数理解析研究所講究録
第 1668 巻 2009 年 121-147

Hermann 作用の軌道空間の層分解とその応用

井川 治 （福島高専）

概要 既約ルート系の概念を拡張した対称三対を定義しその性質を調べる．それを応用して Hermann 作用の軌道空間を調べる．

謝辞 研究を遂行するに際し京都大学数理解析研究所の松木敏彦先生に有益なアドバイスを頂きましたので感謝致します．

1 対称三対の幾何学

始めにルート系の定義を復習しておこう．

定義 1.1. $\mathfrak{a}$ を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元線形空間とする．有限部分集合 $\Sigma \subset \mathfrak{a} - \{0\}$ が $\mathfrak{a}$ の**ルート系**であるとは，次の 3 つの条件を満たすときを言う．

(1) $\mathfrak{a} = \mathrm{span}(\Sigma)$.
(2) $\alpha, \beta \in \Sigma$ に対して $s_\alpha \beta \in \Sigma$.
(3) $\alpha, \beta \in \Sigma$ に対して

$$2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|^2} \in \mathbb{Z}.$$

ルート系 Σ が**既約**であるとは Σ が互いに直交する空でない二つの部分集合の和に分かれない場合を言う．

定義 1.2. $\mathfrak{a}$ を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元ベクトル空間とする．$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ が $\mathfrak{a}$ の**対称三対 (symmetric triad)** であるとは次の条件 (1)～(6) を満たす場合を言う．

(1) $\tilde{\Sigma}$ は $\mathfrak{a}$ の既約ルート系である．
(2) Σ は $\mathfrak{a}$ のルート系である．
(3) W は -1 倍に関して不変な $\mathfrak{a}$ の空でない部分集合で $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup W$.

(4) $l = \max\{\|\alpha\| \mid \alpha \in \Sigma \cap W\}$ とおくとき $\Sigma \cap W = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \|\alpha\| \leq l\}$.
(5) $\alpha \in W, \lambda \in \Sigma - W$ に対して

$$2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{\|\alpha\|^2} \text{が奇数} \Leftrightarrow s_\alpha \lambda \in W - \Sigma.$$

(6) $\alpha \in W, \lambda \in W - \Sigma$ に対して

$$2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{\|\alpha\|^2} \text{が奇数} \Leftrightarrow s_\alpha \lambda \in \Sigma - W.$$

$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ が $\mathfrak{a}$ の対称三対のとき，条件 (4) より $\Sigma \cap W$ は $\mathfrak{a}$ のルート系になる．

補題 1.3. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の対称三対とする．任意の $\lambda \in (\Sigma - W) \cup (W - \Sigma)$ に対して $\alpha, \beta \in \Sigma \cap W$ が存在して $\lambda = \alpha + \beta$ となる．

$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の対称三対とする．$\tilde{\Pi}$ を $\tilde{\Sigma}$ の基本系とし $\tilde{\Pi}$ に関する正のルートの全体を $\tilde{\Sigma}^+$ と表し，$\Sigma^+ = \Sigma \cap \tilde{\Sigma}^+, W^+ = W \cap \tilde{\Sigma}^+$ とおく．Σ の単純ルートの全体を Π と表す．

補題 1.4. $\tilde{\Sigma}$ の任意の元は Π の元達の整数係数の線形結合で表せる．

$\mathfrak{a}$ の対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ に対して

$$\begin{aligned} \Gamma &= \left\{ X \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, X \rangle \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \quad (\lambda \in \tilde{\Sigma}) \right\}, \\ \Gamma_{\Sigma \cap W} &= \left\{ X \in \mathfrak{a} \mid \langle \alpha, X \rangle \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \quad (\alpha \in \Sigma \cap W) \right\} \end{aligned}$$

とおく．上の補題 1.3 より $\Gamma = \Gamma_{\Sigma \cap W}$ となる．

定義 1.5. Γ の点を**全測地点**と呼ぶ．

定義 1.6. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W), (\tilde{\Sigma}', \Sigma', W')$ をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ の対称三対とする．
$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ と $(\tilde{\Sigma}', \Sigma', W')$ が**同値**であるとは等長線形同型写像 $f : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}'$ と $Y \in \Gamma$ が存在して $f(\tilde{\Sigma}) = \tilde{\Sigma}'$ かつ

$$\begin{aligned} \Sigma' - W' &= \{f(\alpha) \mid \alpha \in \Sigma - W, \langle \alpha, 2Y \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}\} \\ &\quad \cup \{f(\alpha) \mid \alpha \in W - \Sigma, \langle \alpha, 2Y \rangle \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}\}, \\ W' - \Sigma' &= \{f(\alpha) \mid \alpha \in W - \Sigma, \langle \alpha, 2Y \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}\} \\ &\quad \cup \{f(\alpha) \mid \alpha \in \Sigma - W, \langle \alpha, 2Y \rangle \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ と $(\tilde{\Sigma}', \Sigma', W')$ が同値のとき，$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W) \sim (\tilde{\Sigma}', \Sigma', W')$ と書く．このとき，$f(\Sigma \cap W) = \Sigma' \cap W'$ となる．$\sim$ は同値関係になる．

命題 1.7. Σ の Weyl 群 $W(\Sigma)$ は W の置換を引き起こす．

定義 1.8. $\mathfrak{a}$ の開集合 $\mathfrak{a}_r$ を次で定義する．

$$\mathfrak{a}_r = \bigcap_{\lambda \in \Sigma, \alpha \in W} \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}, \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$$

$\mathfrak{a}_r$ の点を**正則点**，$\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_r$ の点を**特異点**という．$\mathfrak{a}_r$ の連結成分を**セル**という．

定義 1.9. $\{(s_\lambda, \frac{2n\pi}{\|\lambda\|^2}\lambda) \mid \lambda \in \Sigma, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(s_\alpha, \frac{(2n+1)\pi}{\|\alpha\|^2}\alpha) \mid \alpha \in W, n \in \mathbb{Z}\}$ で生成される $O(\mathfrak{a}) \ltimes \mathfrak{a}$ の部分群 $\tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の **Affine Weyl 群**と言う．

$(s_\lambda, \frac{2n\pi}{\|\lambda\|^2}\lambda)$ の $\mathfrak{a}$ への作用は超平面 $\langle \lambda, H \rangle = n\pi$ に関する鏡映であり，$(s_\alpha, \frac{(2n+1)\pi}{\|\alpha\|^2}\alpha)$ の $\mathfrak{a}$ への作用は超平面 $\langle \alpha, H \rangle = \frac{2n+1}{2}\pi$ に関する鏡映である．

命題 1.10. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を対称三対とする．$\tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ はセルの全体に推移的に作用する．

命題 1.11. セル P_0 を任意に選び固定すると $\mathfrak{a} = \bigcup_{s \in \tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)} s\overline{P_0}$.

$$W_0 = \{\alpha \in W^+ \mid \alpha + \lambda \notin W \quad (\lambda \in \Pi)\} \tag{1.1}$$

とおく．明らかに $W_0 \neq \emptyset$ となる．

定義 1.12. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の対称三対とする．$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ とおく．写像 $m, n : \tilde{\Sigma} \to \mathbb{R}^+$ で次の条件を満たすものを考える．

(1) $m(\lambda) = m(-\lambda), \quad n(\alpha) = n(-\alpha)$ であり

$$m(\lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda \in \Sigma, \quad n(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \alpha \in W.$$

(2) $\lambda \in \Sigma, \alpha \in W, s \in W(\Sigma)$ のとき，$m(\lambda) = m(s\lambda), n(\alpha) = n(s\alpha)$

(3) $\sigma \in W(\tilde{\Sigma}), \lambda \in \tilde{\Sigma}$ のとき，$n(\lambda) + m(\lambda) = n(\sigma\lambda) + m(\sigma\lambda)$

(4) $\lambda \in \Sigma \cap W, \alpha \in W$ とする．
$\frac{2\langle \alpha, \lambda \rangle}{\|\alpha\|^2}$ が偶数のとき，$m(\lambda) = m(s_\alpha\lambda)$,
$\frac{2\langle \alpha, \lambda \rangle}{\|\alpha\|^2}$ が奇数のとき，$m(\lambda) = n(s_\alpha\lambda)$.

