数理解析研究所講究録
第 1662 巻 2009 年 218-230

General Schlesinger systems and their hypergeometric type solutions

木村弘信 (Hironobu Kimura)・熊本大学自然科学研究科

1 はじめに

$(t_1,\dots,t_N)\in\mathbb{C}^N$ を独立変数とする非線型微分方程式

$$dB_j=\sum_{i(\neq j)}[B_i,B_j]d\log(t_i-t_j),\quad B_i\in\mathrm{Mat}_r(\mathbb{C}) \tag{1}$$

は，$\mathbb{P}^1$ 上の Fuchs 型線形方程式

$$\frac{\partial y}{\partial\zeta}=\sum_{j=1}^{N}\frac{B_j(t)}{\zeta-t_j}y \tag{2}$$

のモノドロミー保存変形を記述する方程式として，1912 年に L. Schlesinger によって得られた．いわゆる Schlesinger 系である．ここで $B_0:=-B_1-\cdots-B_N$ は確定特異点 $\zeta=\infty$ における一位の極の係数行列である．Schlesinger 方程式 (1) は，線形方程式 (2) と

$$\frac{\partial y}{\partial t_j}=-\frac{B_j(t)}{\zeta-t_j}y \tag{3}$$

との両立条件として得られる．特に，$N=3,r=2$ の場合を考え， $t_1=0,t_2=1,t_3=t$ とおくと，Schlesinger 系 (1) は

$$\frac{dB_1}{dt}=\frac{[B_3,B_1]}{t},\quad \frac{dB_2}{dt}=\frac{[B_3,B_2]}{t-1},$$
$$\frac{dB_3}{dt}=\frac{[B_1,B_3]}{t}+\frac{[B_2,B_3]}{t-1}$$

と表され，さらに第一積分を用いた reduction を行うことによって，Painlevé 方程式 P_6 に帰着することが知られている．(2), (3) に相当する線形方程式は，$\zeta=0,1,t,\infty$ に確定特異点をもつ

$$\frac{\partial y}{\partial\zeta}=\left(\frac{B_1(t)}{\zeta}+\frac{B_2(t)}{\zeta-1}+\frac{B_3(t)}{\zeta-t}\right)y,\quad \frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{B_3(t)}{\zeta-t}y \tag{4}$$

である．P_6 には，その仲間として退化した方程式

$$\begin{array}{ccccc} & & P_3 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ P_6\longrightarrow P_5 & & & & P_2(\longrightarrow P_1) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & P_4 & & \end{array} \tag{5}$$

がある．これらは Fuchs 型方程式 (4) から特異点の合流によって得られる不確定特異点を持つ線形方程式の（広い意味の） monodromy 保存変形を記述している．特異点が n 位の極を持つとき，この特異点に自然数 n を対応させることにすると，P_6, P_5, P_4, P_3, P_2 には 4 の分割で極の位数が指定された線形方程式が対応する：

$$
\begin{tikzcd}
 & & (2,2) \arrow[dr] & \\
(1,1,1,1) \arrow[r] & (2,1,1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (4). \\
 & & (3,1) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\tag{6}
$$

それぞれの場合に線形方程式がどのような形になるかは，実際に合流をやってみなければ分からない．変形を記述する変数 t が，どのように方程式に入るかが良く分からないからである．したがって，一般の N に対して同様のことを考えることは，このままでは困難である．

ここでは，Mason と Woodhouse による Twistor 理論からのアプローチを用いて，これらの点を明確にする．具体的には，以下のことを論じる．

- Grassmann 多様体 $G_{2,N+1}(\mathbb{C})$ の適当な開集合上で定義された一般化反自己双対 Yang-Mills 方程式（接続）で，$N+1$ の分割で指定される $\mathrm{PGL}_{N+1}(\mathbb{C})$ の極大可換部分群によって不変なものを考えることにより，モノドロミー保存変形を記述する線形方程式（(2)，(3) に対応するもの）を与える．この方程式達の両立条件として得られる非線型方程式を一般 Schlesinger 系（GSS）と呼ぶ．

- Twistor 理論における Ward Ansatz 解の構成を用いて，$r = 2$ の場合に，Grassmann 多様体上の一般超幾何関数 [3] を成分とする Hankel 行列式で表される一連の GSS の特殊解を与える．

- 構成した特殊解を同じタイプの特殊解に移す Bäcklund 変換を構成する．

上記について，いくつかコメントしておく．

1. 最初の問題については，Mason と Woodhouse が [4] においてそのアイデアを与えている．そこでは古典的な Schlesinger 系の場合に計算が行われているが，$P_2, \ldots, P_5$ のような退化した場合は $N+1 \geq 5$ のときには扱われていない．$N+1 = 5$ のときには，5 のすべての分割に対する場合の計算が Kawamuko と Nitta [2] によって行われている．

