phys. Rev. A* **79** (2009), 043408.
- [24] C. J. Hood, M. S. Chapman, T. W. Lynn, and H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998), 4157.
- [25] C. J. Hood, T. W. Lynn, A. C. Doherty, A. S. Parkins, and H. J. Kimble, *Science* **287** (2000), 1447.
- [26] P. Horak, G. Hechenblaikner, K. M. Gheri, H. Stecher, and H. Ritsch, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997), 4974.
- [27] T. Ichinose and M. Wakayama, *Commun. Math. Phys.* **256** (2005), 697.

- [28] _____, Rep. Math. Phys. **59** (2007), 421.
- [29] S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, J. Steger, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, Science **285** (1999), 571.
- [30] W. Ketterle, Rev. Mod. Phys. **74** (2002), 1131.
- [31] H. Mabuchi and A. C. Doherty, Science **298** (2002), 1372.
- [32] Yu. Makhilin, G. Schön, and A. Shnirman, Rev. Mod. Phys. **73** (2001), 357.
- [33] P. Maunz, T. Puppe, I. Schuster, N. Syassen, P. W. H. Pinkse, and G. Rempe, Nature (London) **428** (2004), 50.
- [34] P. Maunz, T. Puppe, I. Schuster, N. Syassen, P. W. H. Pinkse, and G. Rempe, Phys. Rev. Lett. **94** (2005), 033002.
- [35] J. McKeever, A. Boca, A. D. Boozer, J. R. Buck, and H. J. Kimble, Nature **425** (2003), 268.
- [36] H. J. Metcalf and P. van der Straten, *Laser Cooling and Trapping* (Springer-Verlag, New York, 1999).
- [37] 中村 泰信, 日本物理学会誌 **57** (2002), 797.
- [38] K. Nagatou, M. T. Nakao, and M. Wakayama, Numer. Funct. Anal. Optim. **23** (2003), 633.
- [39] W. Neuhauser, M. Hohenstatt, P. E. Toschek, and H. Dehmelt, Phys. Rev. A **22** (1980), 1137.
- [40] A. Parmeggiani, Kyushu J. Math. **58** (2004), 277.
- [41] _____. *Introduction to the Spectral Theory of Non-Commutative Harmonic Oscillators*, COE Lecture Note **8**, Kyushu University, 2008.
- [42] A. Parmeggiani and M. Wakayama, *Non-commutative harmonic oscillators I*, Forum Math. **14** (2002), 539.
Corrigenda and remarks to “Non-commutative harmonic oscillators I.”
ibid. **15** (2003), 955.
- [43] _____. Forum Math. **14** (2002), 669.
- [44] J.-S. Peng and G. X. Li, *Introduction to Modern Quantum Optics* (World Scientific, Singapore, 1998).
- [45] G. Preparata, *QED Coherence in Matter* (World Scientific, Singapore, 1995).

- [46] J. V. Pulé, A. F. Verbeure, and V. A. Zagreblov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** (2005), 5173.
- [47] J. V. Pulé, A. F. Verbeure, and V. A. Zagreblov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004), L321.
- [48] J. V. Pulé, A. F. Verbeure, and V. A. Zagreblov, *J. Stat. Phys.* **119** (2005), 309.
- [49] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.* **75** (2001), 565.
- [50] D. Schneble, Y. Torii, M. Boyd, E. W. Streed, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, *Science* **300** (2003), 475.
- [51] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge Univ. Press, 2006).
- [52] 仙場 浩一, *日本物理学会誌* **64** (2009), 37.
- [53] J. Stenger, S. Inouye, D. M. Stamper-Kurn, A. P. Chikkatur, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, *Appl. Phys. B* **69** (1999), 347.