このとき，$m(\lambda), n(\alpha)$ をそれぞれ λ, α の**重複度**という．重複度が与えられた対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を**重複度付き対称三対**と言う．$H \in \mathfrak{a}$ に対して

$$m_H = -\sum_{\substack{\lambda \in \Sigma^+ \\ \langle \lambda, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} m(\lambda) \cot(\langle \lambda, H \rangle)\lambda + \sum_{\substack{\alpha \in W^+ \\ \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} n(\alpha) \tan(\langle \alpha, H \rangle)\alpha.$$

とおき，m_H を H の**平均曲率ベクトル**という．

$$F(H) = -\sum_{\substack{\lambda \in \Sigma^+ \\ \langle \lambda, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} m(\lambda) \log|\sin(\langle \lambda, H \rangle)| - \sum_{\substack{\alpha \in W^+ \\ \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} n(\alpha) \log|\cos(\langle \alpha, H \rangle)|$$

とおく．$\mathrm{Vol}(H) = \exp(-F(H))(> 0)$ を H の**体積**と呼ぶ．

注意 重複度付き対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ について次が成り立つ．$\lambda \in \Sigma \cap W, \alpha \in W$ とする．重複度の条件 (3), (4) より
$\frac{2\langle \alpha, \lambda \rangle}{\|\alpha\|^2}$ が偶数のとき，$n(\lambda) = n(s_\alpha \lambda)$,
$\frac{2\langle \alpha, \lambda \rangle}{\|\alpha\|^2}$ が奇数のとき，$n(\lambda) = m(s_\alpha \lambda)$.
重複度の条件 (3) より $\sigma W(\tilde{\Sigma}), \lambda, \sigma\lambda \in \Sigma - W$ のとき，$m(\lambda) = m(s\lambda)$.
$\sigma \in W(\tilde{\Sigma}), \lambda, \sigma\lambda \in W - \Sigma$ のとき，$n(\lambda) = n(s\lambda)$.
$\sigma \in W(\tilde{\Sigma}), \lambda \in \Sigma - W, \sigma\lambda \in W - \Sigma$ のとき，$m(\lambda) = n(s\lambda)$.

注意 $\tilde{\Sigma}$ は既約ルート系なので重複度の条件 (3) は次のように言い換えることができる．$\lambda, \mu \in \tilde{\Sigma}$. $\|\lambda\| = \|\mu\|$ のとき $m(\lambda) + n(\lambda) = m(\mu) + n(\mu)$.

命題 1.13. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の重複度付き対称三対とする．$H \in \mathfrak{a}, \sigma = (s, X)$ を Affine Weyl 群の元とし $H' = \sigma H \in \mathfrak{a}$ とおく．このとき，

$$\mathrm{Vol}(H') = \mathrm{Vol}(H), \quad m_{H'} = s m_H$$

定義 1.14. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の重複度付き対称三対とする．$H \in \mathfrak{a}$ が**極小**であるとは $m_H = 0$ となるときを言う．

定義 1.15. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の重複度付き対称三組とする．$H \in \mathfrak{a}$ が **austere 点**であるとは

$$\begin{aligned} &\{-\lambda \cot(\langle \lambda, H \rangle)\ (\text{重複度} = m(\lambda)) \mid \lambda \in \Sigma^+, \langle \lambda, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\} \\ &\cup \{\alpha \tan(\langle \alpha, H \rangle)\ (\text{重複度} = n(\alpha)) \mid \alpha \in W^+, \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\} \end{aligned} \tag{1.2}$$

によって定義される $\mathfrak{a}$ 内の部分集合が重複度も含めて -1 倍に関して不変になるときを言う．

明らかに次の命題が成り立つ.

命題 1.16. 次が成り立つ.

(1) 全測地点は任意に与えた重複度に関して austere 点である.

(2) austere 点は極小点である.

定理 1.17. $H \in \mathfrak{a}$ が austere 点となるための必要十分条件は

(1) $\langle \lambda, H \rangle \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ が任意の $\lambda \in (\Sigma - W) \cup (W - \Sigma)$ について成り立つ.
(2) $2H \in \Gamma_{\Sigma \cap W}$.
(3) $m(\lambda) = n(\lambda)$ が $\langle \lambda, H \rangle \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ を満たす任意の $\lambda \in \Sigma \cap W$ について成り立つ.

次の定理を述べるために既約ルート系の正ルートを次のように表す：

$$B_r^+ = \{e_i, e_i \pm e_j\}, \quad C_r^+ = \{2e_i, e_i \pm e_j\},$$
$$BC_r^+ = \{e_i, 2e_i, e_i \pm e_j\}, \quad D_r^+ = \{e_i \pm e_j\},$$

その他のルート系の記号は [1] に合わせる.

定理 1.18. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の対称三対とする. このとき, $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ は次のいずれかの形になる. (1.1) によって定義される集合 W_0 は一元のみからなる. これを $W_0 = \{\tilde{\alpha}\}$ と表し, 下の表に記述する.

(I) $\Sigma \supset W, \Sigma \neq W$ の場合

型	Σ^+	W^+	$\tilde{\alpha}$
(I-B_r)	B_r^+	$\{e_i\}$	e_1
(I-C_r)	C_r^+	D_r^+	$e_1 + e_2$
(I-BC_r-A_1^r)	BC_r^+	$\{e_i\}$	e_1
(I-BC_r-B_r)	BC_r^+	B_r^+	$e_1 + e_2$
(I-F_4)	F_4^+	F_4^+ の短いルート $\cong D_4^+$	e_1

(II) $\Sigma \subset W, \Sigma \neq W$ の場合

型	Σ^+	W^+	$\tilde{\alpha}$
(II-BC_r) $(r \geq 1)$	B_r^+	BC_r^+	$2e_1$
(I'-C_r)	D_r^+	C_r^+	$2e_1$

(I') $\Sigma \neq W$ で (I),(II) 以外の場合

(I'-F_4) 型

$$\begin{aligned}
\Sigma^+ &= \{F_4^+\text{の短いルート}\} \cup \{e_1 \pm e_2, e_3 \pm e_4\} \cong C_4, \\
W^+ &= \{F_4^+\text{の短いルート}\} \cup \{e_1 \pm e_3, e_1 \pm e_4, e_2 \pm e_3, e_2 \pm e_4\}, \\
\tilde{\alpha} &= e_1 + e_3.
\end{aligned}$$

(I'-B_r) 型 ($r \geq 3$)

$$\Sigma^+ = B_s^+ \cup B_{r-s}^+, \quad W^+ = (B_r^+ - \Sigma) \cup \{e_i\}, \quad \tilde{\alpha} = e_1 + e_{s+1}.$$

(I'-BC_r-A_1^r) 型

$$\Sigma^+ = BC_s^+ \cup BC_{r-s}^+, \quad W^+ = (BC_r^+ - \Sigma) \cup \{e_i\}, \quad \tilde{\alpha} = e_1 + e_{s+1}.$$

(III) $\tilde{\Sigma} = \Sigma = W$ となる場合，$\tilde{\alpha}$ は $\tilde{\Sigma}$ の最高ルート.

