

2 元 3 次形式の空間に付随するゼータ関数の間の関係式

神戸大学大学院理学研究科 谷口隆 (Takashi Taniguchi)

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kobe University

概要

2 元 3 次形式の空間に付随するゼータ関数は、概均質ベクトル空間のゼータ関数の本質的な初めての例として、1970 年頃に新谷卓郎氏により導入された。1995 年頃になって、大野泰生氏は、ゼータ関数の係数表を書き出すことで、これらの間に極めて簡単な関係式があることを予想した。これは中川仁氏によって証明された。本稿では、これらの結果の紹介と、この関係式の類似についての、大野泰生氏・若槻聡氏との共同研究の解説を行う。また関連する話題、特に類体論との関係についても触れる。

1 主定理

まず大野泰生氏・若槻聡氏との共同研究 [OTW], [OT] によって得られた定理の紹介から始める。 $V(\mathbb{Q})$ を有理数体 \mathbb{Q} 上の 2 変数 3 次形式のなすベクトル空間とする：

$$V(\mathbb{Q}) := \{x(u, v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}.$$

本稿では $V(\mathbb{Q})$ の元を $x = x(u, v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3$ と表す。 $V(\mathbb{Q})$ と \mathbb{Q}^4 を、 $V(\mathbb{Q}) \ni x \mapsto (a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4$ によって同一視し、 $x = (a, b, c, d)$ と表す。 $x \in V(\mathbb{Q})$ の判別式は

$$P(x) := b^2c^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2$$

となる。 $V(\mathbb{Q})$ には $G(\mathbb{Q}) := \text{GL}_2(\mathbb{Q})$ による次の “twist された作用” を考える：

$$g \cdot x(u, v) = \frac{1}{\det g} \cdot x(pu + rv, qu + sv), \quad x \in V(\mathbb{Q}), \quad g = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in G(\mathbb{Q}).$$

このとき $P(gx) = (\det g)^2 P(x)$ が成り立つ。 $\Gamma := \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ と表す。 Γ -不変な格子の分類 [OTW] を思い出しておく。 $V(\mathbb{Q})$ の格子を以下のように定める：

$$L_1 := \{x \in V(\mathbb{Q}) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}^4, \quad L_1^\vee := \{x \in V(\mathbb{Q}) \mid a, d \in \mathbb{Z}, b, c \in 3\mathbb{Z}\},$$

$$L_2 := \{(a, b, c, d) \in L_1 \mid a + b + d, a + c + d \in 2\mathbb{Z}\},$$

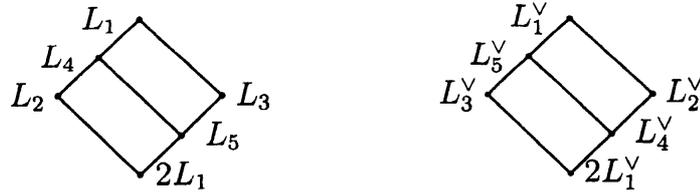
$$L_3 := \{(a, b, c, d) \in L_1 \mid a + b + c, b + c + d \in 2\mathbb{Z}\},$$

$$L_4 := \{(a, b, c, d) \in L_1 \mid b + c \in 2\mathbb{Z}\},$$

$$L_5 := \{(a, b, c, d) \in L_1 \mid a, d, b + c \in 2\mathbb{Z}\},$$

$$L_2^\vee := L_1^\vee \cap L_3, \quad L_3^\vee := L_1^\vee \cap L_2, \quad L_4^\vee := L_1^\vee \cap L_5, \quad L_5^\vee := L_1^\vee \cap L_4.$$

包含関係を図に示すと次のようになる。



\mathbb{Q}^\times -倍を除き, Γ 不変な格子はこれらで尽くされることが示される. $x \in V(\mathbb{Q})$ に対し, $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma x = x\}$ とおき, $\#\Gamma_x$ でその位数を表す. これは 1 か 3 のいずれかである. 以上の準備のもとで, ゼータ関数は次のように定義される. $x \in L_i^\vee$ のときは $P(x)$ は 27 の倍数となることに注意.

