

非拡大半群の BROWDER 収束に関する係数条件

九州工業大学

鈴木 智成 (Tomonari SUZUKI)

1. 序

解説論文 [20] において, 筆者は非拡大半群の共通不動点の存在に関する研究が終了したことについて解説した. この稿では, 非拡大半群の Browder 収束における係数条件に関する研究が終了したことについて解説しようと思う. 具体的には論文 [1, 12] の解説を行う. なお, 講究録の趣旨に合わせるため, 主観的なコメントや失敗談も加えようと思う.

なお, 本稿で定義されない概念については, [5, 7, 17, 21] 等を参照のこと.

2. 小歴史

この節では, Browder 収束に関する小歴史を述べたい. まず, 研究の発端である Browder の収束定理を紹介する.

定義 1. Banach 空間 E の閉凸集合 C 上で定義された写像 T が非拡大写像 (nonexpansive mapping) であるとは,

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

がすべての $x, y \in C$ に対して成り立つことである.

定理 2 (Browder [3]). C を Hilbert 空間 E の有界閉凸部分集合とし, T を C 上の非拡大写像とする. $\text{Fix}(T)$ を T の不動点集合とし, P を C から $\text{Fix}(T)$ への距離射影とする. $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ を 0 へ収束する実数列とする. $u \in C$ 固定し, 点列 $\{x_n\} \subset C$ を

$$(1) \quad x_n = \alpha_n u + (1 - \alpha_n)Tx_n$$

で定める. このとき, $\{x_n\}$ は Pu へ強収束する.

MSC (2000). 47H20, 47H10.

キーワード. 非拡大半群, 不動点, Browder 収束.

住所. 〒 804-8550 北九州市戸畑区 九州工業大学工学研究院.

電子メール. suzuki-t@mns.kyutech.ac.jp.

この定理の特徴は $\{x_n\}$ が陰 (implicit) に定義されることである. すなわち, (1) は方程式であり, その解が x_n である. x_n の存在性, 一意性は Banach の縮小原理 [2] が保証する. 実際, C 上の写像 S_n を

$$S_n x = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) T x$$

で定めると,

$$\|S_n x - S_n y\| \leq (1 - \alpha_n) \|T x - T y\| \leq (1 - \alpha_n) \|x - y\|$$

より, S_n が縮小写像であることが分かる. S_n は不動点を唯一つ持つが, その不動点が x_n である. なお, $\{x_n\}$ を陽 (explicit) に定義する収束定理がある. 本稿では触れないが, [4, 16] を参照のこと.

Shioji & Takahashi は非拡大半群に関する Browder 収束定理を証明している. 彼らは一般的な設定で定理を証明している. 実際, 下の定理 4 は [9] の定理 8 から導かれる系である. なお, 非拡大半群の共通不動点の存在性に関しては, [11, 15, 20] を参照のこと.

定義 3. $\{T(t) : t \geq 0\}$ を C 上で定義された写像族とする. 以下の 3 条件を満たすとき, $\{T(t) : t \geq 0\}$ は C 上の非拡大半群 (nonexpansive semigroup) と呼ばれる.

- (NS1) すべての $t \geq 0$ について, $T(t)$ は非拡大写像である
- (NS2) すべての $s, t \geq 0$ について, $T(s+t) = T(s) \circ T(t)$ が成立する
- (NS3) すべての $x \in C$ について, $[0, \infty)$ から C への写像 $t \mapsto T(t)x$ が連続である

定理 4 (Shioji & Takahashi [9]). C を Hilbert 空間 E の有界閉凸集合とし, $\{T(t) : t \geq 0\}$ を C 上の非拡大半群とする. P を C から $\bigcap_{t \geq 0} \text{Fix}(T(t))$ への距離射影とする. $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ と $\{t_n\} \subset (0, \infty)$ を $\lim_n \alpha_n = 0$ と $\lim_n t_n = \infty$ を満たす数列とする. $u \in C$ を固定し, 点列 $\{x_n\} \subset C$ を

$$(2) \quad x_n = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)x_n ds$$

で定める. このとき, $\{x_n\}$ は Pu へ強収束する.