同値関係

$$\begin{aligned}
&(\text{I-}F_4)\sim(\text{I'-}F_4), \quad (\text{I-}BC_r\text{-}A_1^r)\sim(\text{I'-}BC_r\text{-}A_1^r), \\
&(\text{I-}C_r)\sim(\text{I'-}C_r). \quad (\text{I-}B_r)\sim(\text{I'-}B_r)
\end{aligned}$$

が成り立つ.

系 1.19. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を対称三対とする.

$$P_0 = \left\{ H \in \mathfrak{a} \mid \langle \tilde{\alpha}, H \rangle < \frac{\pi}{2}, 0 < \langle \lambda, H \rangle \quad (\lambda \in \Pi) \right\}$$

とおくと P_0 はセルになる.

$\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ と表す．補題 1.4 より整数 $m_i \in \mathbb{Z}$ が存在して $\tilde{\alpha} = \sum m_i \alpha_i$. 定理 1.18 より $m_i \geq 1$ となることがわかる．よって $1 \leq i \leq r$ となる任意の i に対して $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_r, \tilde{\alpha}\}$ は線形独立である. よって $H_i \in \mathfrak{a}$ を次の式で定義することができる.

$$\langle H_i, \tilde{\alpha} \rangle = \frac{\pi}{2}, \quad \langle H_i, \alpha_j \rangle = 0 \quad (j \neq i).$$

このとき,

$$P_0 = \left\{ \sum_{i=1}^r t_i H_i \,\middle|\, 0 < t_i, \ \sum_{i=1}^r t_i < 1 \right\}.$$

系 1.20. $H \in \overline{P_0}$ が全測地点となるための必要十分条件は $H = 0$ または $m_i = 1$ となる i に対して $H = H_i$.

系 1.21. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の重複度付き対称三組とする. $H \in \overline{P_0}$ が austere 点となるための条件は次を満たすことである.

(1) $\lambda \in \Sigma^+ - W^+$ に対して $\langle \lambda, H \rangle = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$.
(2) $\alpha \in W^+ - \Sigma^+$ に対して $\langle \alpha, H \rangle = 0, \pm\frac{\pi}{2}$.
(3) $\alpha \in \Sigma^+ \cap W^+$ に対して $\langle \alpha, H \rangle = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$.
(4) $\langle \alpha, H \rangle = \frac{\pi}{4}$ となる $\alpha \in \Sigma^+ \cap W^+$ に対して $m(\alpha) = n(\alpha)$.

$H \in \overline{P_0}$ を全測地点ではない austere 点とすると H は次のいずれかの形になる.

$$H = \begin{cases} H_i & (m_i = 2), \\ \frac{1}{2}H_i & (m_i = 1), \\ \frac{1}{2}(H_i + H_j) & (m_i = m_j = 1) \end{cases}$$

部分集合 $\Delta \subset \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}$ に対して

$$P_0^\Delta = \left\{ H \in \overline{P_0} \;\middle|\; \begin{array}{l} \langle \lambda, H \rangle > 0 \quad (\lambda \in \Delta \cap \Pi), \\ \langle \lambda, H \rangle = 0 \quad (\lambda \in \Pi - \Delta), \\ \langle \tilde{\alpha}, H \rangle \begin{cases} < \frac{\pi}{2} & (\tilde{\alpha} \in \Delta \text{のとき}), \\ = \frac{\pi}{2} & (\tilde{\alpha} \notin \Delta \text{のとき}) \end{cases} \end{array} \right\}$$

とおくと

$$\overline{P_0} = \bigcup_{\Delta \subset \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}} P_0^\Delta \quad (\text{互いに素な和}) \tag{1.3}$$

であり, $\Delta_1, \Delta_2 \subset \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}$ に対して $\Delta_1 \subset \Delta_2 \Leftrightarrow P_0^{\Delta_1} \subset \overline{P_0^{\Delta_2}}$.

定理 1.22. 任意の $\Delta \subset \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}$ に対してただ一つの極小点 $H \in P_0^\Delta$ が存在する.

2 全測地点と austere 点

各重複度付き対称三対 (の代表元) に対して全測地点と austere 点を分類する.

2.1 (I-B_r) 型

$$\Pi = \{\alpha_1 = e_1 - e_2, \cdots, \alpha_{r-1} = e_{r-1} - e_r, \alpha_r = e_r\}, \quad \tilde{\alpha} = e_1 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$$

となるので $H_i = \frac{\pi}{2\|e_1\|^2} \sum_{j=1}^{i} e_j \ (1 \leq i \leq r)$.

$H \in \overline{P_0}$ が全測地点 $\Leftrightarrow$ H は $\overline{P_0}$ の頂点.

重複度の条件より $m_1 > 0$, $m_2 > 0$, $n_1 > 0$ が存在して

$$m_1 = m(e_i),\ m_2 = m(e_i \pm e_j),\ n_1 = n(e_i).$$

$m_1 = n_1$ のとき，$H \in \overline{P_0}$ が全測地的でない austere 点となるための条件は

$$H = \frac{1}{2} H_r.$$

$m_1 \neq n_1$ のとき $H \in \overline{P_0}$ が austere 点ならば全測地点である.

2.2 (I-C_r) 型

$$\Pi = \{\alpha_1 = e_1 - e_2, \cdots, \alpha_{r-1} = e_{r-1} - e_r, \alpha_r = 2e_r\},$$
$$\tilde{\alpha} = e_1 + e_2 = \alpha_1 + 2\sum_{i=2}^{r-1} \alpha_i + \alpha_r$$

となるので

$$H_1 = \frac{\pi}{2\|e_1\|^2} e_1,\ H_j = \frac{\pi}{4\|e_1\|^2} \sum_{i=1}^{j} e_i \quad (2 \leq j \leq r).$$

$H \in \overline{P_0}$ が全測地点 $\Leftrightarrow$ $H = 0, H_1, H_r$.

$r \geq 3$ のとき重複度の条件より $m_1 > 0, m_2 > 0$ が存在して

$$m_1 = m(e_i \pm e_j) = n(e_i \pm e_j), \quad m_2 = m(2e_i).$$

$r = 2$ のとき，

$$m_1 = m(e_1 \pm e_2),\ m_2 = m(2e_i),\ n_1 = n(e_1 \pm e_2).$$

$H \in \overline{P_0}$ が全測地点ではない austere 点になるための必要十分条件は

$$H = H_i \ (2 \leq i \leq r-1),\ \frac{1}{2} H_1$$

2.3 (I-BC_r-A_1^r) 型

$\tilde{\alpha} = \sum_{i=1}^r \alpha_i$ となる．H_i は

$$H_i = \frac{\pi}{2\|e_1\|^2}\sum_{j=1}^{i} e_j \quad (1 \leq i \leq r).$$

$H \in \overline{P_0}$ が全測地点 $\Leftrightarrow$ H は $\overline{P_0}$ の頂点．

重複度の条件より $m_1 > 0, m_2 > 0, m_3 > 0, n_1 > 0$ が存在して

$$m_1 = m(e_i),\ m_2 = m(e_i \pm e_j),\ m_3 = m(2e_i),\ n_1 = n(e_i).$$

$m_1 = n_1$ のとき，$H \in \overline{P_0}$ が全測地点ではない austere 点になるための必要十分条件は $H = \frac{1}{2}H_r$.

$m_1 \neq n_1$ のとき，$H \in \overline{P_0}$ が austere 点ならば全測地点である．

2.4 (I-BC_r-B_r) 型

$$\Pi = \{\alpha_1 = e_1 - e_2, \cdots, \alpha_{r-1} = e_{r-1} - e_r, \alpha_r = e_r\},$$
$$\tilde{\alpha} = e_1 + e_2 = \alpha_1 + 2\sum_{i=2}^{r}\alpha_i$$

となるので

$$H_1 = \frac{\pi}{2\|e_1\|^2}e_1, \quad H_j = \frac{\pi}{4\|e_1\|^2}\sum_{i=1}^{j} e_i \quad (2 \leq j \leq r).$$

$H \in \overline{P_0}$ が全測地点 $\Leftrightarrow$ $H = 0, H_1$.