定義 1 (新谷 [Sh]) $1 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq 2$ について,

$$\xi_{i,j}(s) := \sum_{\substack{x \in \Gamma \setminus L_i \\ (-1)^{j-1} P(x) > 0}} \frac{(\#\Gamma_x)^{-1}}{|P(x)|^s}, \quad \xi_i(s) := (\xi_{i,1}(s), \xi_{i,2}(s)),$$

$$\xi_{i,j}^\vee(s) := \sum_{\substack{x \in \Gamma \setminus L_i^\vee \\ (-1)^{j-1} P(x) > 0}} \frac{(\#\Gamma_x)^{-1}}{|P(x)/27|^s}, \quad \xi_i^\vee(s) := (\xi_{i,1}^\vee(s), \xi_{i,2}^\vee(s))$$

と定め, L_i または L_i^\vee に付随するゼータ関数と呼ぶ.

$\xi_i(s), \xi_i^\vee(s)$ はベクトル値であることに注意しよう. このゼータ関数は概均質ベクトル空間のゼータ関数 [SS] の具体例として, 新谷氏 [Sh] によって導入された. 新谷 [Sh] により, これらのゼータ関数は $s = 1, 5/6$ での一位の極を除き全複素平面に正則に解析接続され, $\xi_i(1-s) = \xi_i^\vee(s) M_i(s)$ の形の関数等式を持つことが示された. ここに $M_i(s)$ は行列値の Γ -因子である. Γ 関数と指数関数の積によって表されることは一般のゼータ関数と同様だが, Γ 関数の部分が $\Gamma(s)^2 \Gamma(2-1/6) \Gamma(s+1/6)$ であり, 通常見かけない形であることは大きな特徴の一つである. ($s = 5/6$ に極があることも珍しいと言えるだろう. この留数もなかなか不思議な値である.) $M_i(s)$ 及び留数の明示公式などは 2 節を参照されたい.

以下の $\xi_1(s)$ と $\xi_1^\vee(s)$ の間の極めて簡単な関係式は係数表をもとに大野泰生氏 [O] によって予想され, 中川仁氏 [N1] によって証明された.

定理 2 (予想 [O], 証明 [N1])

$$\xi_1^\vee(s) = \xi_1(s) A, \quad \text{ここに } A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

本稿では, このような関係式を仮に代数的関数等式と呼ぶ. これに対し, 新谷氏によって証明された通常関数等式 $\xi_i(1-s) = \xi_i^\vee(s) M_i(s)$ を解析的関数等式と呼ぶことにする. 今回の主結果は, $2 \leq i \leq 5$ についての以下の代数的関数等式である.

定理 3 (主定理-代数的関数等式 [OTW],[OT]) (1) $i = 2, 3$ に対し

$$\xi_2^\vee(s) = \xi_2(s)A, \quad \xi_3^\vee(s) = \xi_3(s)A.$$

(2) $i = 4, 5$ に対し

$$\begin{aligned} \theta(s) &:= \xi_1(s) - 2\xi_3(s) - \xi_4(s) + 4\xi_5(s), \\ \eta(s) &:= \xi_4(s) - \xi_2(s) - \xi_5(s) + 2^{1-4s}\xi_1(s), \\ \theta^\vee(s) &:= \xi_5^\vee(s) - \xi_3^\vee(s) - \xi_4^\vee(s) + 2^{1-4s}\xi_1^\vee(s), \\ \eta^\vee(s) &:= \xi_1^\vee(s) - 2\xi_2^\vee(s) - \xi_5^\vee(s) + 4\xi_4^\vee(s) \end{aligned}$$

とおくと次が成り立つ.

$$\theta^\vee(s) = 2^{-2s}\theta(s)A, \quad \eta^\vee(s) = 2^{2s}\eta(s)A.$$

任意の $SL_2(\mathbb{Z})$ -不変な格子に付随するゼータ関数は、この意味で代数的関数等式を満たすのである。中川氏の定理 2 の証明は精巧で複雑だったが、定理 3 はその定理 2 に帰着することで証明される。

