数理解析研究所講究録
第 1668 巻 2009 年 7-24

正規孤立特異点のクレパント解消上のリッチ平坦コーン型ケーラー計量とアインシュタイン-佐々木構造*

後藤竜司

Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Osaka University
goto@math.sci.osaka-u.ac.jp

2009. Sep. 29

Contents

1 導入

複素 n 次元ケーラー多様体 X 上のケーラー形式を ω とし、X の標準束 K_X が自明として、Ω を正則な n 次形式で零点を持たないものとしよう．このとき、正則 n 次形式とケーラー形式のペア (Ω, ω) が次のような条件 (以下、Monge-Ampère 方程式ということにする) を満たしているとき、

$$\Omega \wedge \overline{\Omega} = c_n \omega^n \tag{1}$$

*この分野は最近急速に発展しており、私の不勉強のため、取り上げるべき多くの話題に触れることができず、結局論文 [8] の概説となっています．至らぬところ多岐にわたると思いますので、ご教示頂ければ幸いです．

ペア (Ω,ω) を X 上のカラビーヤオ構造 (Calabi-Yau structure) という．ここで、c_n は次元 n のみに依存する定数である．(Ω,ω) がカラビーヤオ構造ならば、ω は X 上のリッチ平但ケーラー計量 (Ricci-flat Kähler metric) となる．

X がコンパクトなケーラー多様体で その第一チャーン類 $c_1(X)=0$ の場合、カラビ予想は既に解決されていて、X 上には任意のケーラー類の中に唯一つリッチ平但ケーラー計量が存在する．このカラビ予想をノンコンパクトな完備ケーラー多様体の場合に定式化し、証明することは重要な問題であり、境界でのケーラー計量の漸近的な振る舞いを適切に選ぶ必要がある．既に多くの先行する研究結果が得られている．例えば、Tian-Yau [15, 16, 17], Bando-Kobayashi [1. 2] また Joyce [10] による偏微分方程式を使った解析的な構成などがあるが、それぞれ境界条件が違っており、適用範囲には注意が必要である．また、超ケーラー商 (hyperKähler quotient) 構成など、いわば代数的な構成法があり、解析的な方法では構成できていない例を含んでいる．これはノンコンパクトな完備リッチ平但計量の例がさらに豊富に存在すること可能性を示している．

最近のアインシュタイン-佐々木幾何学 (Einstein-Sasaki geometry) の急速な進展により、リッチ平但な完備ケーラー計量の構成はいままでとは違った視点から捉えられている．スカラー曲率が正のアインシュタイン-佐々木多様体 S があれば、S のコーン多様体 $C(S)$ 上には、リッチ平但なケーラーコーン計量が構成される．Boyer-Galicki [3] などは孤立特異点を持ったアフィン多様体のリンクで スカラー曲率が正のアインシュタイン-佐々木多様体となるものを構成した．これらの中には所謂、エキゾチック球面など、が含まれている．また、Futaki-Ono-Wang [7] はトーリック ファノ多様体上の標準束から出来る S^1-束がスカラー曲率が正のアインシュタイン-佐々木構造をもつことを示した．

この概説では、漸近的にコーン計量に近付く計量としてコーン型計量という完備リーマン計量を導入する (Definition 2.1 と 2.2 を参照).

このコーン型リッチ平但ケーラー計量というクラスはJoyceが示したALE (Aymptotically Locally Euclidean) というクラスを含み、またTian-Yau, Bando-Kobayashi の構成した因子の補集合上での重要な完備計量のクラスを含んでいる．これら様々な現象、結果を俯瞰してみれば、スカラー曲率が正のアインシュタイン-佐々木計量から決まるコーン型計量というクラスに焦点を絞りカラビ予想を定式化し解決することは特別な意味をもつ自然な問題であることが見てとれる．

ここでは、境界条件として、コーン型 ケーラー計量 (conical Kähler metric) を選び、コーン型 ケーラー計量が漸近的にリッチ平但ケーラー計量に近付くという仮定の下でカラビ予想が成立することを示す．特に、すべてのケーラー類の中にリッチ平坦ケーラー計量が存在することを示す点が重要である．さらに、この構成により、様々なリッチ平坦ケーラー計量の例が統一的に構成できるようになる．２章ではコーン型ケーラー多様体上のカラビ予想を定式化し、解決する．これは、Tian-Yau の方法ではなく、Bando-Kobayashi で用いられた方法を拡張したものである．３章では佐々木多様体とそのコーン上のケーラーコーン計量が一対一に対応することの解説をする．さらに アインシュタインー佐々木多様体とコーン上のカラビーヤオ構造が一対一に対応することを見る．４章では、２、３章の応用として、正規孤立特異点を持つアフィン多様体のクレパント特異点解消上にリッチ平坦ケーラー計量を構成する．この際、アフィン多様体の非特異な部分はアインシュタイン-佐々木多様体のコーンとなっていることを仮定する．