この定理は, Bochner 積分をしている上に $t_n \rightarrow \infty$ としているので, 定理 2 の非拡大半群版とは言えない. 実際, (2) の非拡大写像版は

$$x_n = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n T^j x_n$$

という感じになるので, (1) とは随分異なる. そこで, 「ボホナー積分」と「 $t_n \rightarrow \infty$ 」を使わない収束定理を得た.

定理 5 ([10]). $E, C, \{T(t) : t \geq 0\}, P$ は定理 4 と同じとする. $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ と $\{t_n\} \subset (0, \infty)$ を $\lim_n t_n = \lim_n \alpha_n/t_n = 0$ を満たす数列とする. $u \in C$ を固定し, 点列 $\{x_n\} \subset C$ を

$$(3) \quad x_n = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) T(t_n) x_n$$

で定める. このとき, $\{x_n\}$ は Pu へ強収束する.

ちなみに, (3) の非拡大写像版は

$$x_n = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) (t_n T x_n + (1 - t_n) x_n)$$

という感じになるので, (1) とは一致しない. ただ, 「 $t_n \rightarrow 0$ 」が「 $t_n \rightarrow 1 - 0$ 」になれば, (1) にかかなり近い式になる.

3. 十分条件

この節では, (3) で定められた点列 $\{x_n\}$ が Pu へ収束するための十分条件について述べる. 2007 年に以下の定理を得た.

定理 6 ([12]). 数列 $\{\alpha_n\}$ と $\{t_n\}$ は以下を満たすとする.

- (B1) $0 < \alpha_n < 1, 0 < t_n (\forall n \in \mathbb{N})$
- (B2) $\lim_n t_n = \tau$
- (B3) $t_n \neq \tau (\forall n \in \mathbb{N}), \lim_n \alpha_n / (t_n - \tau) = 0$

C を Banach 空間 E の弱コンパクト凸集合とする. 以下のいずれかが成り立つと仮定する.

- E は一様凸で一様で Gâteaux 微分可能
- E は一様滑らか
- E は滑らかで Opial 条件を満たし, duality mapping は原点において弱位相の意味で点列的連続

$\{T(t) : t \geq 0\}$ を C 上の非拡大半群とする. P を C から $\bigcap_{t \geq 0} \text{Fix}(T(t))$ への (唯一の) sunny nonexpansive retraction とする. τ を非負実数とする. $u \in C$ を固定し, 点列 $\{x_n\} \subset C$ を (3) で定める. このとき, $\{x_n\}$ は Pu へ強収束する.

この定理は定理 5 の拡張定理である. 空間 E に関する条件が緩和されただけでなく, 数列 $\{\alpha_n\}, \{t_n\}$ に関する条件も緩和されている. 実際, この定理は

「 $t_n \rightarrow 1 - 0$ 」となる場合を含んでいる. このことから, この定理は Browder の収束定理 (定理 2) の非拡大半群版と呼べるのではないかと筆者は考えている. 証明には, 比較的長い行数を要したが, [13] の補助定理を用いると, 若干短くできる. なお, [6, 19] においても, 定理 5 の空間の条件を緩和している. これらの結果と定理 6 は独立に証明されている. 実際, 先ほど「2007 年に以下の定理を得た」と述べたが, 2007 年はこの論文が出版された年である. 査読に 19ヶ月かかったため出版が遅れたが, 投稿日は 2004 年の 2 月である.

定理 6 を証明しているときに, 空間 E に関する条件には緩和の余地があるように思えたが, 数列 $\{\alpha_n\}$, $\{t_n\}$ に関する条件には緩和の余地があるようには思えなかった. $\{x_n\}$ の収束を示すのに, $\{t_n\}$ の収束は必要不可欠に思えたからだ. しかし, 論文 [14] において, $\{\text{Fix}(T(t_n))\}$ が $\bigcap_{t \geq 0} \text{Fix}(T(t))$ への Mosco 収束する定理を証明したとき, $\{t_n\}$ の収束は不要だった. この先入観が消えたことで, 次の定理を得ることができた.