代数的関数等式の重要な応用として、解析的関数等式 $\xi_i(1-s) = \xi_i^\vee(s)M_i(s)$ を次のように自己双対的な形に書きなおすことができる。 $\gamma_\pm(s)$ を

$$\begin{aligned} \gamma_+(s) &:= \frac{2^s 3^{3s/2}}{\pi^{2s}} \Gamma(s) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{12}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{12}\right), \\ \gamma_-(s) &:= \frac{2^s 3^{3s/2}}{\pi^{2s}} \Gamma(s) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{5}{12}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{7}{12}\right) \end{aligned}$$

とし、各符号 \pm について、完備化されたゼータ関数を以下で定めよう。

$$\begin{aligned} \Lambda_{i,\pm}(s) &:= 2^{a_i s} \gamma_\pm(s) \left(\sqrt{3} \xi_{i,1}(s) \pm \xi_{i,2}(s) \right), & i = 1, 2, 3, \\ \Theta_\pm(s) &:= 2^s \gamma_\pm(s) \left(\sqrt{3} \theta_1(s) \pm \theta_2(s) \right), \\ H_\pm(s) &:= 2^{3s} \gamma_\pm(s) \left(\sqrt{3} \eta_1(s) \pm \eta_2(s) \right). \end{aligned}$$

ただし $a_1 = 0, a_2 = a_3 = 2$ とし、また $\theta(s) = (\theta_1(s), \theta_2(s)), \eta(s) = (\eta_1(s), \eta_2(s))$ とする。定理 2, 3 を新谷の関数等式に適用すると、関数等式は以下のように書き直される。

定理 4 (関数等式の自己双対化) 各符号に対し

$$\begin{aligned} \Lambda_{i,\pm}(s) &= \Lambda_{i,\pm}(1-s), \quad (i = 1, 2, 3), \\ \Theta_\pm(s) &= \Theta_\pm(1-s), \quad H_\pm(s) = H_\pm(1-s). \end{aligned}$$

この意味で、 $SL_2(\mathbb{Z})$ -不変な格子に対しては、付随するゼータ関数は必ず自己双対的な関数等式をみたすことが分かる。

本稿では、2 節で、新谷 [Sh] によって明らかにされたゼータ関数の解析的性質について復習し、3 節で、定理 3 を定理 2 に帰着する方針について簡単に説明する。4 では、中

川氏 [N1] によって明らかになった代数的関数等式と類体論の関係について述べ、特に 3 元 2 次形式のペアの空間について触れる。

謝辞. 今回の研究に関して、有益な助言をいただいた伊吹山知義氏, Don Zagier 氏, Manjul Bhargava 氏に感謝します。また、ゼータ関数の係数表を計算する C++ プログラムを書いていただいた阿部紀行氏にも感謝します。

2 ゼータ関数の解析的性質

ゼータ関数の解析的性質は新谷氏 [Sh] によって明らかにされた。[Sh] では主に $i = 1$ の場合が扱われているが、一般の $1 \leq i \leq 5$ でも同様の方法で計算ができ、次が成立する。

定理 5 (1) ゼータ関数 $\xi_{i,j}(s)$, $\xi_{i,j}^\vee(s)$ は $s = 1, 5/6$ での一位の極を除き、全平面に正則に解析接続される。さらに、次の関数等式をみたとす。

$$\xi_i(1-s) = 2^{2a_i s} [L_1 : L_i]^{-1} \xi_i^\vee(s) M(s),$$

ただし $a_1 = 0, a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1$ とし、 $M(s)$ は以下の 2×2 行列である。

$$M(s) := \frac{3^{3s-2}}{2\pi^{4s}} \Gamma(s)^2 \Gamma(s - \frac{1}{6}) \Gamma(s + \frac{1}{6}) \begin{pmatrix} \sin 2\pi s & 3 \sin \pi s \\ \sin \pi s & \sin 2\pi s \end{pmatrix}.$$

(2) 定数 α, β を

$$\alpha := \frac{\pi^2}{9}, \quad \beta := \frac{3^{1/2}(2\pi)^{1/3}}{18} \zeta\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^{-1},$$

と定めると、ゼータ関数のそれぞれの留数

$$\alpha_{i,j} := \operatorname{Res}_{s=1} \xi_{i,j}(s), \quad \beta_{i,j} := \operatorname{Res}_{s=5/6} \xi_{i,j}(s), \quad \alpha_{i,j}^\vee := \operatorname{Res}_{s=1} \xi_{i,j}^\vee(s), \quad \beta_{i,j}^\vee := \operatorname{Res}_{s=5/6} \xi_{i,j}^\vee(s),$$