Theorem 4.1 X_0 を正規孤立特異点 p をもつ複素 n 次元アフィン多様体とし、その非特異部分 $X_0\backslash\{p\}$ が実 $(2n-1)$ 次元アインシュタイン-佐々木多様体 (S, g_S) のコーン $C(S)$ と正則同型となっているとする．もしも、X_0 の特異点解消 $\pi : X \to X_0$ で標準束 K_X が自明なものがあれば、X の任意のケーラー類の中にリッチ平坦なコーン型ケーラー計量が存在する．

最後の５章において、４章の構成により様々なコーン型リッチ平坦

ケーラー多様体が得られることを示す．例えば、孤立商特異点のクレパント解消、アインシュタイン-ファノ多様体の標準束、トーリック ファノ多様体の標準束[1]，また複素3次元の通常二重点の小特異点解消 (small reoslutions) など、これらはその全てのケーラー類のなかにコーン型リッチ平坦ケーラー計量をもつことが示される．孤立商特異点のクレパント解消上のリッチ平坦ケーラー計量はケーラー形式がコンパクトサポートコホモロジー類に属する場合には van Coevering [6], Santoro [14] により構成されている．これは、Tian-Yau の方法を使っている．アインシュタイン-佐々木多様体の研究は数理物理における AdS/CFT 対応との関連で盛んに調べられてる．この中で、irregular なアインシュタイン-佐々木計量が発見され、注目を集めた [11]．例えば、$\mathbb{C}P^2$ を一点ブローアップしてできるファノ多様体の球面束上の irregular なアインシュタイン-佐々木計量は explicit に書き下すことができる．$\mathbb{C}P^2$ を一点ブローアップしてできるファノ多様体にはケーラー-アインシュタイン計量は入らないのであるが、この応用として、Theorem 4.1 を使えば、その標準束にはリッチ平坦完備ケーラー計量が存在することが示される．さらに、Tian による結果と、Futaki-Ono-Wang [7] の結果を合わせれば、任意のファノ曲面の標準束の全てのケーラー類には完備なリッチ平坦ケーラー計量が存在することが示される．(5章参照)．

2 コーン型ケーラー多様体上のカラビ予想

S を $2n-1$ 次元コンパクト多様体とし、$C(S) := \mathbb{R}_{>0} \times S$ を S のコーンといい、$r \in \mathbb{R}_{>0}$ をコーンパラメーターということにする．また $t = \log r$ をシリンダーパラメーターということにする．シリンダーパラメーター $t \in (-\infty, \infty)$ でみれば、$C(S)$ はシリンダー $\mathbb{R} \times S$ となるからである．コンパクト多様体 S のリーマン計量 g_S により、シリンダー計量 $g_{\rm cyl}$ は $g_{\rm cyl} = (dt)^2 + g_S$ と表示されるものとする．つまり、直積計量である．さらにここでは、コーン計量 (Cone metric) を考え

[1]ファノ多様体の標準束のトータル空間を X とすれば、X の標準束は自明となり、また零セクションを一点に潰すことにより、孤立特異点をもつアフィン多様体が得られる．

よう.

Definition 2.1 $r = e^t$ としたとき、

$$g_{\mathrm{cone}} = (dr)^2 + r^2 g_Y$$

で与えられるリーマン計量を $\mathbb{R}_{>1} \times Y$ 上の コーン計量という.

コーン計量 g_{cone} とシリンダー計量 g_{cyl} は

$$g_{\mathrm{cone}} = r^2 g_{\mathrm{cyl}}$$

という関係をみたしている (等角的である). これは、$dt = \frac{dr}{r}$ から、

$$\begin{aligned} r^2 g_{\mathrm{cyl}} =& r^2 (dt)^2 + r^2 g_Y & (2)\\ =& (dr)^2 + r^2 g_Y & (3)\\ =& g_{\mathrm{cone}} & (4) \end{aligned}$$

となっていることから分かる.

Definition 2.2 X がシリンダー型境界をもつとは、X のコンパクト部分集合 K があり、補集合 $X \backslash K$ がシリンダー $\mathbb{R} \times Y$ と微分同相となることとする. シリンダー型境界をもつ多様体 X のリーマン計量 g がコーン型リーマン計量 *(conical metric)* であるとは、補集合 $X \backslash K$ 上で、g が コーン計量 g_{cone} に漸近的に近付くこととする. 正確には、補集合上ではノルム を シリンダー計量 g_{cyl} で測ることにしたとき、ある自然数 k と ある $\delta > 0$ にたいして

$$\| r^{\delta} (r^{-2} g - r^{-2} g_{\mathrm{cone}}) \|_{C^k} < \infty$$

が成立しているとき、g を コーン型リーマン計量といい、(X, g) をコーン型リーマン多様体という. ここで、$\| \, \|_{C^k}$ は シリンダー型計量 $r^{-2} g_{\mathrm{cone}}$ に関する C^k-ノルムである. つまり、$r^{-2} g$ がシリンダー計量 $r^{-2} g_{\mathrm{cone}}$ に漸近的に近づく、シリンダー型計量となっていることである. ($k > 5$ としておく.)