定理 7 ([1]). 数列 $\{\alpha_n\}$ と $\{t_n\}$ は以下を満たすとする.

(C1) $0 < \alpha_n < 1, 0 \leq t_n (\forall n \in \mathbb{N})$

(C2) $\{t_n\}$ は有界

(C3) $\lim_n \alpha_n / (t_n - \tau) = 0 (\forall \tau \in [0, \infty))$, ただし $1/0 = \infty$ とする

$E, C, \{T(t) : t \geq 0\}, P, u, \{x_n\}$ は定理 6 と同じとする. このとき, $\{x_n\}$ は Pu へ強収束する.

証明. $\{f(n)\}$ を $\{n\}$ のかつてな部分列とする. (C2) より $\{t_{f(n)}\}$ は有界である. よって, $\{f(n)\}$ の部分列 $\{f \circ g(n)\}$ はある非負実数 τ へ収束する. (C3) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{f \circ g(n)}}{t_{f \circ g(n)} - \tau} = 0$$

である. 定理 6 より, $\{x_{f \circ g(n)}\}$ は Pu へ強収束する. $\{f(n)\}$ はかつてなので, $\{x_n\}$ 自身も Pu へ強収束する. \square

非常に簡単に証明することができたが, $\{t_n\}$ の収束性が何故必要ないのか, 筆者は未だに感覚的に理解できない.

定理 6 と 7 を比較する. まず (B1) と (C1) を比較する. 条件 (B1)–(B3) を満たすとき, 「十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して $t_n \neq 0$ 」が言える. 従って, (B1) のが条件として若干強いが, 実質的に (C1) と同じ条件である. また, (C1) は点列 $\{x_n\}$ を (3) で定義するときに必要な条件である. もちろん, $0 < \alpha_n < 1$ より弱い条件である $0 < \alpha_n \leq 1$ でもよいのだが, $\alpha_n \rightarrow 0$ なので, 実質的に両者は同じである.

次に (B2), (B3) と (C2), (C3) を比較する. $1/0 = \infty$ と定義しているのので, (B3) における「 $t_n \neq \tau$ 」は不要である. この条件を省いて両者を比較すると, (C2) は (B2) より弱い条件であり, (C3) は (B3) より強い条件である. しかし, (B2) の仮定の元では, (B3) と (C3) は同値な条件である. よって, (C2) かつ (C3) は (B2) かつ (B3) よりも弱い条件である.

上の考察より, 定理7は定理6の拡張定理であることが分かる. しかし, 証明は定理6を使うだけである. 証明を見る限り, 定理7は定理6と大差ない. しかし, 後に (C2) かつ (C3) が最弱条件 (best possible) であることが分かる. 数学的な価値としては, 定理7のが高いと言えるだろう.

E を Hilbert 空間にすると, 定理7は以下になる.

定理 8. 数列 $\{\alpha_n\}$ と $\{t_n\}$ は (C1)–(C3) を満たすとする. $E, C, \{T(t) : t \geq 0\}$, P は定理4と同じとする. $u \in C$ を固定し, 点列 $\{x_n\} \subset C$ を (3) で定める. このとき, $\{x_n\}$ は Pu へ強収束する.

4. 必要条件

論文 [1] では, (C2) かつ (C3) を満たさないときは必ず, (3) で定められた点列 $\{x_n\}$ で Pu へ収束しないものが存在することを示した. すなわち, (C2) かつ (C3) は必要条件である. 前節 (第3節) で, この条件は十分条件であることを示したので, この条件は必要十分条件であることが分かる. このことを命題として書くと以下になる.

定理 9 ([1]). E を 2次元以上の次元を持つ Hilbert 空間とする. 数列 $\{\alpha_n\}$ と $\{t_n\}$ は (C1) を満たすとする. このとき以下は同値である.

- (i) (C2) かつ (C3)
- (ii) 任意の E の有界閉凸集合 C , 任意の C 上の非拡大半群 $\{T(t) : t \geq 0\}$, 任意の $u \in C$ に対し, (3) で定義された点列 $\{x_n\}$ は Pu に収束する

証明の詳細は省くが, キーとなる補助定理について解説する.