の値は以下の表のようになる。

i	1	2	3	4	5	i	1	2	3	4	5
$\alpha_{i,1}$	α	$\frac{\alpha}{4}$	$\frac{\alpha}{4}$	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{7}{32}\alpha$	$\alpha_{i,1}^\vee$	$\frac{3}{2}\alpha$	$\frac{3}{8}\alpha$	$\frac{3}{8}\alpha$	$\frac{9}{32}\alpha$	$\frac{3}{4}\alpha$
$\beta_{i,1}$	β	$\frac{\beta}{4}$	$\frac{\beta}{4}$	$\frac{\beta}{2}$	$\frac{\beta}{4\sqrt[3]{2}}$	$\beta_{i,1}^\vee$	$\sqrt{3}\beta$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\beta$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\beta$	$\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{2}}\beta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\beta$
$\alpha_{i,2}$	$\frac{3}{2}\alpha$	$\frac{3}{8}\alpha$	$\frac{3}{8}\alpha$	$\frac{3}{4}\alpha$	$\frac{9}{32}\alpha$	$\alpha_{i,2}^\vee$	3α	$\frac{3}{4}\alpha$	$\frac{3}{4}\alpha$	$\frac{15}{32}\alpha$	$\frac{3}{2}\alpha$
$\beta_{i,2}$	$\sqrt{3}\beta$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\beta$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\beta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\beta$	$\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{2}}\beta$	$\beta_{i,2}^\vee$	3β	$\frac{3}{4}\beta$	$\frac{3}{4}\beta$	$\frac{3}{4\sqrt[3]{2}}\beta$	$\frac{3}{2}\beta$

この証明について簡単に述べる．ゼータ関数の解析的性質を調べるためには積分表示が出発点になるが， $\xi_i(s)$ の場合，それは

$$Z(\Phi_\infty, L_i, s) = \int_{G(\mathbb{R})/G(\mathbb{Z})} |\det g|^s \sum_{x \in L_i, P(x) \neq 0} \Phi_\infty(gx) dg$$

になる．ただし Φ_∞ は $V(\mathbb{R})$ の急減少関数であり， dg は $G(\mathbb{R})$ の不変測度である．Archimedean 因子 $\Gamma(\Phi_\infty, s)$ を

$$\Gamma(\Phi_\infty, s) := \left(\int_{x \in V(\mathbb{R}), P(x) > 0} |P(x)|^s \Phi_\infty(x) dx \right) \left(\int_{x \in V(\mathbb{R}), P(x) < 0} |P(x)|^s \Phi_\infty(x) dx \right)$$

とおく． dx は $V(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$ の Lebesgue 測度である．通常の “unfolding” のテクニックによって (適切な dg の正規化のもとで) 次の $\xi_i(s)$ の積分表示を得る．

$$Z(\Phi_\infty, L_i, s) = \xi_i(s) \Gamma(\Phi_\infty, s)$$

このことから， $\xi_i(s)$ の研究は $Z(\Phi_\infty, L_i, s)$ と $\Gamma(\Phi_\infty, s)$ の研究に帰着する． $Z(L_i, s)$ に関しては，調和解析 (特に Poisson の和公式) によって

$$Z(\Phi_\infty, L_i, 1-s) = [L_1; L_i]^{-1} 2^{2a_i s} Z(\widehat{\Phi}_\infty, L_i^\vee, s)$$

が分かる．一方， $\Gamma(s)$ に関しては，概均質ベクトル空間の理論によって，

$$\Gamma(\Phi_\infty, 1-s) = M(s) \Gamma(\widehat{\Phi}_\infty, s)$$

なる関数等式が導かれる．これから ξ_i, ξ_i^\vee の間の関数等式が得られる．また積分 $Z(\Phi, s)$ の主要部の緻密な計算から，留数の値も計算できる．詳細は [Sh] を参照されたい．