2. 特殊解については，Painlevé 方程式の場合に Masuda [5, 6], Shah と Woodhouse [8] の結果がある．[7] も参照．2008 年 6 月の東京大学での研究集会における Woodhouse の講演で，Ward Ansatz 解に関する論文 [8] と同様のことが一般の場合にもできるとのコメントがあったが，詳細は不明．

2 GASDYMとモノドロミー保存変形

2.1 GASDYM

$G_{2,N+1}(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}^{N+1}$ の 2 次元部分空間全体からなる Grassmann 多様体とする．$G_{2,N+1}(\mathbb{C})$ の元を指定するには， $z \in \mathrm{Mat}_{2,N+1}(\mathbb{C})$ で $\mathrm{rank}\, z = 2$ であるものを取って $z = \begin{pmatrix} \vec{z}_0 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$ と表わし，$\vec{z}_0, \vec{z}_1$ が $\mathbb{C}^{N+1}$ において張る 2 次元部分空間 $\langle \vec{z}_0, \vec{z}_1 \rangle$ を考えれば良い．$\vec{z}_0, \vec{z}_1$ が 2 次元部分空間の基底であるが，任意の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ をとって gz を考えると， gz も z と同じ $G_{2,N+1}(\mathbb{C})$ の元を定める．したがって

$$G_{2,N+1}(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \backslash \{ z \in \mathrm{Mat}_{2,N+1}(\mathbb{C}) \mid \mathrm{rank}\, z = 2 \}$$

である．以下，この対応により $G_{2,N+1}(\mathbb{C})$ と右辺の商空間を同一視する．$U \subset G_{2,N+1}(\mathbb{C})$ を一つの affine chart とする．たとえば

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \backslash \{ (z_0, z_1, \ldots, z_N) \in \mathrm{Mat}_{2,N+1}(\mathbb{C}) \mid \det(z_0, z_1) \neq 0 \}$$

はその一つである．この affine chart の座標としては

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_{02} & \ldots & z_{0N} \\ 0 & 1 & z_{12} & \ldots & z_{1N} \end{pmatrix} \right\} \simeq \mathbb{C}^{2(N-1)} \tag{7}$$

がとれる．

定義 2.1 開集合 $W \subset U$ 上の自明束 $W \times \mathbb{C}^r$ で定義された正則接続 D が一般化された反自己双対 *Yang Mills(GASDYM)* 接続であるとは，微分作用素

$$D = d + \sum_{i=0,1; j=2,\ldots,N} A_{ij}(z) dz_{ij} = \sum_{i,j} D_{ij} dz_{ij},$$

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial z_{ij}} + A_{ij}(z)$$

で

$$L_j = \zeta D_{0j} - D_{1j} \tag{8}$$

とおいたとき

$$[L_j, L_k] = 0, \quad (\forall j \neq k) \tag{9}$$

が任意の $\zeta \in \mathbb{C}$ について成り立つときをいう．

条件 (9) は

$$[D_{0j}, D_{0k}] = 0 \tag{10}$$

$$[D_{1j}, D_{1k}] = 0 \tag{11}$$

$$[D_{0j}, D_{1k}] + [D_{1j}, D_{0k}] = 0. \tag{12}$$

と表されることに注意する．これらは，接続行列 $A_{ij}(z)$ に対する非線型微分方程式で GASDYM 方程式と呼ばれる．$A_{ij}(z)$ は gauge potential とも呼ばれる．

Twistor 理論においては，次の double fibration が重要な役割を演じる．旗多様体

$$F_{1,2} = \{(v_1, v_2) \mid v_1 \subset v_2 \subset \mathbb{C}^{N+1} : \text{ subspace}, \dim v_i = i\}$$

を考え，さらに $F_i, (i = 1, 2)$ で $\mathbb{C}^{N+1}$ の i 次元部分空間全体からなる旗多様体を表す．$F_1 = \mathbb{P}^N(\mathbb{C}), F_2 = G_{2,N+1}(\mathbb{C})$ である．このとき double fibration

$$\begin{array}{ccc} & F_{1,2} & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ F_1 & & F_2 \end{array} \tag{13}$$

が

$$\pi_1((v_1, v_2)) = v_1, \quad \pi_2((v_1, v_2)) = v_2. \tag{14}$$

で定義される．GASDYM は $F_2 = G_{2,N+1}(\mathbb{C})$ において定義されている．F_1 は twistor 空間と呼ばれる．

2.2 群の作用

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の極大可換部分群

$$J(n) = \left\{ \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & h_1 \\ & & & h_0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