2項演算子 mod を

$$s \text{ mod } t = s - [s/t]t$$

とガウス記号を用いて定義する. 例を挙げる.

- $\pi \text{ mod } 1 = \pi - 3 = 0.1415926535 \dots$
- $e \text{ mod } 1 = e - 2 = 0.7182818284 \dots$
- $e \text{ mod } \pi = e = 2.7182818284 \dots$
- $\pi \text{ mod } e = \pi - e = 0.42331082513 \dots$

補助定理 10 ([1]). 数列 $\{\alpha_n\}$ と $\{t_n\}$ は (C1) を満たし, (C2) を満たしていないとする. このとき,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{t_n \bmod \tau} = \infty$$

を満たす正実数 τ が存在する.

証明. 証明の基になっているアイデアは, t_n の値が大きいときに, τ の変化に対して, $t_n \bmod \tau$ の値がどのように変化するか観察することにある. このアイデアを踏まえて以下のような証明を与えた. 数列 $\{\varepsilon_n\}$ と $\{\tau_n\}$ そして $\{n\}$ の部分列 $\{f(n)\}$ を以下の3条件を満たすように帰納的に定義することができる.

- $0 < \varepsilon_n < 1, 1 + \varepsilon_n < \tau_n$
- すべての $\tau \in [\tau_n - \varepsilon_n, \tau_n]$ について, $\alpha_{f(n)} / (t_{f(n)} \bmod \tau) \geq n$
- $[\tau_n - \varepsilon_n, \tau_n] \supset [\tau_{n+1} - \varepsilon_{n+1}, \tau_{n+1}]$

Cantor の定理により, $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\tau_n - \varepsilon_n, \tau_n] \neq \emptyset$ である. この集合の元 τ を取ると,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{t_n \bmod \tau} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{f(n)}}{t_{f(n)} \bmod \tau} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

が成り立つ. □

5. 必要十分条件のための必要十分条件

(C2) かつ (C3) が $x_n \rightarrow Pu$ の必要十分条件であることが分かった. 条件 (C2) は非常に分かり易いが, 条件 (C3) は分かりにくい. そこで, (C3) について詳しく調べるために, 次のことを考えた. $\{\alpha_n\}, \{t_n\}$ のどちらか一方が与えられたときの, (C1)-(C3) を満たすもう片一方が存在する必要十分条件は何だろうか.

命題 11. 数列 $\{\alpha_n\} \in (0, 1)$ に対して, 以下は同値である.

- (i) (C1)-(C3) を満たす $\{t_n\}$ が存在する
- (ii) $\lim_n \alpha_n = 0$

証明. $\lim_n \alpha_n = 0$ のときは, $t_n = \sqrt{\alpha_n}$ とすれば, (C1)-(C3) を満たす. 一方, $\lim_n \alpha_n = 0$ でないとき, (C3) を満たすためには, $\{t_n\}$ が非有界である必要がある. つまり, (C2) かつ (C3) を満たす $\{t_n\}$ は存在しない. □

位相空間の部分集合 A の自己稠密核 (perfect kernel) は

$$A^p = \bigcup \{B \subset A : B \subset B^d\}$$

で定義される. ここで B^d は B の導集合 (derived set) である. $A^p = \emptyset$ のとき, A は scattered と呼ばれる. [8, 18] 等を参照のこと.

α を順序数とする. α の次の順序数を α^+ , α の前の順序数を α^- で表す. また, α が isolated であるというのは, α^- が存在することである. α^- が存在しないときは, α は limit と呼ばれる.

命題 12 ([1]). 数列 $\{t_n\} \in [0, \infty)$ に対して, 集合 A を $A = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ で定める. このとき, 以下は同値である.

- (i) (C1), (C3) を満たす $\{\alpha_n\}$ が存在する
- (ii) A は scattered であり, かつすべての $\tau \in \mathbb{R}$ に対して, $\#\{n : t_n = \tau\} < \infty$ が成立する.