このように一般の i で $\xi_i(s), \xi_i^\vee(s)$ を調べるには，ゼータ関数をアデール化しておくことと便利である．アデール化した大域理論は Wright 氏 [W] によってなされた．これについて簡単に述べよう． \mathbb{A} を \mathbb{Q} のアデール環とすると大域ゼータ関数は次で与えられる．

$$Z^*(\Phi, s) := \int_{G(\mathbb{A})/G(\mathbb{Q})} |\det g|_{\mathbb{A}}^{2s} \sum_{x \in V(\mathbb{Q}), P(x) \neq 0} \Phi(gx) dg$$

ここに Φ は $V(\mathbb{A})$ 上の Schwartz-Bruhat 関数である． $\mathbb{A}_f = \widehat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$ を \mathbb{Q} の有限アデール環とし， $V(\mathbb{A}_f)$ 上の Schwartz-Bruhat 関数 $\Phi_{f,i}$ を $L_i \otimes \widehat{\mathbb{Z}}$ の定義関数とする．すると，適切な測度の正規化のもとで (具体的には $G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{R}) \times G(\mathbb{A}_f)$ の測度を， $G(\mathbb{A}_f)$ の極大開コンパクト部分群 $G(\widehat{\mathbb{Z}})$ の測度が 1 となる測度と $G(\mathbb{R})$ との直積測度と取る)

$$Z^*(\Phi_\infty \otimes \Phi_{f,i}, s) = Z(\Phi_\infty, L_i, s)$$

が成り立つ．したがってアデール化したゼータ関数 $Z^*(\Phi, s)$ は $Z(\Phi_\infty, L_i, s)$ を含む．

ゼータ関数をアデール化するメリットとしては，異なる L_i に対する計算を統一的に行いやすいことや，大域的な問題と局所的な問題を系統的に分離して扱えることが挙げられる．この恩恵は，Dirichlet 指標で捻った L 関数を考えるときや，一般の代数体でゼータ関数を扱うときにはより大きなものとなる．岩澤-Tate のときと状況は同じである．

3 主定理の証明

定理3を定理2に帰着する方針について述べよう. $l, N \in \mathbb{Z}$ に対し

$$L_1^{\equiv l(N)} := \{x \in L_1 \mid P(x) \equiv l(N)\}, \quad (L_1^\vee)^{\cong l(N)} := \{x \in L_1^\vee \mid P(x)/27 \equiv l(N)\}.$$

とおく. するとまず $i = 2, 3$ のときは L_i, L_i^\vee について次が成り立つ.

命題 6 ([OTW] Propositions 3.5, 3.7)

$$\begin{aligned} L_2 &= 2L_1 \amalg L_1^{\equiv 5(8)}, & L_3 &= 2L_1 \amalg L_1^{\equiv 1(8)}, \\ L_2^\vee &= 2L_1^\vee \amalg (L_1^\vee)^{\cong 3(8)}, & L_3^\vee &= 2L_1^\vee \amalg (L_1^\vee)^{\cong 7(8)}. \end{aligned}$$

このことより, $i = 2, 3$ に対する $\xi_i(s)$ は ξ_1 とその部分ゼータ関数

$$\xi_{1,j}^{\equiv l(N)}(s) = \sum_{\substack{x \in \Gamma \setminus L_1^{\equiv l(N)} \\ (-1)^{j-1} P(x) > 0}} \frac{(\#G_{\mathbb{Z},x}^1)^{-1}}{|P(x)|^s}, \quad \xi_1^{\equiv l(N)}(s) = (\xi_{1,1}^{\equiv l(N)}(s), \xi_{1,2}^{\equiv l(N)}(s)).$$

を用いて, 例えば $\xi_2(s) = 2^{-4s}\xi_1(s) + \xi_1^{\equiv 5(8)}(s)$ のように表される. $\xi_i^\vee(s)$ についても同様である. 定理2の公式 $\xi_1(s) = \xi_1^\vee(s)A$ は部分ゼータ関数の等式 $\xi_1^{\vee \cong l(N)}(s) = \xi_1^{\equiv -l(N)}(s)A$ を導くことに注意しよう. $l \bmod N$ が $-l \bmod N$ に変わるのは, A が正の判別式と負の判別式を入れ替えるからである. したがって命題6を用いると

$$\begin{aligned} \xi_2^\vee(s) &= 2^{-4s}\xi_1^\vee(s) + \xi_1^{\vee \cong 3(8)}(s) = 2^{-4s}\xi_1(s)A + \xi_1^{\equiv 5(8)}(s)A = \xi_2(s)A, \\ \xi_3^\vee(s) &= 2^{-4s}\xi_1^\vee(s) + \xi_1^{\vee \cong 7(8)}(s) = 2^{-4s}\xi_1(s)A + \xi_1^{\equiv 1(8)}(s)A = \xi_3(s)A. \end{aligned}$$