Definition 2.3 (X, ω, g) を $2n$ 次元のケーラー多様体とする. 多様体 X がシリンダー型境界をもち、対応するリーマン計量 g が コーン型リーマン計量となっているとき、(X, ω, g) を コーン型ケーラー多様体という.

Remark 2.4 以下、コーン型リーマン多様体 (X, g) 上の k 次のヘルダーノルム $\| \|_{C^{k,\alpha}}$ はすべて、シリンダー型計量 $r^{-2}g$ を使って与え、ヘルダーノルム $\| \|_{C^{k,\alpha}}$ が有界となる関数からなるバナッハ空間を $C^{k,\alpha}$ とする[2]. また、L_k^p ノルム などを定義するときの積分はすべて、シリンダー型計量 $r^{-2}g$ の体積要素 *(volume form)* vol_{cyl} を使うことにする.

$$\omega^n = r^{-2n}\mathrm{vol}_{\mathrm{cyl}}$$

となっていることに注意しよう.

Theorem 2.5 (X, ω_0) をコーン型ケーラー多様体で、零点を持たない正則 n 次形式 Ω が

$$\Omega \wedge \overline{\Omega} = c_n F \omega^n, \qquad F > 0$$

を満たしているとする. ここで定義される関数 F は漸近的な条件

$$r^{2+\delta}(F-1) \in C^{k,\alpha}, \qquad 0 < \delta < 2n-2 \tag{5}$$

を満たしているとする. このとき、C^∞ 関数 u が存在し、$\omega_u = \omega + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}u$ は Monge-Ampère 方程式

$$\Omega \wedge \overline{\Omega} = c_n \omega_u^n$$

の解となり ω_u は X 上のコーン型リッチ平坦ケーラー計量となる. 関数 $u \in C^\infty(X)$ は $\|e^{\delta t}u\|_{C^{2,\alpha}} < \infty$ をみたす. $(0 < \delta < 2(n-1))$. ここで、$\| \|_{C^{2,\alpha}}$ はウエイト α のヘルダーノルムである.

---

[2] シリンダー計量では関数 $e^{\delta t}$ は何回微分しても、同じオーダーで減衰するが、コーン計量では微分の階数ごとに減衰オーダーが変わり、取り扱いが複雑となる $(r = e^t$ である). またストークスの定理が適用出来るオーダーがシリンダー型では分かりやすいなどの点があり、ここではシリンダー計量でノルムを計っている.

この定理は条件 (5) を満たすケーラー計量 ω があれば、ω を初期値として Monge-Ampère 方程式を解いて関数 u を求めれば、ω_u が求めるリッチ平坦コーン型ケーラー計量であることを保証している．そのため、リッチ平坦ケーラー計量の存在問題は (5) を満たすケーラー計量の構成に帰着されるわけであるが、この構成に幾何学的な要素が集約されている．この定理の証明は論文 [8] で与えられている．(また、Bando-Kobayashi [2] での議論も参照.)

3　佐々木多様体とケーラーコーン計量

(S, g_S) をコンパクトな $(2n-1)$ 次元リーマン多様体とし、$C(S) = \mathbb{R}\times S$ を S のコーン、$t \in \mathbb{R}$ を シリンダーパラメーターとする．$r = e^t$ としたとき、コーン計量 g_{cone} とシリンダー計量 g_{cyl} はそれぞれ

$$g_{cone} = dr^2 + r^2 g_S, \qquad g_{cyl} = dt^2 + g_S$$

で与えられ、

$$g_{cone} = r^2 g_{cyl}$$

という関係があることに注意しよう．佐々木構造とは、奇数次元 $(2n-1)$ 次元多様体 S の幾何構造であり、S のコーン $C(S)$ 上にケーラー構造を与えるものである．正確には、

Definition 3.1 $2n-1$ 次元リーマン多様体 (S, g_S) が佐々木多様体であるとは、コーン $C(S) := \mathbb{R}_{>0} \times S$ 上に積分可能な複素構造 J があり、コーン計量 g_{cone} にたいして、$(C(S), g_{\mathrm{cone}}, J)$ がケーラー多様体となることである．

この定義は、少々違和感を与えてしまうかも知れない． 実際、佐々木多様体には接触構造など、様々な幾何構造が入っている．対応する幾何構造を書き下し、通常の佐々木多様体の定義と一致することをみてみよう．奇数次元多様体 S を $C(S)$ の超曲面 $\{r = 1\} = \{t = 0\}$ と同一視することにする．次の lemma は [12] の Appendix に見られる．