証明. まず, (i) \implies (ii) を示す. $\#\{n : t_n = \tau\} < \infty$ は自明である. A が scattered でないと仮定する. $t_{f(1)} \in A^p$ を満たす $f(1) \in \mathbb{N}$ を取り,

$$B_1 = (t_{f(1)} - \alpha_{f(1)}, t_{f(1)} + \alpha_{f(1)})$$

とする. $t_{f(1)} \in (A^p)^d$ より, $\#(A^p \cap B_1) = \infty$ である. 次に, $f(2) > f(1)$ と $t_{f(2)} \in A^p \cap B_1$ を満たす $f(2) \in \mathbb{N}$ を取り,

$$B_2 = B_1 \cap (t_{f(2)} - \alpha_{f(2)}, t_{f(2)} + \alpha_{f(2)})$$

とする. 同様に, $f(3) > f(2)$ と $t_{f(3)} \in A^p \cap B_2$ を満たす $f(3) \in \mathbb{N}$ を取り,

$$B_3 = B_2 \cap (t_{f(3)} - \alpha_{f(3)}, t_{f(3)} + \alpha_{f(3)})$$

とする. この操作を繰り返すと, 以下を満たす $\{n\}$ の部分列 $\{f(n)\}$ と非空の開区間列 $\{B_n\}$ を定義できる.

- $B_n \supset B_{n+1} (\forall n \in \mathbb{N})$
- $B_n \subset [t_{f(n)} - \alpha_{f(n)}, t_{f(n)} + \alpha_{f(n)}] (\forall n \in \mathbb{N})$

$\{[t_{f(n)} - \alpha_{f(n)}, t_{f(n)} + \alpha_{f(n)}]\}$ は有限交叉性を持つので, 共通部分は空ではない. 共通部分の元 τ を取ると,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{|t_n - \tau|} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{f(n)}}{|t_{f(n)} - \tau|} \geq 1$$

となり, 矛盾する. 従って, A は scattered である.

(ii) \implies (i) を示す. $\#\gamma = \#\mathbb{R}$ となる順序数 γ を固定し, $D = \{\alpha : \alpha \leq \gamma\}$ と置く. A の部分集合からなるネット $\{A_\alpha\}_{\alpha \in D}$ を以下で定める.

$$A_\alpha = \begin{cases} A & \text{if } \alpha = 0 \\ A_{\alpha^-} \cap (A_{\alpha^-})^d & \text{if } \alpha \text{ is isolated} \\ \bigcap \{A_\beta : \beta < \alpha\} & \text{if } \alpha \text{ is limit} \end{cases}$$

A は可算集合で scattered なので, $A_\gamma = \emptyset$ が成り立つ. よって \mathbb{N} から D への関数 κ で以下を満たすものを定義できる.

$$t_n \in A_{\kappa(n)}, \quad t_n \notin A_{\kappa(n)+}.$$

\mathbb{N} から $(0, \infty]$ への関数 δ を

$$\delta(n) = \inf \{|t_n - s| : s \in A_{\kappa(n)} \setminus \{t_n\}\}$$

で定める. ただし, $\inf \emptyset = \infty$ である. $t_n \notin A_{\kappa(n)+}$ なので, $\delta(n) > 0$ である. 数列 $\{\alpha_n\}$ を

$$0 < \alpha_n < 1, \quad \alpha_n < \delta(n)/n, \quad \alpha_{n+1} < \alpha_n$$

を満たすように取る. $\tau \in [0, \infty)$ と $\varepsilon > 0$ を固定し, $2/\nu < \varepsilon$ を満たす $\nu \in \mathbb{N}$ を取る. すると,

$$\bullet \quad m > n \geq \nu, \quad \alpha_n/|t_n - \tau| > \varepsilon, \quad \alpha_m/|t_m - \tau| > \varepsilon, \quad t_m \neq t_n \implies \kappa(m) < \kappa(n)$$

が成り立つ. 順序数の狭義の下降列で無限列となるものは存在しないので,

$$\{t_n : n \geq \nu, \alpha_n/|t_n - \tau| > \varepsilon\}$$

は有限集合になる. よって

$$\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n/|t_n - \tau| > \varepsilon\}$$

も有限集合になる. $\varepsilon > 0$ はかつてなので, $\lim_n \alpha_n/|t_n - \tau| = 0$ が成り立つ. \square

6. 最後に

(3) で定義された点列 $\{x_n\}$ が Pu に収束するための必要十分条件を得た. また, その必要十分条件のための必要十分条件も得た. 従って, 非拡大半群の Browder 収束における係数条件に関する研究が終了したと言えるだろう.