となり, 定理3(1)は定理2からしたがう. 命題6自体は, 判別式 $P(x)$ の合同条件と係数 a, b, c, d の合同条件の関係を調べることで示される.

$i = 4, 5$ に対しても L_i を $L_1^{\equiv l(N)}$ を用いて表すことができれば, 代数的関数等式が得られるが, そのような表示はない. 実際には次の関係式が成立する. なお, $\xi_i(s)$ や $\xi_1^{\equiv l(N)}(s)$ などの式で s を省略して $\xi_i, \xi_1^{\equiv l(N)}$ などと書いた.

命題 7 ([OT] Theorem 3.8)

$$\begin{aligned} \xi_1^{\equiv 4(32)} &= 3 \cdot 2^{-2s}(\xi_5 - 2^{-4s}\xi_1), \\ (\xi_1^\vee)^{\cong -20(32)} &= 3 \cdot 2^{-2s}(\xi_4^\vee - 2^{-4s}\xi_1^\vee), \\ \xi_1^{\equiv 20(32)} &= (\xi_4 - \xi_2 - \xi_5 + 2^{1-4s}\xi_1) + 2^{-4s}(\xi_1 - \xi_4 - 2\xi_3 + 4\xi_5) \\ &\quad - 2^{-2s}(\xi_1 - \xi_3 - 2\xi_2 + 5 \cdot 2^{-4s}\xi_1), \\ (\xi_1^\vee)^{\cong -4(32)} &= (\xi_5^\vee - \xi_3^\vee - \xi_4^\vee + 2^{1-4s}\xi_1^\vee) + 2^{-4s}(\xi_1^\vee - \xi_5^\vee - 2\xi_2^\vee + 4\xi_4^\vee) \\ &\quad - 2^{-2s}(\xi_1^\vee - \xi_2^\vee - 2\xi_3^\vee + 5 \cdot 2^{-4s}\xi_1^\vee). \end{aligned}$$

この証明はやや複雑であり，証明の途中で合同部分群

$$\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2} \right\},$$

などが自然に現れる．詳細は [OT] を参照されたい．命題 7 を用いれば，同様の計算によって定理 2 から定理 3 (2) が導かれる．

関数等式の自己双対化は，定理 5 (1) の右辺に，定理 2, 3 を代入して計算することで証明される．具体的には，

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} \gamma_+(s) & 0 \\ 0 & \gamma_-(s) \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

とおくと， $M(s) \cdot T \cdot \gamma(1-s) = A^{-1} \cdot T \cdot \gamma(s)$ が分かる．この $M(s)$ の対角化は Datskovsky-Wright [DW] による．よって例えば $i=1$ なら $\xi_1(1-s) \cdot T \cdot \gamma(1-s) = \xi_1(s) \cdot T \cdot \gamma(s)$ が得られる．これは $\Lambda_{1,\pm}(1-s) = \Lambda_{1,\pm}(s)$ に他ならない．他の場合も同様．

4 類体論との関係

まず，中川氏による証明 [N1] について簡単に触れておこう．中川氏は，ゼータ関数 $\xi_1(s)$ と $\xi_1^\vee(s)$ の各係数を直接比較し，それらが一致することを示した．それは純代数的な方法であり，類体論が用いられる．一方の軌道の集合 $\Gamma \backslash L_1$ は，Delone-Faddeev 対応と呼ばれる \mathbb{Z} 上の 3 次環の同形類のなす集合との自然な対応がある．ただし \mathbb{Z} 上の 3 次環とは，単位的可換環であって， \mathbb{Z} 加群として階数 3 の自由加群であるもののことを言う．3 次体の整数環や整環がその例である．また，もう一方の軌道の集合 $\Gamma \backslash L_1^\vee$ は，Hessian による 2 元 2 次形式の空間への同変写像を通して，2 次環のイデアル類群の 3-torsion の集合と対応する．各判別式ごとにこれらの個数が一致することを，類体論を用いて示すのが [N1] における基本的な証明方針である．実際には極大整環とは限らない環を扱うのでかなり緻密で複雑な議論が必要となる．