を n 次 Jordan 群という．さらに $N+1$ の分割 $\lambda = (n_1, \dots, n_\ell)$ に対して，$\mathrm{GL}_{N+1}(\mathbb{C})$ の極大可換部分群

$$\begin{aligned} H_\lambda := & \left\{ \begin{pmatrix} h^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & h^{(\ell)} \end{pmatrix} \mid h^{(k)} \in J(n_k)\ (k = 1, \dots, \ell) \right\} \\ \simeq & J(n_1) \times \dots \times J(n_\ell) \end{aligned} \tag{15}$$

を考える．以下，H_λ の元 h を $h = (h^{(1)}, \dots, h^{(\ell)})$ と表す．また $\bar{H}_\lambda$ で H_λ から定まる $\mathrm{PGL}_{N+1}(\mathbb{C})$ の部分群を表す．

分割 λ が与えられたとき，$Z_\lambda \subset \mathrm{Mat}_{2,N+1}(\mathbb{C})$ を次のように定める；$z \in Z_\lambda$ とは，これを

$$z = (z^{(1)}, \dots, z^{(\ell)}), \quad z^{(k)} = (z_0^{(k)}, \dots, z_{n_k-1}^{(k)}) \in \mathrm{Mat}_{2,n_k}(\mathbb{C})$$

と表したとき，条件

$$\begin{aligned} &\det(z_0^{(k)}, z_1^{(k)}) \neq 0,\ (n_k \geq 2), \\ &\det(z_0^{(k)}, z_0^{(k')}) \neq 0,\ (k \neq k') \end{aligned} \tag{16}$$

を満たすときをいう．

$U_\lambda = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\backslash Z_\lambda \subset G_{2,N+1}(\mathbb{C})$ とおく．U_λ は $G_{2,N+1}(\mathbb{C})$ の Zariski 開部分集合で，そこにおける座標としては，$z \in Z_\lambda$ で

$$z_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

を満たすものが取れる．ただし，$\lambda = (N+1)$ のときは $z = z^{(1)}$ で，条件 (17) は

$$(z_0^{(1)}, z_1^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

で置き換えられる．以下，U_λ の座標としてはこのような $z \in Z_\lambda$ をとることにする．

$\bar{H}_\lambda$ の U_λ への作用を定義する．まず，H_λ の Z_λ への作用が

$$Z_\lambda \times H_\lambda \to Z_\lambda : \quad (z, h) \mapsto zh$$

で定義されることはすぐに分かる．この写像は商空間 $U_\lambda = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\backslash Z_\lambda$ への $\bar{H}_\lambda$ の右作用を誘導する．この作用を U_λ の座標を用いて表すと，$\lambda \neq (N+1)$ のときは

$$(z, h) \mapsto z' = \begin{pmatrix} h_0^{(1)} & \\ & h_0^{(2)} \end{pmatrix}^{-1} zh$$

となる．ただし $h = (h^{(1)}, \ldots, h^{(\ell)}) \in \bar{H}_\lambda$ と表した．$\lambda = (N+1)$ のときも同様である．

U_λ への $\bar{H}_\lambda$ の作用を $\tilde{U}_\lambda = \pi_2^{-1}(U_\lambda) \subset F_{1,2}$ に持ち上げる．実際 $F_{1,2}$ への作用

$$F_{1,2} \times \bar{H}_\lambda \ni ((v_1, v_2), h) \mapsto (v_1 \cdot h, v_2 \cdot h) \in F_{1,2}$$

を $\tilde{U}_\lambda$ に制限すればよい．この作用を $\tilde{U}_\lambda$ の座標を用いて表現する．そのために $\tilde{U}_\lambda$ が直積空間 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times U_\lambda$ と見なすことができることに注意しよう．実際 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の斉次座標を $\vec{\zeta} = (\zeta_0, \zeta_1)$ とするとき，写像

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times Z_\lambda \ni (\vec{\zeta}, z) \mapsto (\langle \vec{\zeta} z \rangle, \langle \vec{z}_0, \vec{z}_1 \rangle) \in F_{1,2}, \quad z = \begin{pmatrix} \vec{z}_0 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

を考える．ここで $\langle \vec{z}_0, \vec{z}_1 \rangle$ は $\vec{z}_0, \vec{z}_1$ で張られる $\mathbb{C}^{N+1}$ の 2 次元部分空間を，$\langle \vec{\zeta} z \rangle$ は $\vec{\zeta} z = \zeta_0 \vec{z}_0 + \zeta_1 \vec{z}_1$ で張られる 1 次元部分空間を表す．写像 (19) は双正則写像 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times U_\lambda \to \tilde{U}_\lambda$ を引き起こすことが分かる．したがって，$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の非斉次座標 $\zeta = \zeta_1/\zeta_0$ と (16) と (17) を満たす z で表される U_λ の座標を用いることによって，$\tilde{U}_\lambda$ の点を表すことができる．この座標において $\bar{H}_\lambda$ の作用が

$$((\zeta, z), h) \mapsto (\zeta', z')$$

であるとすると

$$\zeta' = \frac{h_0^{(2)}}{h_0^{(1)}} \zeta, \quad z' = \begin{pmatrix} h_0^{(1)} & \\ & h_0^{(2)} \end{pmatrix}^{-1} zh. \tag{20}$$