重複度の条件は次のようになる．$r \geq 3$ のとき，

$$m(e_i) = n(e_i) = \text{const}, \quad m(e_i \pm e_j) = n(e_i \pm e_j) = \text{const}, \quad m(2e_i) = \text{const}.$$

$r = 2$ のとき，

$$m(e_i) = n(e_i) = \text{const}, \quad m(2e_i) = \text{const}.$$

$r \geq 3$ のとき，$H \in \overline{P_0}$ が全測地点ではない austere 点になるための必要十分条件は $H = \frac{1}{2}H_1$, H_i $(2 \leq i \leq r)$.

$r=2$ のとき，$H \in \overline{P_0}$ が全測地点ではない austere 点になるための必要十分条件は次のようになる：

$m(e_1 \pm e_2) = n(e_1 \pm e_2)$ のときは $H = \frac{1}{2}H_1$，H_2.

$m(e_1 \pm e_2) \neq n(e_1 \pm e_2)$ のときは $H = H_2$.

2.5 (I-F_4) 型

$$\Pi = \left\{\alpha_1 = e_2 - e_3, \alpha_2 = e_3 - e_4, \alpha_3 = e_4, \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)\right\},$$
$$\tilde{\alpha} = e_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4$$

となるので

$$H_1 = \frac{\pi}{2\|e_1\|^2}(e_1 + e_2), \quad H_2 = \frac{\pi}{4\|e_1\|^2}(2e_1 + e_2 + e_3),$$
$$H_3 = \frac{\pi}{6\|e_1\|^2}(3e_1 + e_2 + e_3 + e_4), \quad H_4 = \frac{\pi}{2\|e_1\|^2}e_1$$

$H \in \overline{P_0}$ が全測地点 $\Leftrightarrow H = 0, H_1$.

重複度の条件より各 $\alpha \in W$ に対して $m(\alpha) = n(\alpha)$.

$H \in \overline{P_0}$ が全測地点ではない austere 点になるための条件は $H = H_4$.

2.6 (II-BC_r) 型 $(r \geq 1)$

$$\Pi = \{\alpha_1 = e_1 - e_2, \cdots, \alpha_{r-1} = e_{r-1} - e_r, \alpha_r = e_r\}, \quad \tilde{\alpha} = 2e_1 = 2\sum_{i=1}^{r}\alpha_i$$

となるので

$$H_i = \frac{\pi}{4\|e_1\|^2}\sum_{j=1}^{i} e_j \quad (1 \leq i \leq r).$$

$H \in \overline{P_0}$ が全測地点 $\Leftrightarrow H = 0$.

重複度の条件より $n_1 > 0$, $n_2 > 0$, $n_3 > 0$ が存在して

$$n_1 = n(e_i) = m(e_i), \quad n_2 = n(e_i \pm e_j) = m(e_i \pm e_j), \quad n_3 = n(2e_i).$$

よって $H \in \overline{P_0}$ が全測地点ではない austere 点になるための必要十分条件は $H = H_i$ $(1 \leq i \leq r)$.

2.7 (III-A_r) 型

$$\Pi = \{\alpha_1 = e_1 - e_2, \cdots, \alpha_{r-1} = e_{r-1} - e_r, \alpha_r = e_r - e_{r+1}\},$$
$$\tilde{\alpha} = e_1 - e_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$$

となるので

$$H_j = \frac{\pi}{2(r+1)\|e_1\|^2}\left((r+1-j)\sum_{i=1}^{j} e_i - j\sum_{i=j+1}^{r+1} e_i\right)$$

系 1.20 より $H \in \overline{P_0}$ が全測地点 $\Leftrightarrow$ H が $\overline{P_0}$ の頂点

重複度の条件より $m > 0$ が存在して任意の $\lambda \in \tilde{\alpha}$ に対して $m = m(\lambda) = n(\lambda)$.

$H \in \overline{P_0}$ が全測地点以外の austere 点になるための条件は

$$H = \frac{1}{2}H_i, \frac{1}{2}(H_i + H_j)\ (i < j).$$

2.8 (III-B_r) 型

$$\Pi = \{\alpha_1 = e_1 - e_2, \cdots, \alpha_{r-1} = e_{r-1} - e_r, \alpha_r = e_r\},$$
$$\tilde{\alpha} = e_1 + e_2 = \alpha_1 + 2\sum_{i=2}^{r} \alpha_i$$

となるので

$$H_1 = \frac{\pi}{2\|e_1\|^2}e_1, \quad H_j = \frac{\pi}{4\|e_1\|^2}\sum_{i=1}^{j} e_i \quad (2 \leq j \leq r).$$

$H \in \overline{P_0}$ が全測地点 $\Leftrightarrow$ $H = 0, H_1$.

重複度の条件は次のようになる．$r \geq 3$ のとき，$m_1 > 0, m_2 > 0$ が存在して

$$m_1 = m(e_i) = n(e_i), \quad m_2 = m(e_i \pm e_j) = n(e_i \pm e_j) \quad (i \neq j).$$

$r=2$ のとき，$m_1>0, m_2>0, n>0$ が存在して

$$m_1=m(e_i)=n(e_i),\quad m_2=m(e_1\pm e_2),\quad n=n(e_1\pm e_2).$$

$H\in\overline{P_0}$ が全測地点でない austere 点になるための必要十分条件は

$$H=\frac{1}{2}H_1,\ H_i\ (2\leq i\leq r).$$

2.9 (III-C_r) 型

$$\begin{aligned}\Pi&=\{\alpha_1=e_1-e_2,\cdots,\alpha_{r-1}=e_{r-1}-e_r,\alpha_r=2e_r\},\\ \tilde{\alpha}&=2e_1=2\sum_{i=1}^{r-1}\alpha_i+\alpha_r\end{aligned}$$

となるので

$$H_i=\frac{\pi}{4\|e_1\|^2}\sum_{j=1}^{i}e_j\quad(1\leq i\leq r).$$

$H\in\overline{P_0}$ が全測地点 $\Leftrightarrow H=0,H_r$.

重複度の条件より $m_1>0, m_2>0, n_2>0$ が存在して

$$m_1=m(e_i\pm e_j)=n(e_i\pm e_j),\quad m_2=m(2e_i),\quad n_2=n(2e_i)$$

$H\in\overline{P_0}$ が全測地点ではない austere 点になるための必要十分条件は次で与えられる.

(1) $m_2\neq n_2$ のとき，$H=H_i\ (1\leq i\leq r-1)$

(2) $m_2=n_2$ のとき，$H=H_i\ (1\leq i\leq r-1), \frac{1}{2}H_r$

2.10 (III-BC_r) 型

$$\begin{aligned}\Pi&=\{\alpha_1=e_1-e_2,\cdots,\alpha_{r-1}=e_{r-1}-e_r,\alpha_r=e_r\},\\ \tilde{\alpha}&=2e_1=2\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\end{aligned}$$

となるので

$$H_i = \frac{\pi}{4\|e_1\|^2}\sum_{j=1}^{i} e_j \quad (1 \leq i \leq r).$$

$H \in \overline{P_0}$ が全測地点 $\Leftrightarrow H = 0$.

重複度の条件は次のようになる：

$r = 2$ のとき，$m_1 > 0$ が存在して $m_1 = m(e_i) = n(e_i)$.