本稿では論文 [1, 12] の解説をした. 論文 [12] は単著の論文であるが, 論文 [1] は共著の論文である. 共同研究を始める前, 筆者は一人で次の問題を考えていた. θ を無理数とし, $t_n = n\theta \bmod 1$ とする. このとき, (C1) と (C3) を満たす $\{\alpha_n\}$ は存在するか.

$$\alpha_n = \min\{t_k : k = 1, 2, \dots, n\}/n$$

とすれば, (C3) を満たすのでは... 等の試行錯誤を繰り返したが, 証明の糸口さえ見つからなかった. 筆者の感覚では, この命題は真であった. しかし, 新潟大学の秋山氏により, この命題は偽であることが直ちに証明された. (実際, $\{t_n\}$ からつくられる集合 A は, $A^p = A \neq \emptyset$ なので, scattered ではない.) このことを発端として, 筆者にとって非常に有意義な共同研究が始まった.

参考文献

- [1] S. Akiyama and T. Suzuki, *Browder's convergence for one-parameter nonexpansive semigroups*, to appear in *Canad. Math. Bull.*
- [2] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, *Fund. Math.*, **3** (1922), 133–181.
- [3] F. E. Browder, *Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach spaces*, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **24** (1967), 82–90. MR0206765
- [4] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 957–961. MR0218938
- [5] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 28, Cambridge University Press (1990). MR1074005
- [6] G. E. Kim and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of nonexpansive semigroups in Banach spaces*, *Sci. Math.*, **63** (2006), 31–36. MR2202159
- [7] W. A. Kirk and B. Sims, *Handbook of metric fixed point theory*, Kluwer Academic Publishers (2001). MR1904271
- [8] K. Kuratowski, *Topology I*, Academic Press (1966). MR0217751
- [9] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive semigroups in Hilbert spaces*, *Nonlinear Anal.*, **34** (1998), 87–99. MR1631657
- [10] T. Suzuki, *On strong convergence to common fixed points of nonexpansive semigroups in Hilbert spaces*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131** (2003), 2133–2136. MR1963759
- [11] ———, *Common fixed points of one-parameter nonexpansive semigroups*, *Bull. London Math. Soc.*, **38** (2006), 1009–1018. MR2285255
- [12] ———, *Browder's type convergence theorems for one-parameter semigroups of nonexpansive mappings in Banach spaces*, *Israel J. Math.*, **157** (2007), 239–257. MR2342448
- [13] ———, *Some comments about recent results on one-parameter nonexpansive semigroups*, *Bull. Kyushu Inst. Technol.*, **54** (2007), 13–26. MR2371765
- [14] ———, *Mosco convergence of the sets of fixed points for one-parameter nonexpansive semigroups*, *Nonlinear Anal.*, **68** (2008), 3870–3878. MR2416091
- [15] ———, *Fixed point property for nonexpansive mappings versus that for nonexpansive semigroups*, *Nonlinear Anal.*, **70** (2009), 3358–3361. MR2503082
- [16] ———, *Reich's problem concerning Halpern's convergence*, *Arch. Math. (Basel)*, **92** (2009), 602–613.
- [17] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers (2000). MR1864294
- [18] S. Willard, *General Topology*, Dover (2004). MR2048350
- [19] H. K. Xu, *A strong convergence theorem for contraction semigroups in Banach spaces*, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **72** (2005), 371–379. MR2199638
- [20] 鈴木智成, 「非拡大写像が不動点を持つこと」対「非拡大半群が共通不動点を持つこと」, in *Nonlinear Analysis and Convex Analysis* (W. Takahashi Ed.), RIMS Kokyuroku, 1643 (2009), pp 103–111.
- [21] 高橋渉, *非線形関数解析学*, 近代科学社 (1988).