となる．

$\tilde{U}_\lambda$ への $\bar{H}_\lambda$ の作用は，その Lie 環 $\bar{\mathfrak{h}}_\lambda$ の作用を引き起こす．$\xi \in \bar{\mathfrak{h}}_\lambda$ に対して，それが定める 1 パラメータ部分群 $t \mapsto e^{t\xi}$ により，$\tilde{U}_\lambda$ 上のベクトル場 X_ξ が得られる：

$$(X_\xi f)(\zeta, z) = \frac{d}{dt} f((\zeta, z) \cdot e^{t\xi})|_{t=0}.$$

Lie 環 $\bar{\mathfrak{h}}_\lambda$ は可換であるから，X_ξ $(\xi \in \bar{\mathfrak{h}}_\lambda)$ は $\tilde{U}_\lambda$ 上の可換なベクトル場の族を与える．

2.3 $\mathfrak{h}_\lambda$ 不変な GASDYM とモノドロミー保存変形

分割 λ に応じて GASDYM 接続の表記も変更しておこう．U_λ の座標を前節のようにとる．このとき $U_\lambda \times \mathbb{C}^r$ 上の接続

$$D = \sum D_{ij}^{(k)} dz_{ij}^{(k)}, \ D_{ij}^{(k)} = \partial_{ij}^{(k)} + A_{ij}^{(k)}$$

が GASDYM である条件は

$$L_\alpha^{(k)} = D_{1\alpha}^{(k)} - \zeta D_{0\alpha}^{(k)}$$

とおいたとき

$$[L_\alpha^{(k)}, L_\beta^{(k')}] = 0, \quad (k \neq k') \tag{21}$$

が任意の $\zeta \in \mathbb{C}$ に対して成り立つことで与えられるのであった．

定理 2.2 方程式

$$L_\alpha^{(k)} y = 0, \qquad (k = 1, \ldots, \ell; \alpha = 0, \ldots, n_k - 1) \tag{22}$$

$$X_\xi y = 0, \qquad (\xi \in \bar{\mathfrak{h}}_\lambda) \tag{23}$$

の両立条件は $n_1, \ldots, n_\ell$ 位の ℓ 個の極を持つ線形微分方程式のモノドロミー保存変形を与える．

方程式 (22) の両立条件は GASDYM であり，(23) は，そのポテンシャル $A_{ij}^{(k)}(z)$ が $\bar{H}_\lambda$ の作用で不変であることを意味する．

さて，定理に現れる線形常微分方程式がどのように与えられるかが，このままでは明確でないので，以下それを記述する．そのために $\tilde{U}_\lambda$ の座標を群 H_λ の作用が見やすいものに取り替える．具体的には $\tilde{U}_\lambda \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times U_\lambda$ の座標 (t, z) の代わりに $T_\lambda := U_\lambda / H_\lambda$ の座標 t，Lie 環 $\bar{\mathfrak{h}}_\lambda$ の座標，および $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の座標 η に取り替えるのである．

T_λ の座標の記述．

補題 2.3 商空間 $T_\lambda = U_\lambda / \bar{H}_\lambda$ は $N-2$ 次元多様体で，その座標として次の $t \in Z_\lambda$ がとれる．

1. $\lambda = (1, \ldots, 1)$ のとき，

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & t_3 & \ldots & t_N \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $\lambda = (N+1)$ のとき，

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_3 & \dots & t_N \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $\lambda \neq (1,\dots,1),(N+1)$ のとき，$t = (t^{(1)},\dots,t^{(\ell)}), t^{(k)} \in \mathrm{Mat}_{2,n_k}(\mathbb{C})$ として，

$$\begin{aligned} t^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & t_2^{(1)} & \dots & t_{n_1-1}^{(1)} \end{pmatrix}, \\ t^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & t_1^{(2)} & \dots & t_{n_2-1}^{(2)} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \\ t^{(k)} &= \begin{pmatrix} t_0^{(k)} & t_1^{(k)} & \dots & t_{n_k-1}^{(k)} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \ (k \neq 1,2). \end{aligned} \tag{24}$$

$\tilde{U}_\lambda$ の座標の変換.

変換 $(\zeta, z) \to (\eta, t, \xi)$ を

$$(1,\zeta)z = (1,\eta)te^{\xi} \tag{25}$$

により定義する.