Lemma 3.2 ケーラー多様体 $(C(S), g_{cone}, J)$ において、$\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} J = 0$ である.

proof コーン計量 g_{cone} に関して共変微分を見れば、$\nabla_u \frac{\partial}{\partial t} = u$ が $C(S)$ 上の任意のベクトル場 u について成立していることが分かる. u, v を $C(S)$ 上のベクトル場とすると、

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_u J)v =& [u, Jv] - J[u, v]\\ =& \nabla_u(Jv) - \nabla_{Jv}u - J\nabla_u v + J\nabla_v u\\ =& (\nabla_u J)v - \nabla_{Jv}u + J\nabla_v u\end{aligned}$$

が成立する. ケーラーであるから、$\nabla J = 0$ であり、$u = \frac{\partial}{\partial t}$ を代入すれば、

$$(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} J)v = -\nabla_{Jv}\frac{\partial}{\partial t} + J\nabla_v \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

となる.

q.e.d.

$C(S)$ 上のベクトル場を $\xi = Jr\frac{\partial}{\partial r} = J\frac{\partial}{\partial t}$ とすると、g_{cone} がエルミート計量であるので、ξ は $\frac{\partial}{\partial t}$ に直交しており、ξ は 超曲面 S に沿ったベクトル場となる. ξ の S への制限を

$$\xi_s = \xi|_s$$

としておく. また 一次形式に作用する複素構造 J^* を $(J^*\theta)(v) = \theta(Jv)$, $\theta \in T^*C(S)$, $v \in TC(S)$ とし、

$$\eta = -J^*\frac{dr}{r} = -J^* dt$$

として、$C(S)$ 上の一次形式を定め、S への引き戻しを η_s とする. (以下、簡単のため、誤解のない場合は J^* は J と書くことにする.) この定義から、$\eta(\xi) = \eta_s(\xi_s) = 1$ である. ケーラー形式 ω は g_{cone}, J により、$\omega(u, v) = g_{cone}(Ju, v)$, $u, v \in TC(S)$ として定義されているものであった. リー微分 $\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}}$ はシリンダーパラメーター t 方向の平行移動か

ら定まるものであった. ゆえに、$C(S)$ の one-parameter 変換群 f_λ を

$$f_\lambda(r,y) = (\lambda r, y), \qquad y \in S$$

とすれば、

$$\frac{d}{d\lambda} f_\lambda^*|_{\lambda=0} = \mathcal{L}_{r\frac{\partial}{\partial r}}$$

となる. g_{cone} はコーン計量であるから、$f_\lambda^* g_{cone} = \lambda^2 g_{cone}$ であるから、$\mathcal{L}_{r\frac{\partial}{\partial r}} g_{cone} = 2g_{cone}$ となる. lemma 3.2 から、$\mathcal{L}_{r\frac{\partial}{\partial r}} J = 0$ であるので、$\mathcal{L}_{r\frac{\partial}{\partial r}}\omega = 2\omega$ となる. ω はケーラー形式であるから、$d\omega = 0$ である. リー微分に関する公式 $\mathcal{L}_u = i_u d + d i_u$ を使えば、

$$d i_{r\frac{\partial}{\partial r}} \omega = 2\omega \tag{6}$$

となる.

Lemma 3.3

$$i_{r\frac{\partial}{\partial r}}\omega = i_\xi g_{cone} = r^2\eta$$

proof $\xi = J\frac{\partial}{\partial t}, \eta = -J^* dt$ より、$\eta(\xi) = 1$ である. ゆえに、$i_\xi g_{cone}(\xi) = r^2\eta(\xi) = r^2$. また、$\eta(\frac{\partial}{\partial t}) = -dt(J\frac{\partial}{\partial t}) = 0$ となる. なぜなら、$J\frac{\partial}{\partial t} \in TS$ であるから、関数 t の TS 方向のベクトルでの微分は零となる. さらに、$\langle \frac{\partial}{\partial t}, J\frac{\partial}{\partial t}\rangle^\perp$ を二つのベクトル場 $\frac{\partial}{\partial t}, J\frac{\partial}{\partial t}$ で張られる空間の直交補空間とすると、$\langle \frac{\partial}{\partial t}, J\frac{\partial}{\partial t}\rangle^\perp$ は J で不変であり、$\eta(u) = -dt(Ju) = 0, u \in \langle \frac{\partial}{\partial t}, J\frac{\partial}{\partial t}\rangle^\perp$ となる. ゆえに、$i_\xi g_{cone} = r^2\eta$ q.e.d.