$r \geq 3$ のとき，$m_1 > 0, m_2 > 0, m_3 > 0, n_3 > 0$ が存在して

$$m_1 = m(e_i) = n(e_i),\ m_2 = m(e_i \pm e_j) = n(e_i \pm e_j),$$
$$m_3 = m(2e_i),\ n_3 = n(2e_i).$$

よって $H \in \overline{P_0}$ が全測地点でない austere 点となるための条件は $H = H_i\ (1 \leq i \leq r)$.

2.11 (III-D_r) 型

$$\Pi = \{\alpha_1 = e_1 - e_2, \alpha_2 = e_2 - e_3, \cdots, \alpha_{r-1} = e_{r-1} - e_r, \alpha_r = e_{r-1} + e_r\},$$
$$\tilde{\alpha} = e_1 + e_2 = \alpha_1 + 2\sum_{i=2}^{r-2}\alpha_i + \alpha_{r-1} + \alpha_r$$

となるので

$$H_1 = \frac{\pi}{2\|e_1\|^2}e_1, H_{r-1} = \frac{\pi}{4\|e_1\|^2}\left(\sum_{j=1}^{r-1} e_j - e_r\right), H_r = \frac{\pi}{4\|e_1\|^2}\sum_{j=1}^{r} e_j$$
$$H_i = \frac{\pi}{4\|e_1\|^2}\sum_{j=1}^{i} e_j\ (2 \leq i \leq r-2)$$

系 1.20 より $H \in \overline{P_0}$ が全測地点 $\Leftrightarrow H = 0, H_1, H_{r-1}, H_r$.

重複度の条件より $m > 0$ が存在して任意の $\lambda \in \tilde{\alpha}$ に対して $m = m(\lambda) = n(\lambda)$.

$H \in \overline{P_0}$ が全測地点以外の austere 点となるための条件は

$$H = H_i\ (2 \leq i \leq r-2), \frac{1}{2}H_1, \frac{1}{2}H_{r-1}, \frac{1}{2}H_r,$$
$$\frac{1}{2}(H_1 + H_{r-1}), \frac{1}{2}(H_1 + H_r), \frac{1}{2}(H_{r-1} + H_r).$$

2.12 (III-E_6) 型

$$\tilde{\alpha} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6$$

となるので系 1.20 より $H \in \overline{P_0}$ が全測地点となるための条件は $H = 0, H_1, H_6$.

重複度の条件より $m > 0$ が存在して任意の $\lambda \in \tilde{\alpha}$ に対して $m = m(\lambda) = n(\lambda)$. $H \in \overline{P_0}$ が全測地点でない austere 点になるための条件は

$$H = H_2, H_3, H_5, \frac{1}{2}H_1, \frac{1}{2}H_6, \frac{1}{2}(H_1 + H_6)$$

H_4 は austere ではない極小点になる.

2.13 (III-E_7) 型

$$\tilde{\alpha} = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7$$

となるので系 1.20 より $H \in \overline{P_0}$ が全測地点となるための条件は $H = 0, H_7$.
$H \in \overline{P_0}$ が全測地点でない austere 点になるための条件は

$$H = H_1, H_2, H_6, \frac{1}{2}H_7.$$

H_3, H_4, H_5 は austere ではない極小点になる.

2.14 (III-E_8) 型

$$\tilde{\alpha} = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8$$

となるので系 1.20 より $H \in \overline{P_0}$ が全測地点となるための条件は $H = 0$.
重複度の条件より $m > 0$ が存在して任意の $\lambda \in \tilde{\alpha}$ に対して $m = m(\lambda) = n(\lambda)$. $H \in \overline{P_0}$ が全測地点でない austere 点になるための条件は $H = H_1, H_8$.

$H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7$ は austere ではない極小点になる.

2.15 (III-F_4) 型

$$\Pi = \left\{\alpha_1 = e_2 - e_3, \alpha_2 = e_3 - e_4, \alpha_3 = e_4, \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)\right\},$$
$$\tilde{\alpha} = e_1 + e_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$$

となるので

$$H_1 = \frac{\pi}{4\|e_1\|^2}(e_1 + e_2), \quad H_2 = \frac{\pi}{6\|e_1\|^2}(2e_1 + e_2 + e_3),$$
$$H_3 = \frac{\pi}{8\|e_1\|^2}(3e_1 + e_2 + e_3 + e_4), \quad H_4 = \frac{\pi}{2\|e_1\|^2}e_1.$$

系 1.20 より次が従う. $H \in \overline{P_0}$ が全測地点 $\Leftrightarrow H = 0$.
重複度の条件より $m_1 > 0, m_2 > 0$ が存在して

$$m_1 = m(短) = n(短), \quad m_2 = m(長) = n(長)$$

$H \in \overline{P_0}$ が全測地点でない austere 点 $\Leftrightarrow H = H_1, H_4$.
H_2, H_3 は austere 点ではない極小点になる.

2.16 (III-G_2) 型

$$\Pi = \{\alpha_1 = e_1 - e_2, \alpha_2 = -2e_1 + e_2 + e_3\}, \quad \tilde{\alpha} = -e_1 - e_2 + 2e_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$$

となるので

$$H_1 = \frac{\pi}{6\|e_1\|^2}(2\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\pi}{6\|e_1\|^2}(-e_2 + e_3),$$
$$H_2 = \frac{\pi}{12\|e_1\|^2}\tilde{\alpha} = \frac{\pi}{12\|e_1\|^2}(-e_1 - e_2 + 2e_3).$$

系 1.20 より次が従う. $H \in \overline{P_0}$ が全測地点 $\Leftrightarrow H = 0$.
重複度の条件より $m_1 > 0, m_2 > 0$ が存在して

$$m_1 = m(短) = n(短), \quad m_2 = m(長) = n(長)$$

$H \in \overline{P_0}$ が全測地点でない austere 点 $\Leftrightarrow H = H_2$.
H_1 は austere 点ではない極小点になる.

3 Hermann作用の軌道空間

3.1 一般的な場合

$(G, K_1), (G, K_2)$ を二つのcompact対称対とする：即ち，G はcompact連結Lie群で G 上に二つの回帰的自己同型写像 θ_i $(i = 1, 2)$ が存在して $(G_{\theta_i})_0 \subset K_i \subset G_{\theta_i}$ が成り立つとする．ここで G_{θ_i} は $G_{\theta_i} = \{g \in G \mid \theta_i(g) = g\}$ によって定義される G の閉部分群で $(G_{\theta_i})_0$ は G_{θ_i} の単位元を含む連結成分である．G に $\mathrm{Aut}(G)$-不変Riemann計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を入れておく．商多様体 $M_i = G/K_i$ $(i = 1, 2)$ は $\langle\ ,\ \rangle$ から誘導される G-不変Riemann計量(これも $\langle\ ,\ \rangle$ と表す)に関してcompact Riemann対称空間である．G のLie環を $\mathfrak{g}$，K_1, K_2 のLie環をそれぞれ $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$ と表し，θ_i の誘導する $\mathfrak{g}$ 上の回帰的自己同型写像も θ_i と表す．$\mathfrak{g}$ を二通りに標準分解する：θ_i の -1 固有空間を $\mathfrak{m}_i$ と表すと

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_i \oplus \mathfrak{m}_i \quad (i = 1, 2) \qquad (\text{標準分解})$$

$\pi_i : G \to M_i$ で自然な射影を表す．M_1 内の K_2-軌道空間 $\{K_2\pi_1(g) \mid g \in G\}$ について考察するために G に次で同値関係 $\sim$ を入れる：

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow k_1 \in K_1, k_2 \in K_2 \text{が存在して } g_2 = k_2 g_1 k_1^{-1}.$$