ゲージポテンシャルの変換

$$\sum_{k,i,j} A_{ij}^{(k)} dz_{ij}^{(k)} = \sum_{k,j} B_j^{(k)} d\xi_j^{(k)} + \sum_{k,l} C_l^{(k)} dt_l^{(k)}$$

により $(A_{ij}^{(k)}) \to (B_j^{(k)}, C_l^{(k)})$ が定まる.

結論を述べるために記号を準備する．変数 $x = (x_0, x_1, \dots)$ の関数 $\theta_m(x)$ を

$$\log(x_0 + x_1\Lambda + x_2\Lambda^2 + \cdots) = \sum_{m=0}^{\infty} \theta_m(x)\Lambda^m \tag{26}$$

により定義する．Λ は不定元である．いくつかを具体的に書いてみれば以下のようになる．$\theta_m(x)$ 達はすべて，$x_0 = 0$ に特異点を持つことに注意する.

$$\begin{aligned} \theta_0(x) &= \log x_0 \\ \theta_1(x) &= \frac{x_1}{x_0} \\ \theta_2(x) &= \frac{x_2}{x_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 \\ \theta_3(x) &= \frac{x_3}{x_0} - \left(\frac{x_1}{x_0}\right)\left(\frac{x_2}{x_0}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^3 \\ \theta_4(x) &= \frac{x_4}{x_0} - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 + 2\left(\frac{x_1}{x_0}\right)\left(\frac{x_3}{x_0}\right)\right\} \\ &\quad + \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2\left(\frac{x_2}{x_0}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^4 \end{aligned}$$

補題 2.4 方程式 *(22)* と *(23)* が両立するものとする．このとき，次が成り立つ．

1. $B_j^{(k)}$ と $C_l^{(k)}$ は t のみに依る．

2. ゲージ変換によって $C_l^{(k)}(t)$ $(\forall k, l)$ を 0 とすることができる．

3. ゲージ変換したあとの $d\xi_j^{(k)}$ の係数に現れるポテンシャルを再び $B_j^{(k)}(t)$ で表すと，*(22)* と *(23)* の両立条件は，接続

$$\nabla = d - \omega, \quad \omega = \sum_{k,j} B_j^{(k)}(t) d\theta_j(\vec{\eta} t^{(k)}) \tag{27}$$

が平坦（完全積分可能）であることと同値である．ここで $\vec{\eta} = (1, \eta)$ である．

□

定義 2.5 完全積分可能性の条件 $\nabla^2 = 0$ は $B_j^{(k)}$ に対する非線型微分方程式を与える．これを λ に対する一般 *Schlesinger* 系 *(GSS)* と呼ぶ．

この結果の意味するところを例で見てみよう．

例 2.6 $N+1=4$ とし，4 の分割 $\lambda = (1,1,1,1)$ の場合を考える．このとき平坦接続 *(27)* は

$$\omega = B_0 d\log(1) + B_1 d\log(\eta) + B_2 d\log(\eta+1) + B_3 d\log(\eta+t)$$

の形をしている．したがって $\nabla y = 0$ は

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \left(\frac{B_1(t)}{\eta} + \frac{B_2(t)}{\eta+1} + \frac{B_3(t)}{\eta+t}\right) y$$
$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{B_3(t)}{\eta+t} y$$

と同値である．ここで η を $-\eta$ に取り替えれば，P_6 に対応する *Schlesinger* 系を与えるモノドロミー保存変形を記述する線形方程式 *(4)* が得られる．

3 GSS の一般超幾何関数を用いた解

以下の手順で説明する．

1. Yang potential と呼ばれる未知関数 $J(z) \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ を導入することによって，GASDYM を Yang の方程式（後出）に書き換える．

2. GASDYM の H_λ 不変な一連の特殊解に対応する Yang potential $J(z)$ を，一般超幾何関数 (GHGF) を用いて表される Ward Ansatz 解として構成する．

3. これらの一連の解達の間の変換を与える．

3.1 Yangの方程式

Yangの方程式について簡単に復習する．記述の煩雑さを避けるために，$G_{2,N+1}(\mathbb{C})$ の座標として (7) を考える．GASDYMの解が，ある単連結領域 $W \subset U$ で与えられているとする．未知関数 $Y \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ に対する方程式

$$D_{0j}Y = 0, \quad (j = 2, \ldots, N) \tag{28}$$

は，(10) により W で正則な解 $Y_\infty(z)$ を持つ．同様に

$$D_{1j}Y = 0, \quad (j = 2, \ldots, N) \tag{29}$$

は，(11) により W で正則な解 $Y_0(z) \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ を持つ．このとき $J(z) := Y_\infty^{-1} \cdot Y_0$ は微分方程式

$$\partial_{0j}(\partial_{1k}J \cdot J^{-1}) - \partial_{0k}(\partial_{1j}J \cdot J^{-1}) = 0 \tag{30}$$