lemma 3.3 を式 (6) に代入すると、$\eta = -J^*\frac{dr}{r}$ であるから、

$$2\omega = dr^2\eta = -d(J^* r dr) = -\frac{1}{2} dJ^* dr^2 \tag{7}$$

ゆえに、

$$\omega = \sqrt{-1}\frac{1}{2}\partial\bar{\partial} r^2$$

が得られる. また、$2\omega = 2rdr \wedge \eta + r^2 d\eta$ はシンプレクティック構造であるから、

$$(2\omega)^n = 2nr^{2n} dt \wedge \eta \wedge (d\eta)^{n-1} \neq 0$$

である．これから、$\eta_s \wedge (d\eta_s)^{n-1} \neq 0$ となり、η_s は S 上の接触構造 (contact structure) となることがわかり、ξ_s はその Reeb ベクトル場となる．$D = \ker \eta_s = \{\, u \in TS \,|\, \eta_s(u) = 0\}$ として、$2n-2$ 次元の接分布を定めると、$D = \langle \frac{\partial}{\partial t}, J\frac{\partial}{\partial t} \rangle^{\perp}$ であり、D は J で不変となる．Φ_s =End(TS) を

$$\Phi_s(v) = \begin{cases} Jv & (v \in D) \\ 0 & (v = \xi) \end{cases}$$

として定める．以上、S 上には 接触構造 η_s. Reeb ベクトル場 ξ_s そして Φ_s ∈End (TS) が決まることになる．S 上のリーマン計量は (η_s, ξ_s, Φ_s) により、

$$g_s(u, v) = \eta_s \otimes \eta_s(u, v) + d\eta_s(u, \Phi_s v), \tag{8}$$

$u, v \in TS$ により、与えられる．Reeb ベクトル場は η_s から決まるので、ペア (η_s, Φ_s) が S 上の構造を全て定めていることになる．最後に $\mathcal{L}_{\xi_S}\eta_s = 0$ となることを示そう．

Lemma 3.4 $C(S)$ 上 概複素構造 J が積分可能ならば、

$$\mathcal{L}_\xi J = J\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} J$$

が成立する．

proof J が積分可能なので、Nijenhuis テンソルは零となる． ゆえに、

$$[J\frac{\partial}{\partial t}, Ju] = J[J\frac{\partial}{\partial t}, u] + J[\frac{\partial}{\partial t}, Ju] + [\frac{\partial}{\partial t}, u] \tag{9}$$

ここで、$u \in TC(S)$. $\xi = J\frac{\partial}{\partial t}$ であるから、

$$\mathcal{L}_\xi J(u) = [J\frac{\partial}{\partial t}, Ju] - J[J\frac{\partial}{\partial t}, u] \tag{10}$$

$$\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} J(u) = [\frac{\partial}{\partial t}, Ju] - J[\frac{\partial}{\partial t}, u] \tag{11}$$

であるので、(9) から $\mathcal{L}_\xi J = J\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} J$ となる． q.c.d. このことから、$\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{-1}J\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{-1}\xi$ は $C(S)$ 上の正則なベクトル場となる．特に、$[\frac{\partial}{\partial t}, \xi] = [\frac{\partial}{\partial t}, J\frac{\partial}{\partial t}] = 0$ である．

Lemma 3.5 $\mathcal{L}_\xi J = 0$ ならば、$\mathcal{L}_{\xi_S}\eta_s = 0$ となる.

proof $\mathcal{L}_\xi \eta = -\mathcal{L}_\xi J dt = -J\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} dt = 0$ であり、$i_S^*\mathcal{L}_\xi\eta = \mathcal{L}_{\xi_S}\eta_s$ から導かれる. q.e.d. これから、J が積分可能ならば、$\mathcal{L}_\xi\eta = 0$ となる. これから、$i_\xi d\eta = 0$ であり、$d\eta_s$ は S 上 basic 形式となる. また、$\mathcal{L}_{\xi_S}\Phi_s = 0$ であるので、(8) から、$\mathcal{L}_\xi g_s = 0$ となり、ξ_s は (S, g_s) のキリングベクトル場となることが分かる.

さて、この コーン $C(S)$ 上のケーラー構造と S 上の構造 (η_s, Φ_s) との対応を今度は逆に S からコーン $C(S)$ に向かい辿ってみることにする.

S を $(2n-1)$ 次元の多様体で、η_s を S 上の接触構造とし、ξ_s を Reeb ベクトル場とする. つまり、$\eta_s \wedge (d\eta_s)^{n-1} \neq 0$ である. ダルブーの定理により、接触形式の標準形を用いれば、$D = \ker\eta_s$ は S 上の $2n-2$ 次元の接分布であり、$d\eta_s$ は D 上の非退化 2 次形式となることがわかる. $\Phi_s \in \mathrm{End}\ (TS)$ を D 上では概複素構造となり、$\Phi_s(\xi_s) = 0$ となるものとする. η_s と Φ_s が compatible であるとは、D 上で、$d\eta_s, \Phi_s$ が 次をみたすこととする、

- $d\eta_s(\Phi_S u, \Phi_S v) = d\eta_s(u, v), \quad u, v \in D$
- $d\eta_s(u, \Phi_S u) > 0, \qquad (u \neq 0 \in D).$