このとき，

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow K_2\pi_1(g_2) = K_2\pi_1(g_1)$$

となるので，K_2-軌道空間は $K_2\backslash G/K_1$ と同一視することができる．次の写像は $K_2\backslash G/K_1$ と $K_1\backslash G/K_2$ の間の全単射を与える：

$$K_2\backslash G/K_1 \cong K_1\backslash G/K_2; [g] \leftrightarrow [g^{-1}].$$

G の閉部分群 G_{12} を

$$G_{12} = \{g \in G \mid \theta_1(g) = \theta_2(g)\}$$

と定める．G_{12} 上の回帰的自己同型写像 $\theta = \theta_1 = \theta_2$ を考える．G_{12} の単位元を含む連結成分 $(G_{12})_0$ の閉部分群 K_{12} を

$$K_{12} \;=\; \{g \in (G_{12})_0 \mid \theta(g) = g\}$$

と定める．このとき，$((G_{12})_0, K_{12})$ はcompact対称対である．G_{12} のLie環 $\mathfrak{g}_{12}$ の標準分解は

$$\mathfrak{g}_{12} = (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2).$$

$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ を極大可換部分空間とする．$\exp \mathfrak{a}$ は $(G_{12})_0$ の閉集合，従って，トーラスになる．M_1 への K_2-作用は $\pi_1(\exp \mathfrak{a})$ を切断とする超極作用であり，余等質性は $\dim \mathfrak{a}$ になる ([3])．K_2-軌道空間について更に調べるために群 $\tilde{J}$ を

$$\tilde{J} = \{([s], Y) \in N_{K_2}(\mathfrak{a})/Z_{K_1 \cap K_2}(\mathfrak{a}) \ltimes \mathfrak{a} \mid \exp(-Y)s \in K_1\}.$$

と定義する．積は $([s_1], Y_1)([s_2], Y_2) = ([s_1 s_2], \mathrm{Ad}(s_1)Y_2 + Y_1)$ となっている．逆元は $([s], Y)^{-1} = ([s^{-1}], -\mathrm{Ad}(s^{-1})Y)$ となる．$Z_{K_2}(\mathfrak{a})$ は $N_{K_2}(\mathfrak{a})$ の正規部分群である．$i = 1, 2$ に対して商群 $N_{K_i}(\mathfrak{a})/Z_{K_i}(\mathfrak{a})$ を $W_i(\mathfrak{a})$ と表す．

$$\varphi_2 : N_{K_2}(\mathfrak{a})/Z_{K_1 \cap K_2}(\mathfrak{a}) \to W_2(\mathfrak{a})$$

で自然な全射準同型写像を表す．$\tilde{J}$ は $\mathfrak{a}$ に次のようにして自然に作用する：

$$([s], Y)Z = \mathrm{Ad}(\varphi_2(s))Z + Y.$$

上を踏まえて以下，$[s] = \mathrm{Ad}(\varphi_2(s))$ と表す．

命題 3.1. [13]　$K_2 \backslash G / K_1 \cong \mathfrak{a}/\tilde{J}$.

注意 3.2. 群 $\tilde{J}_{12}$ を $\tilde{J}$ の定義における K_1 と K_2 の役割を交換して

$$\tilde{J}_{12} = \{(\mathrm{Ad}(t), Z) \in N_{K_1}(\mathfrak{a})/Z_{K_1 \cap K_2}(\mathfrak{a}) \ltimes \mathfrak{a} \mid \exp(-Z)t \in K_2\}$$

と定義すると群の同型

$$\tilde{J} \cong \tilde{J}_{12}; (\mathrm{Ad}(s), Y) \leftrightarrow (\mathrm{Ad}(\exp(-Y)s), -Y)$$

が成り立つ．これにより軌道の対応

$$\begin{aligned} &\mathfrak{a}/\tilde{J} \cong K_2 \backslash G / K_1 \cong K_1 \backslash G / K_2 \cong \mathfrak{a}/\tilde{J}_{12}, \\ &[H] \leftrightarrow K_2 \pi_1(\exp H) \leftrightarrow K_1 \pi_2(\exp(-H)) \leftrightarrow [-H] \end{aligned}$$

が得られる．

補題 3.3. $W_i(\mathfrak{a})$ は有限群である．

$\mathfrak{g}_{12}$ の $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系を Σ で表す．compact 対称対 $(G_{12}, K_1 \cap K_2)$ の Weyl 群 $N_{K_1 \cap K_2}(\mathfrak{a})/Z_{K_1 \cap K_2}(\mathfrak{a})$ は $\{s_\lambda \mid \lambda \in \Sigma\}$ で生成されるのでこれを $W(\Sigma)$ と表す：$W(\Sigma) = N_{K_1 \cap K_2}(\mathfrak{a})/Z_{K_1 \cap K_2}(\mathfrak{a})$．$W(\Sigma)$ は $W_2(\mathfrak{a})$ の部

分群とみなせる．同様に $W(\Sigma)$ を $W_1(\mathfrak{a})$ の部分群とみることもできる．ゆえに $\mathfrak{a}$ への変換群として $W(\Sigma) \subset W_1(\mathfrak{a}) \cap W_2(\mathfrak{a})$. $\lambda \in \Sigma$ に対して $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ の部分空間 $\mathfrak{m}_\lambda$ と $\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2$ の部分空間 $\mathfrak{k}_\lambda$ を次で定める：

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_\lambda &= \{X \in \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \mid [H,[H,X]] = -\langle \lambda, H\rangle^2 X \quad (H \in \mathfrak{a})\},\\ \mathfrak{k}_\lambda &= \{X \in \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2 \mid [H,[H,X]] = -\langle \lambda, H\rangle^2 X \quad (H \in \mathfrak{a})\}.\end{aligned}$$

Σ の基本系を Π と表す．Π に関する正の制限ルート全部を Σ^+ と表す．$\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{g}_{12}$ の極大可換部分換 $\mathfrak{t}$ をとる．$\mathfrak{g}_{12}$ の $\mathfrak{t}$ に関するルート系を $\tilde{R}$ で表す．$\mathfrak{t} \to \mathfrak{a}; H \mapsto \bar{H}$ で直交射影を表し，$\tilde{R}_0 = \{\alpha \in \tilde{R} \mid \bar{\alpha} = 0\}$ とおく．$\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2$ の部分環 $\mathfrak{k}_0$ を

$$\mathfrak{k}_0 = \{X \in \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2 \mid [\mathfrak{a}, X] = \{0\}\}$$

と定める．

補題 3.4. $\lambda \in \Sigma, n \in \mathbb{Z}$ とする．このとき，$(s_\lambda, \frac{2n\pi}{\|\lambda\|^2}\lambda) \in \tilde{J}$.

補題 3.5. $\lambda \in \Sigma$ に対して $m(\lambda) = \dim \mathfrak{m}_\lambda$ とおく．このとき，次が成り立つ．

(1) $m(\lambda) = m(-\lambda)$.
(2) $\mu \in \Sigma$ に対して $m(s_\mu \lambda) = m(\lambda)$.