を満たす．(30) をYangの方程式，J をYang potentialという．逆に，Yangの方程式 (30) の解 $J(z) \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ が W で与えられると，GASDYM接続

$$D'_{0j} = \partial_{0j} + A'_{0j}, \quad D'_{1j} = \partial_{1j} + A'_{1j}$$

が

$$A'_{0j} = 0, \quad A'_{1j} = -\partial_{1j}J \cdot J^{-1}$$

と得られる．D' は D を $Y_\infty(z)$ によってgauge変換したものになっている．

Yang potential $J(z)$ の定め方から分かるように，その取り方には任意性がある．実際，方程式 (28)，(29) の解の取り方の任意性

$$Y_\infty \mapsto Y_\infty \cdot C_\infty(\vec{z}_1), \quad Y_0 \mapsto Y_0 \cdot C_0(\vec{z}_0)$$

があるから，Yangの方程式 (30) の解の変換

$$J(z) \mapsto C_\infty^{-1}(\vec{z}_1) \cdot J(z) \cdot C_0(\vec{z}_0) \tag{31}$$

が得られる．この事実は，以下の節で述べる一連の特殊解の間の変換の構成に用いられる（[5, 6]）．

3.2 Ward Ansatz解

ここでは，GASDYMのgauge potentialが $sl_2(\mathbb{C})$ に入っている場合のみを考える．§2.1で述べたdouble fibration (13) は，Klein対応と呼ばれるtwistor空間 $F_1(= \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ と $F_2(= G_{2,N+1}(\mathbb{C}))$ の間の対応（写像ではなく）を与える．それによれば，$F_2 \ni p$ に対して，F_1 におけるtwistor lineと呼ばれる直線 $\hat{p} = \pi_1(\pi_2^{-1}(p)) \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ が対応する．したがって，開集合 $W \subset F_2$ には，開集合 $\hat{W} = \pi_1(\pi_2^{-1}(W)) = \cup_{p \in W}\hat{p}$ が対応する．Twistor理論において重要な役割を担うのがWard対応でである．それは W 上のGASDYMの解に対して $\hat{W}$ 上の $SL_2(\mathbb{C})$ 正則束でtwistor lineに制限すると自明になるものが対応し，逆に，このような正則束が与えられると，その変換関数からGASDYMが構成できるというものである．

この正則束の中で，直線束の拡大となる $SL_2(\mathbb{C})$ 束を考え，対応するGASDYMの解を考えたものがWard Ansatz解である．具体的には，以下のように構成される．

1. E を $\hat{W}$ 上の $SL_2(\mathbb{C})$ 束で，twistor line 上で自明なものとする．これを $\pi_1^{-1}(\hat{W}) \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times W$ に持ち上げた $\pi^* E$ の変換関数 $\tilde{g}$ が，ある非負整数 m に対して

$$\tilde{g}(\zeta, z) = \begin{pmatrix} \zeta^m & \phi(\zeta, z) \\ & \zeta^{-m} \end{pmatrix} \text{ on } \tilde{V}_0 \cap \tilde{V}_\infty \tag{32}$$

で与えられているとする．ここで ζ は twistor line の点を表すパラメータで

$$\tilde{V}_0 = \{|\zeta| < 2\} \times W, \quad \tilde{V}_\infty = \{|\zeta| > 1/2\} \times W.$$

2. E が twistor line 上で自明であるから

$$\tilde{g}(\zeta, z) = \tilde{Y}_\infty^{-1}(\zeta, z) \cdot \tilde{Y}_0(\zeta, z) \tag{33}$$

と分解できる．ここで $\tilde{Y}_0, \tilde{Y}_\infty \in SL_2(\mathbb{C})$ は，それぞれ $\tilde{V}_0, \tilde{V}_\infty$ において正則である．

3. $Y_0(z) := \tilde{Y}_0(\zeta, z)|_{\zeta=0}$, $Y_\infty(z) := \tilde{Y}_\infty(\zeta, z)|_{\zeta=\infty}$ とおけば，$J(z) = Y_\infty^{-1}(z) \cdot Y_0(z)$ により Yang potential が得られる．

4. 変換関数 $\tilde{g}$ が (32) のように特別な形をしていることから，$\tilde{Y}_0, \tilde{Y}_\infty$ を，条件 $\tilde{Y}_\infty|_{\zeta=\infty} = I_2$ の下で代数的に一意的に求めることができる．このときには $J(z) = Y_0(z)$ である．

5. $J(z)$ は具体的に次のように与えられる．

$$J(z) = \frac{1}{\tau_m^0} \begin{vmatrix} \tau_m^{-1} & \tau_{m+1}^0 \\ \tau_{m-1}^0 & \tau_m^1 \end{vmatrix} \in SL_2(\mathbb{C}). \tag{34}$$