つまり、$(d\eta_s, \Phi_s)$ が、D 上で エルミート構造を定めていることを意味する. compatible な ペア (η_s, Φ_s) にたいして、式 (8) から、S 上のリーマン計量 g_s が定まる. コーン $C(S) = \mathbb{R}_{>0} \times S$ の接束を $TC(S) \cong T\mathbb{R} \times TS$ と分解しておいて、リーマン計量を

$$g_{cone} = dr^2 + r^2 g_S$$

として定める. 上記分解により、$\xi_s \in TS$ を $C(S)$ 上のベクトル場とし、ξ と書くことにする. 概複素構造 J を

$$J(r\frac{\partial}{\partial r}) = \xi, \qquad J|_D = \Phi_S$$

としてやれば、g_{cone} は J について不変であり、エルミート計量となる. 対応する基本二次形式 ω は シンプレクティック形式であり、

$$2\omega = d(r^2\eta_s) = 2rdr \wedge \eta_s + r^2 d\eta_s$$

となる. つまり、(g_{cone}, J, ω) は $C(S)$ 上の概ケーラー構造となる. Φ_s は $\mathrm{End}(TS)$ のセクションであるから、シリンダーパラメーター t には依存していない. ゆえに、$\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} J = 0$ となる. S 上の 接触構造と Φ_s との compatible なペア (η_s, Φ_s) は接触計量構造 (contact metric structure) と呼ばれる. さらに、対応して決まるコーン $C(S)$ 上の概複素構造 J が積分可能であるとき、ペア (η_s, Φ_s) は正規接触計量構造 (normal contact metric structure) という. 以上の対応を整理してまとめると、

Proposition 3.6 S を $2n-1$ 次元の多様体、$C(S)$ を S のコーン $\mathbb{R}_{>0} \times S$ とし、$r = e^t \in \mathbb{R}_{>0}$ とする. $C(S)$ 上のケーラー構造 (g_{cone}, J, ω) と S 上の 正規接触計量構造 (normal contact metric structure) とは一対一に対応する.

正規接触計量構造が、通常、佐々木構造と呼ばれるものであった. 佐々木構造をもつ多様体を佐々木多様体 (Sasakian manifold) という.

さて、 S 上の佐々木構造とコーン $C(S)$ 上のケーラー構造との上記対応において、次の定理が良く知られている.

Proposition 3.7 $2n-1$ 次元多様体 S 上のリーマン計量 g_s がスカラー曲率が $2n-2$ の *Einstein -Sasakian* 計量ならば、対応するコーン計量 g_{cone} は $C(S)$ 上のリッチ平坦ケーラー計量である. 逆に $C(S)$ 上のリッチ平坦ケーラーコーン計量 g_{cone} はスカラー曲率が $2n-2$ の *Einstein -Sasakian* 計量 g_S に対応する.

(これの証明については [3] 参照.)

4 クレパント特異点解消上のコーン型リッチ平但ケーラー計量

前の章の応用として、孤立特異点のクレパント特異点解消上の Cone 型リッチ平但ケーラー計量の構成を実行してみる．この際、無限遠のほうにアインシュタイン–佐々木計量が入っていることを仮定する．これの典型的な例は $\mathbb{C}^n$ 上の標準計量である．この標準計量について、半径 R の $2n-1$ 次元の球には標準的なアインシュタイン–佐々木計量が入っている．

Theorem 4.1 X_0 を p を正規孤立特異点とする複素 n 次元アフィン多様体とし、その非特異部分 $X_0 \backslash \{p\}$ が実 $(2n-1)$ 次元アインシュタイン-佐々木多様体 (S, g_S) のコーン $C(S)$ と正則同型となっているとする．もしも、X_0 の特異点解消 $\pi : X \to X_0$ で標準束 K_X が自明なものがあれば、X の任意のケーラー類の中にリッチ平坦なコーン型ケーラー計量が存在する．

Remark 4.2 ここで、コーン型ケーラー計量は完備であることに注意しよう．*Coevering* の結果 [6] ではリッチ平坦ケーラー計量の構成のためには、ケーラー類 が コンパクト サポート コホモロジー群 *(compact support cohomology group)* に入っていることを要求する．しかし、これは必要ないことを定理 *4.1* は示している．*Tian-Yau* の方法に直接沿って Monge-Ampère 方程式を解こうとする場合、ケーラー類 が コンパクト サポート コホモロジー群 *(compact support cohomology group)* に入っているという条件が必要になるようである．

この定理の証明にはコーン型ケーラー多様体上のリッチ平坦ケーラー計量の一般的な存在定理 2.5 を用いる．この際、Monge-Ampère 方程式を解く最初の初期値ケーラー計量の構成に、コホモロジー群の消滅定理と、佐々木多様体の basic コホモロジー群のホッジ分解 (Hodge decomposition) とレフシェッツ分解 (Lefschetze decomposition) を用いる．(詳細については [8] 5 章を参照)．

$\mathbb{R}_{>0} \times S$ 上のコーン計量 $\omega_{cone} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\overline{\partial} r^2$ を固定したとき、X 上でコーン型計量 (conical metric) が定義されるわけであるが、次のよ

うな uniqueness が成立する.