$g \in G$ に対して

$$T_{\pi_1(g)}(K_2\pi_1(g)) = \left\{\frac{d}{dt}\exp tX\pi_1(g)_{|t=0} \mid X \in \mathfrak{k}_2\right\}$$

となるので

$$\begin{aligned}g_*^{-1}T_{\pi_1(g)}(K_2\pi_1(g)) &= \left\{\frac{d}{dt}\pi_1(\exp t\mathrm{Ad}(g^{-1})X)_{|t=0} \mid X \in \mathfrak{k}_2\right\}\\ &= (\mathrm{Ad}(g^{-1})\mathfrak{k}_2)_{\mathfrak{m}_1}\end{aligned}$$

直交補空間は

$$\begin{aligned}g_*^{-1}T^{\perp}_{\pi_1(g)}(K_2\pi_1(g)) &= \{X \in \mathfrak{m}_1 \mid \langle X, \mathrm{Ad}(g^{-1})\mathfrak{k}_2\rangle = 0\}\\ &= \{X \in \mathfrak{m}_1 \mid \mathrm{Ad}(g)X \in \mathfrak{m}_2\}.\end{aligned}$$

これは $\mathfrak{m}_1$ 内の Lie triple system である．K_2-作用の $\pi_1(g)$ におけるイソトロピー群は

$$\begin{aligned}(K_2)_{\pi_1(g)} &= \{k \in K_2 \mid k\pi_1(g) = \pi_1(g)\}\\ &= \{k \in K_2 \mid g^{-1}kg \in K_1\}\end{aligned}$$

補題 3.6. $\pi_1(g)$ の K_2-軌道のスライス表現は $(K_1)_{\pi_2(g^{-1})}$ の Lie triple system $\{X \in \mathfrak{m}_1 \mid \mathrm{Ad}(g)X \in \mathfrak{m}_2\}$ への随伴表現と同値である.

$x \in G$ の定める内部自己同型写像を τ_x と表す. $\rho \in \mathrm{Aut}(G)$ とする. G の等長同型写像 $G \to G; g \mapsto \rho(g)x^{-1}$ は 2 つの compact 対称空間 G/K_1 と $G/\tau_x\rho(K_1)$ の間の等長同型写像

$$G/K_1 \to G/\tau_x\rho(K_1); gK_1 \mapsto \rho(g)x^{-1}\tau_x\rho(K_1)$$

を引き起こす. $\pi_x : G \to G/\tau_x\rho(K_1)$ で自然な射影を表すと上の同型写像によって K_2-軌道 $K_2\pi_1(g)$ は $\rho(K_2)$-軌道 $\rho(K_2)\pi_x(\rho(g)x^{-1})$ にうつる. この対応により同一視 $K_2\backslash G/K_1 \cong \rho(K_2)\backslash G/\tau_x\rho(K_1)$ が得られる. ここで $K_i = G_{\theta_i}$ としてみると

$$\rho(K_2) = G_{\rho\theta_2\rho^{-1}}, \quad \tau_x\rho(K_1) = G_{\tau_x\rho\theta_1\rho^{-1}\tau_x^{-1}}$$

となる. 以上をふまえて次の定義をする：

定義 3.7. [14] $(\theta_1, \theta_2), (\theta_1', \theta_2')$ を G 上の 2 つの回帰的自己同型写像とする. 同値関係 $(\theta_1, \theta_2) \sim (\theta_1', \theta_2')$ を次で定義する：

$$\rho \in \mathrm{Aut}(G) \text{ と } x \in G \text{ が存在して} \theta_1' = \tau_x\rho\theta_1\rho^{-1}\tau_x^{-1}, \quad \theta_2' = \rho\theta_2\rho^{-1}.$$

上の定義の Lie 環版として次の定義をする：

定義 3.8. [14] $(\theta_1, \theta_2), (\theta_1', \theta_2')$ を $\mathfrak{g}$ 上の 2 つの回帰的自己同型写像とする. 同値関係 $(\theta_1, \theta_2) \sim (\theta_1', \theta_2')$ を次で定義する：$\rho \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ と $\mathfrak{g}$ の内部自己同型写像 τ が存在して $\theta_1' = \tau\rho\theta_1\rho^{-1}\tau^{-1}, \quad \theta_2' = \rho\theta_2\rho^{-1}$.

$\pi_1(\exp \mathfrak{a}) \subset M_1$ は K_2-作用の切断なので K_2-軌道 $K_2\pi_1(g)$ を考えるためには $g = \exp H$ $(H \in \mathfrak{a})$ と仮定してよい. このとき,

$$g_*^{-1}T^{\perp}_{\pi_1(g)}(K_2\pi_1(g)) = \{X \in \mathfrak{m}_1 \mid \mathrm{Ad}(\exp H)X \in \mathfrak{m}_2\}$$

となるので $\mathfrak{a}$ は $g_*^{-1}T^{\perp}_{\pi_1(g)}(K_2\pi_1(g))$ の極大可換部分空間でもある. 更に

$$\mathrm{Ad}((K_1)_{\pi_2(g^{-1})})\mathfrak{a} = \{X \in \mathfrak{m}_1 \mid \mathrm{Ad}(g)X \in \mathfrak{m}_2\}$$

となるので $\mathfrak{a}$ は法空間の標準形である.

定義 3.9. $\tilde{M}$ を Riemann 多様体，M を $\tilde{M}$ の部分多様体とし，M のシェイプ作用素を A で表わす．M の任意の点の任意の法ベクトル ξ に対して A_ξ の固有値が -1 倍に関して不変であり，-1 倍で対応する固有値の重複度が等しいとき，M を **austere 部分多様体**という．この定義より austere 部分多様体は極小部分多様体になる．

Austere 部分多様体の概念は Harvey-Lawson [4] が導入した．上で述べたことから次の補題が成り立つ．

補題 3.10. (1) $K_2\pi_1(g) \subset M_1$ が austere になるための必要十分条件は任意の $g_*\xi$ ($\xi \in \mathfrak{a}$) に対して形作用素 $A_{g_*\xi}$ の固有値が重複度も含めて -1 倍に関して不変になることである．

(2) $K_2\pi_1(g) \subset M_1$ が弱鏡映になるための必要十分条件は任意の $g_*\xi$ ($\xi \in \mathfrak{a}$) に鏡映 $\sigma_{g_*\xi}$ が存在することである．

$(\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_2)^\perp = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ となるので

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \tag{3.4}$$

が成り立つ．$\alpha \in \mathfrak{a}$ に対して $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の部分空間 $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ を

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \alpha, H\rangle X \quad (H \in \mathfrak{a})\}$$

と定め

$$\tilde{\Sigma} = \{\alpha \in \mathfrak{a} - \{0\} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) \neq \{0\}\}$$

とおくと

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, 0) \oplus \sum_{\alpha \in \tilde{\Sigma}} \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha). \tag{3.5}$$

$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{g}$ に関する共役を $^-$ で表すと $\overline{\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)} = \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, -\alpha)$ となるので $\alpha \in \tilde{\Sigma}$ ならば $-\alpha \in \tilde{\Sigma}$ となる．

$\theta_1\theta_2$ の $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ への作用の固有値の絶対値は 1 だから $\epsilon \in U(1)$ に対して $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ の部分空間 $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, \epsilon)$ を

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, \epsilon) = \{X \in \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) \mid \theta_1\theta_2 X = \epsilon X\}$$

と定めると

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) = \sum_{\epsilon \in U(1)} \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, \epsilon).$$

補題 3.11. $\mathfrak{z}$ で $\mathfrak{g}$ の中心を表す．$\tilde{\Sigma}$ は $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{z}^\perp$ のルート系である．

3.2 G が半単純で $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$ の場合

$\mathfrak{z} = \{0\}$ なので $\tilde{\Sigma}$ は $\mathfrak{a}$ のルート系である．このとき，

$$\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_2 = (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \oplus (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2)$$

となるので (3.4) より

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \oplus (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2)$$

また，

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2, \quad [\mathfrak{a}, \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2] \subset \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2$$

となる．

$$\sum_{\alpha \in \tilde{\Sigma}} \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, 1) = \left(\sum_{\lambda \in \Sigma} \mathfrak{k}_\lambda \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma} \mathfrak{m}_\lambda \right)^{\mathbb{C}}$$

となるので

$$\Sigma = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, 1) \neq \{0\}\}.$$