このように類体論と関わる概均質ベクトル空間は，2 元 3 次形式の空間 $\mathrm{Sym}^3 \mathbb{Q}^2$ 以外にもあることが明らかになっている．その最も典型的な場合が，3 元 2 次形式のペアの空間

$$G(\mathbb{Q}) = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}), \quad V(\mathbb{Q}) = \mathrm{Sym}^2 \mathbb{Q}^3 \otimes \mathbb{Q}^2$$

である．これは 4 次拡大の族を記述する空間だが，整軌道を考えると， $G(\mathbb{Z}) \backslash V(\mathbb{Z})$ は 4 次環を分類し，また $G(\mathbb{Z}) \backslash V(\mathbb{Z})^\vee$ は 3 次環の 2-torsion の集合と対応する．このような整軌道の数論的解釈は Wright-雪江 [WY] の仕事を引き継いで，近年 Bhargava の高次合成則 (Higher Composition Laws) の理論として結実した．このうち上記の 3 元 2 次形式の対の空間については，[B] で扱われている． $G(\mathbb{Z}) \backslash V(\mathbb{Z})$ については，中川氏 [N3] によっても独立に結果が得られている．

このことから，3 元 2 次形式の対の空間に付随するゼータ関数についても，定理 2 と類似の代数的関数等式が成り立つことは相当に確からしいと考えられている．中川氏はこの場合についても，多くの係数について，その予想が正しいことを確かめている ([N2]).

現在のところ，定理 2 は (したがって定理 3 も) 類体論が唯一の解釈である．これらの代数的関数等式の解析的な証明があるか，あるいは代数的としても類体論を用いない証明があるか，などは興味深い問題であると思われる．

参考文献

- [B] M. Bhargava. Higher composition laws II: On cubic analogues of gauss composition. *Ann. Math.*, 159:865–886, 2004; III: The parametrization of quartic rings. *Ann. Math.*, 159:1329–1360, 2004.
- [DW] B. Datskovsky and D.J. Wright. The adelic zeta function associated with the space of binary cubic forms II: Local theory. *J. Reine Angew. Math.*, 367:27–75, 1986.
- [N1] J. Nakagawa. On the relations among the class numbers of binary cubic forms. *Invent. Math.*, 134:101–138, 1998.
- [N2] J. Nakagawa. 3元2次形式のペアのなす概均質ベクトル空間のゼータ関数について, a note in Japanese.
- [N3] J. Nakagawa. Orders of quartic fields and pairs of ternary quadratic forms. preprint.
- [O] Y. Ohno. A conjecture on coincidence among the zeta functions associated with the space of binary cubic forms. *Amer. J. Math.*, 119:1083–1094, 1997.
- [OT] Y. Ohno and T. Taniguchi. Relations among Dirichlet series whose coefficients are class numbers of binary cubic forms II. preprint, 2009.
- [OTW] Y. Ohno, T. Taniguchi, and S. Wakatsuki. Relations among Dirichlet series whose coefficients are class numbers of binary cubic forms. *Amer. J. Math.* to appear.
- [SS] M. Sato and T. Shintani. On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces. *Ann. of Math.*, 100:131–170, 1974.
- [Sh] T. Shintani. On Dirichlet series whose coefficients are class-numbers of integral binary cubic forms. *J. Math. Soc. Japan*, 24:132–188, 1972.
- [W] D.J. Wright. The adelic zeta function associated to the space of binary cubic forms part I: Global theory. *Math. Ann.*, 270:503–534, 1985.
- [WY] D.J. Wright and A. Yukié. Prehomogeneous vector spaces and field extensions. *Invent. Math.*, 110:283–314, 1992.

神戸市灘区六甲台町 1-1 神戸大学大学院理学研究科
e-mail: tani@math.kobe-u.ac.jp