Theorem 4.3 二つの コーン型計量 ω_1, ω_2 があり、$[\omega_1] = [\omega_2] \in H^2(X, \mathbb{R})$ で、共に *Ricci-flat Kähler metric* であるとする. 正の定数 δ にたいし、

$$\|e^{\delta t}(\omega_1 - \omega_2)\|_{C^{k_1,\alpha}} < \infty, \quad (k_1 > 4,\, 0 < \alpha < 1, \delta > n)$$

ならば、$\omega_1 = \omega_2$ である.

これは、無限遠の近傍で、ある関数 $\tilde{u}$ により、$\omega_k - \omega'_k = dd^c\tilde{u}$ となり、$\tilde{u}$ が $O(e^{-\delta t})$, ($n < \delta$) のオーダーで指数関数的に減少していれば、各ケーラー類に中で、uniqucncss が成り立つことを示している. Sasakian 多様体の automorphism で Einstein-Sasakian を動かせば、$|\omega_k - \omega'_k| = O(1)$ (有界) となるリッチ平坦ケーラー計量が得られるので、$\omega_k - \omega'_k$ が漸近的に零に近付くことを仮定しなければ、uniqueness は成立しない. 減衰のオーダーをもっと、精密に評価するのが課題であるが、評価付きの $\partial\bar{\partial}$-lemma を示す必要がある.

5 リッチ平坦ケーラー計量の様々な例

最後に定理 4.1 の応用として得られるリッチ平坦ケーラー計量を挙げていくことにする. 任意のケーラー類の中にリッチ平坦ケーラー計量が得られるということから、ここで新たに構成されたものも含まれている. 最初に自明なもの.

Example 5.1 $\mathbb{C}^n$ 上の標準的なケーラー計量は $r = \sum_{i=1}^n |z_i|^2$ としたとき、コーン型のリッチ平坦ケーラー計量となる. 実際 コンパクト集合 K を原点 0 とすると、$\mathbb{C}^n \backslash \{0\} = \mathbb{R}_{>0} \times S^{2n-1}$ であり、$2n-1$ 次元球面 S^{2n-1} のコーンとなっている. 球面 $S^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z|^2 = 1\}$ 上にはアインシュタイン-佐々木構造が入っている.

Example 5.2 Γ を $SU(n)$ の有限部分群とし、原点 0 のみを固定点として $\mathbb{C}^n$ に作用しているとする. このとき、商 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ は原点のみを

特異点とし、補集合 $\mathbb{C}^n\backslash\{0\}/\Gamma$ は佐々木多様体 $S := S^{2n-1}/\Gamma$ のコーン $C(S)$ となっている. コーン $C(S)$ には *Calabi-Yau* 構造があり、

$\pi : X \to X_0 = \mathbb{C}^n/\Gamma$ をクレパント特異点解消とすれば、任意のケーラー類の中に、リッチ平坦なケーラー計量が存在することになる. これは既に *Joyce* により得られている結果である.

Example 5.3 Z を $n-1$ 次元コンパクトケーラー多様体で第一チャーン類 $c_1(Z) > 0$ が正となるものとする. (このようなケーラー多様体をファノ多様体という.) ファノ多様体 Z の標準束 K_Z を X とし、K_Z の球面束を S とする. 零セクション $\{0\}$ の補集合 $X\backslash\{0\}$ は球面束 S 上のコーン $C(S)$ である. ファノ多様体 Z がリッチ正なアインシュタインーケーラー計量を持てば、球面束 S は正のアインシュタインー佐々木構造をもつことになる. $X = K_Z$ のゼロセクションを一点に潰せば、$X = K_Z$ はクレパント特異点解消と見なせることになる. ゆえに、K_Z 上の任意のケーラー類のなかにリッチ平坦ケーラー計量が構成される. これは、いわゆるカラビによる バンドル構成 *[4]* があるが、ケーラー類 が コンパクト サポート コホモロジー群 *(compact support cohomology group)* に入っていない時は、この場合でも新しいものだと思われる.

さらに　任意のコンパクトトーリック佐々木多様体で $c_B^1 > 0$ かつ $c_1(D) = 0$ なものには、アインシュタイン-佐々木計量が存在することが示された. これを使えば、

Theorem 5.4 *(Futaki-Ono-Wang)* Z を *compact toric Kähler manifold with* $c^1(X) > 0$ 　とすれば、*Ricci-flat cone metric* が $K_Z\backslash\{0\} = C(S)$ 上に存在する.