ここで，$p \in \mathbb{Z}$ に対して，τ_m^p は Hankel 行列式

$$\tau_m^p = \begin{vmatrix} \phi_{p-m+1} & & \cdots & \phi_{p-1} & \phi_p \\ & & & \phi_p & \phi_{p+1} \\ \vdots & & & & \\ \phi_{p-1} & \phi_p & & & \vdots \\ \phi_p & \phi_{p+1} & \cdots & & \phi_{p+m-1} \end{vmatrix} \tag{35}$$

であり，$\phi_n(z)$ は，$\tilde{g}$ の成分 $\phi(\zeta, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_n(z) \zeta^n$ の Laurent 展開の係数である．$\pi_1^* E$ の変換関数 $\tilde{g}$ が，E のそれから π_1 で持ち上げて得られることより，$(\partial_{1j} - \zeta \partial_{0j})\phi = 0$ が成り立ち，したがって，$\phi_n(z)$ 達は

$$\partial_{1j} \phi_n = \partial_{0j} \phi_{n-1}, \quad (j = 2, \ldots, N; n \in \mathbb{Z}) \tag{36}$$

を満たしていることが分かる．

ここまでは，群 H_λ には関係しない GASDYM の特殊解の構成の話である．

3.3 一般超幾何関数による Ward Ansatz 解

我々は, $N+1$ の分割 $\lambda=(n_1,\dots,n_\ell)$ で指定された群 H_λ 不変な GASDYM の解を通じて GSS の解を構成しているのであるが，このとき，$\phi_n(z)$ を一般超幾何関数 ([3]) として定める．すなわち以下のように解を構成する．

1. $\tilde{H}_\lambda$ を H_λ の普遍被覆群とし，その指標 $\chi:\tilde{H}_\lambda\to\mathbb{C}^\times$ を考える．$h=(h^{(1)},\dots,h^{(\ell)}), h^{(k)}\in\tilde{J}(n_k)$ に対して

$$\chi(h)=\prod_{k=1}^{\ell}\exp(\alpha_0^{(k)}\theta_0(h^{(k)})+\cdots+\alpha_{n_k-1}^{(k)}\theta_{n_k-1}(h^{(k)}))$$

である．ここで $\alpha=(\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(\ell)})\in\mathbb{C}^{N+1},\alpha^{(k)}\in\mathbb{C}^{n_k}$ は，$\sum_{k=1}^{\ell}\alpha_0^{(k)}=-2$ を満たす定数である．このとき $z\in Z_\lambda$ に対して

$$\phi_n(z)=\int_C u^{-n}\chi(\vec{u}z)du$$

と定める．ただし $\vec{u}=(1,u)$ で，C は u-平面上のうまくとった曲線である．すると $\{\phi_n(z)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は (36) を満たすことがわかる．$\lambda\neq(N+1)$ のときは $\phi_n(z)$ 達は隣接関係式で結ばれた一般超幾何関数からなる関数列であることを注意しておく．

2. 上の $\phi_n(z)$ により (32) における $\tilde{g}(\zeta,z)$ および Yang potential $J(z)$ が定まる．すなわち GASDYM 接続 D' が

$$A'_{0j}=0, A'_{1j}=-\partial_{1j}J\cdot J^{-1} \tag{37}$$

で定まる．

3. D' が H_λ に対する GSS の解に対応していることは，変換関数 $\tilde{g}(\zeta,z)$ を用いて確かめられる．すなわち，勝手な $\xi\in\mathfrak{h}_\lambda$ に対して，$\tilde{V}_0,\tilde{V}_\infty$ で正則な $\theta_{\xi,0},\theta_{\xi,\infty}\in sl_2(\mathbb{C})$ が存在して

$$X_\xi\tilde{g}=\theta_{\xi,\infty}\tilde{g}-\tilde{g}\theta_{\xi,0}$$

が成り立つことを示せばよい．この条件は $\lambda\neq(N+1)$ の場合には確かめられる．

4. 上の GASDYM の H_λ 不変な解 D' に，§2 のプロセスを適用することにより一般 Schlesinger 系 GSS の特殊解が定まる．

3.4 Ward Ansatz 解の変換と GSS

Yang の方程式の解 $J(z)$ の変換を，[1], [5], [6] に倣って構成し，それが GSS の特殊解の変換を引き起こすことを見よう．与える変換の記述を簡単にするために，$G_{2,N+1}(\mathbb{C})$ の座標として

$$z=\begin{pmatrix}1&0&z_{02}&\dots&z_{0N}\\0&1&z_{12}&\dots&z_{1N}\end{pmatrix}$$

をとることにする．Yang potential $J(z)$ を Yang の R-gauge を用いて表す：

$$J=\frac{1}{f}\begin{pmatrix}1 & g\\ e & f^2+eg\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{C}). \tag{38}$$