となる. ゆえに、定理2.5 から、次が導かれる.

Theorem 5.5 *Let* Z *be a compact toric Kähler manifold with* $c^1(Z) > 0$. *Then there exists a Ricci-flat Kähler conical metric on every Kähler class on* K_Z.

Remark 5.6 特に、Z が $\mathbb{C}P^2$ の一点 *blowing up* $\widehat{\mathbb{C}P^2}$ ならば、これは、アインシュタインーケーラー計量を持たないが、トーリックであるので、球面束 S はアインシュタインー佐々木構造をもつことになる．$\widehat{\mathbb{C}P^2}$ の *Kähler cone* は 実2 次元となるので、定理 *2.5* から、$K_{\widehat{\mathbb{C}P^2}}$ 上には実 2 次元の *Ricci-flat Kähler metrics* の *family* が存在することになる．実際、*[13]* において、*explicit* な *Ricci-flat* ケーラー計量の構成が与えられている．定理 *2.5* で構成されたものは この *Ricci-flat Kähler* 計量を含む 2 次元の族になっていると思われる．

Example 5.7 また、複素 3 次元の 通常二重点 *(ordinary double point)*

$$X_0 = \{(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^4 \mid z_0 z_1 + z_2 z_3 = 0\}$$

の *small resolution* の一つを $X = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ とすれば、

Proposition 5.8 *There exists a Ricci-flat Kähler cone metric* ω *on a small resolution of the ordinary double point of dimension* 3.

この場合、$H^2_{\mathrm{cpt}}(X) = \{0\}$ であり、$H^2(X) = \mathbb{R}$ であるので、*Kähler class* は *compact supprt cohomology group* の元ではない．$X = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ 上のリッチ平坦ケーラー計量として、*Candelas* らにより構成されたもの *[5]* が知られており、ここで構成したものとの一致するかどうかは *uniquness* に関する興味深い問題である．

References

[1] S. Bando and R. Kobayashi, *Ricci-flat Kähler metrics on affine algebraic manifolds*. In T. Sunada, editor Geometry and Analysis on Manifolds, volume 1339 of Lecture Notes in Mathematics, pages 20-31, springer Verlsg, 1988

[2] S. Bando and R. Kobayashi, *Ricci-flat Kähler metrics on affine algebraic manifolds II*, Mathematische Annalen, 287, 175-180, 1990

[3] C. Boyer and K. Galicki, *Sasakian Geometry*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2008

[4] E. Calabi, *Métrques kählériennes et fibrés holomorphes*, Ann.Sci.École Norm. Sup. (4), 12 (2), 269-294, 1979

[5] P. Candelas and Xenia C. de la Ossa, *Comments on conifolds*, Nuclear Physics. B, 343(1), 246-268, 1979

[6] C.van. Coevering, *Ricci-flat Kähler metrics on crepant resolutions of Kähler cones* arXiv: 0806.3728

[7] A. Futaki, H. Ono and G. Wang, *Transverse Kähler geometry of Sasaki manifolds and toric Sasaki-Einstein manifolds*, arXiv:math/0607586

[8] R. Goto, *Calabi-Yau structures and Einstein-Sasakian structures on crepant resolutions of isolated singularities* ArXiv: 0906.5191

[9] R. Goto, スペシャル幾何学と変形理論岩波書店、出版予定

[10] D. Joyce, *Compact Manifolds with Special Holonomy*, Oxford Mathematical Monograph, Oxford University Press, Oxford, 2000

[11] D. Martelli and J. Sparks, *Symmetry-breaking vacua and baryon condensates in ADS/CFT*, arXiv: physics, 08043999,Phys. Rev D79: 065009,2009

[12] D. Martelli, J. Sparks and S-T. Yau, *Sasaki-Einstein Manifolds and Volume Minimisation*, Commum. Math. Physics. 280, 611-673, (2008)

[13] T. Oota and Y. Yasui, *Explicit Toric Metric on Resolved Calabi-Yau Cone*, hep-th/0605129, Phys. Lett. B639, 54-56, (2006)

[14] B. Santoro, *Existence of complete Kahler Ricci-flat metrics on crepnat resolution*, arXiv:0902.0592

[15] G. Tian and S.-T. Yau, *Existence of Kähler-Einstein metrics on complete Kähler manifolds and their applications to algebraic geometry.* In S.-T. Yau, editor, Mathematical Aspects of String Theory, volume 1 of advanced series in Mathematical Physics, pages 574-628, World Scientific, 1987

[16] G. Tian and S.-T. Yau, *Complete Kähler manifolds with zero Ricci curvature. I* Journal of the Americal Mathematical Society, 3, 579-609,1980

[17] G. Tian and S.-T. Yau, *Complete Kähler manifolds with zero Ricci curvature. II* Inventiones mathematicae, 61, 251-265, 1980