このとき次が示せる．

命題 3.1 *Yang の方程式の解 (38) に対して，変換* $\beta:(e,f,g)\mapsto(\tilde e,\tilde f,\tilde g)$ を

$$\begin{aligned}\partial_{0j}\tilde e&=f^{-2}\partial_{1j}g\\ \partial_{1j}\tilde g&=f^{-2}\partial_{0j}e\\ \tilde f&=f^{-1}\end{aligned}$$

により定め，

$$\tilde J=\frac{1}{\tilde f}\begin{pmatrix}1 & \tilde g\\ \tilde e & \tilde f^2+\tilde e\tilde g\end{pmatrix}.$$

とおくと，$\tilde J(z)$ は *Yang の方程式の解である．*

さらに，変換 γ_1,γ_2,γ を

$$\begin{aligned}\gamma_1:\quad J\mapsto\tilde J&=\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}J\begin{pmatrix}&-1\\1&\end{pmatrix}\\ \gamma_2:\quad J\mapsto\tilde J&=\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix}J\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}\\ \gamma:\quad J\mapsto\tilde J&=\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix}J\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix}\end{aligned}$$

で定義する．これは，Yang potential の取り方の自由度 (31) が Yang の方程式の変換を引き起こしていると思うことができることより得られる．$\gamma=\gamma_2\circ\gamma_1$ であり，$\gamma^2=1$ が成り立つことに注意する．このとき次が成り立つ．

命題 3.2 *1.* $\gamma\circ\beta$ *の Ward Ansatz 解への作用は，変換関数* $\tilde g$ *の変換*

$$\begin{pmatrix}\zeta^m & \phi\\ & \zeta^{-m}\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\zeta^m & \zeta\phi\\ & \zeta^{-m}\end{pmatrix}$$

に対応する．したがって $\gamma\circ\beta$ *は，解の表示 (34), (35) において* $\phi_n\mapsto\phi_{n-1}$ $(\forall n)$ *という変換を引き起こす．*

2. $\gamma_1\circ\beta\circ\gamma_2$ *の作用は，変換関数* $\tilde g$ *の変換*

$$\begin{pmatrix}\zeta^m & \phi\\ & \zeta^{-m}\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\zeta^{m-1} & \phi\\ & \zeta^{-(m-1)}\end{pmatrix}$$

に対応する．したがって $\gamma_1\circ\beta\circ\gamma_2$ *は，解の表示 (34), (35) において Hankel 行列式のサイズを 1 だけ減少させる変換を引き起こす．*

3. $\gamma_2 \circ \beta \circ \gamma_1^{-1}$ の作用は，変換関数 $\tilde{g}$ の変換

$$\begin{pmatrix} \zeta^m & \phi \\ & \zeta^{-m} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \zeta^{m+1} & \phi \\ & \zeta^{-(m+1)} \end{pmatrix}$$

に対応する．したがって $\gamma_2 \circ \beta \circ \gamma_1^{-1}$ は，解の表示 *(34)*，*(35)* において *Hankel* 行列式のサイズを 1 だけ増加させる変換を引き起こす．

命題 3.2 に述べた変換は，一般超幾何関数によって ϕ_n が与えられる場合も有効であるから，GSS の一般超幾何関数による特殊解の変換を引き起こしていることになる．

参考文献

[1] E. F. Corrigan, D. B. Fairlie, R. G. Yates, and P. Goddard. The construction of self-dual solutions to su(2) gauge theory. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 58, , 1978.

[2] H. Kawamuko and T. Nitta. ヤン・ミルズ方程式からパンルヴェ方程式，ガルニエ系へ. 微分方程式の総合的研究, 2004.

[3] H. Kimura and T. Koitabashi. Normalizer of maximal abelian subgroup of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ and general hypergeometric functions. *Kumamoto J. Math.*, Vol. 9, , 1991.

[4] L. Mason and N.M.J. Woodhouse. Twistor theory and the schlesinger equations. In *Applications of analytic and geometric methods to nonlinear differential equations*, 1993.

[5] T. Masuda. The anti-self-dual yang-mills equation and classical transcendental solutions to the painlevé ii and iv equations. *J. Phys. A*, Vol. 38, , 2005.

[6] T. Masuda. The anti-self-dual yang-mills equation and the painlevé iii equation. *J. Phys. A*, Vol. 40, , 2007.

[7] Y. Ohyama. Isomonodromy deformations and twistor theory. *Contemporary Math.*, Vol. 309, , 2002.

[8] M.R. Shah and N.M.J. Woodhouse. Painlevé *vi*, hypergeometric hierarchies and ward ansatze. *J. Phys. A*, Vol. 39, , 2006.