$\lambda \in \Sigma$ に対して

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \lambda, 1) \oplus \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, -\lambda, 1) = (\mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{m}_\lambda)^{\mathbb{C}}$$

$\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ と $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2$ の部分空間を

$$\begin{aligned} V(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) &= \{X \in \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \mid [\mathfrak{a}, X] = 0\}, \\ V(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2) &= \{X \in \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2 \mid [\mathfrak{a}, X] = 0\} \end{aligned}$$

と定める．

$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, 0)$ は θ_i-不変になるので

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, 0) = (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{k}_0 \oplus V(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \oplus V(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2))^{\mathbb{C}}$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned} V^\perp(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) &= \{X \in \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \mid X \perp V(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2)\}, \\ V^\perp(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2) &= \{X \in \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2 \mid X \perp V(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2)\} \end{aligned}$$

と部分空間を定めると

$$\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2 = V(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \oplus V^\perp(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \qquad (\text{直交直和}),$$
$$\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2 = V(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus V^\perp(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \qquad (\text{直交直和})$$

補題 3.12.

$$[\mathfrak{a}, V^\perp(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2)] \subset V^\perp(\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{m}_1), \quad [\mathfrak{a}, V^\perp(\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{m}_1)] \subset V^\perp(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2).$$

補題 3.12 より

$$V = \mathfrak{g} \cap \sum_{\alpha \in \tilde{\Sigma}} \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, -1) = V^\perp(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \oplus V^\perp(\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{m}_1)$$

とおくと V は Riemann トーラス $\exp \mathfrak{a}$ の表現空間になる．$\alpha \in \mathfrak{a}$ に対して

$$V(\alpha) = \{X \in V^{\mathbb{C}} \mid (\mathrm{ad}H)X = \sqrt{-1}\langle \alpha, H \rangle X \quad (H \in \mathfrak{a})\}$$

とおくと，トーラスの複素既約表現は 1 次元だから部分集合 $W \subset \mathfrak{a} - \{0\}$ が存在して

$$V^{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha \in \tilde{\Sigma}} \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, -1) = \sum_{\alpha \in W} V(\alpha).$$

$V^{\mathbb{C}}$ の V に関する $X \in V^{\mathbb{C}}$ の共役を $\overline{X}$ で表すと $\overline{V(\alpha)} = V(-\alpha)$．これより $\alpha \in W$ ならば $-\alpha \in W$ であり，

$$V(\alpha) \oplus V(-\alpha) = \{X \in V^{\mathbb{C}} \mid (\mathrm{ad}H)^2 X = -\langle \alpha, H \rangle^2 X \quad (H \in \mathfrak{a})\}.$$

よって

$$(V(\alpha) \oplus V(-\alpha)) \cap V = \{X \in V \mid (\mathrm{ad}H)^2 X = -\langle \alpha, H \rangle^2 X \quad (H \in \mathfrak{a})\}.$$

そこで

$$\begin{aligned} V_\alpha^\perp(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) &= (V(\alpha) \oplus V(-\alpha)) \cap V^\perp(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2), \\ V_\alpha^\perp(\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{m}_1) &= (V(\alpha) \oplus V(-\alpha)) \cap V^\perp(\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{m}_1) \end{aligned}$$

と部分空間を定めると

$$V_\alpha^\perp(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) = V_{-\alpha}^\perp(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2), \quad V_\alpha^\perp(\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{m}_1) = V_{-\alpha}^\perp(\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{m}_1)$$

となる．更に

$$W = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, -1) \neq \{0\}\}, \quad \tilde{\Sigma} = \Sigma \cup W \tag{3.6}$$

が成り立つ．$\alpha \in W$ に対して

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, -1) \oplus \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, -\alpha, -1) = (V_\alpha^\perp(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \oplus V_\alpha^\perp(\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{m}_1))^{\mathbb{C}}$$

が成り立つ．$\alpha \in W$ に対して $n(\alpha) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, -1)$ とおく．

補題 3.13. $\alpha \in W, s \in W(\Sigma)$ に対して $n(\alpha) = n(-\alpha)$, $n(s\alpha) = n(\alpha)$ が成り立つ.

$\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup W$ は $\mathfrak{a}$ のルート系 (補題 3.11) だから $\tilde{\Sigma}$ の基本系をとり, $\tilde{\Pi}$ に関する正のルートの全体を $\tilde{\Sigma}^+$ と表し, $\Sigma^+ = \Sigma \cap \tilde{\Sigma}^+, W^+ = W \cap \tilde{\Sigma}^+$ とおく. このとき,

$$V^{\perp}(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) = \sum_{\alpha \in W^+} V_\alpha^{\perp}(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2), \quad V^{\perp}(\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{m}_1) = \sum_{\alpha \in W^+} V_\alpha^{\perp}(\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{m}_1)$$

系 3.14. $\alpha \in \tilde{\Sigma}$ に関する鏡映を s_α と表すと $s_\alpha \in W_2(\mathfrak{a}) \cap W_1(\mathfrak{a})$.

系 3.15. [2, Cor. 5.2] $g = \exp H$ $(H \in \mathfrak{a})$ とする. $K_2\pi_1(g)$ が主軌道になるための条件は任意の $\lambda \in \Sigma$ に対して $\langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}$ かつ任意の $\beta \in W$ に対して $\langle \beta, H \rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ となることである.

系 3.16. $g \in G$ とする. $K_2\pi_1(g)$ が主軌道になることと $K_1\pi_2(g^{-1})$ が主軌道になることは同値である.

補題 3.17. $\lambda \in \tilde{\Sigma}, \sigma \in W(\tilde{\Sigma})$ に対して $n(\lambda) + m(\lambda) = n(s\lambda) + m(s\lambda)$.

$\mathfrak{a}$ の開集合 $\mathfrak{a}_r$ を次で定義する：

$$\mathfrak{a}_r = \{H \in \mathfrak{a} \mid K_2\pi_1(\exp H) \text{ は主軌道 }\}$$

$\mathfrak{a}_r$ の各連結成分を**セル**と呼ぶ. 各セル P は $\mathfrak{a}$ の有界な凸開集合で, $\tilde{J}$ はセルの全体に置換を引き起こす.

補題 3.18. $\alpha \in W, n \in \mathbb{Z}$ とする. このとき, $(s_\alpha, \frac{(2n+1)\pi}{\|\alpha\|^2}\alpha) \in \tilde{J}$.

$$\left\{ \left(s_\lambda, \frac{2n\pi}{\|\lambda\|^2}\lambda \right) \mid \lambda \in \Sigma, n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \left(s_\alpha, \frac{(2n+1)\pi}{\|\alpha\|^2}\alpha \right) \mid \alpha \in W, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

で生成される $\tilde{J}$ の部分群を $\tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ と表す.

命題 3.19. $\tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ はセルの全体に推移的に作用する.

命題 3.20. セル P_0 を任意に選び固定すると $\mathfrak{a} = \bigcup_{s \in \tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)} s\overline{P_0}$. 特に M_1 内の K_2-軌道の代表元として $\overline{P_0}$ の元をとることができる.

命題 3.1 より軌道空間は $\overline{P_0}/\{\sigma \in \tilde{J} \mid \sigma\overline{P_0} = \overline{P_0}\}$ と同一視される．そこで以下，$\overline{P_0}$ を軌道空間の代用品として用いる．G が単連結のときは $\tilde{J} = \tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ となることが知られている ([14, Prop. 3.1]).

補題 3.21. $g = \exp H$ $(H \in \mathfrak{a})$ とおく．$K_2\pi_1(g) \subset M_1$ の第二基本形式 h について次が成り立つ．

(1) $\langle\alpha, H\rangle, \langle\beta, H\rangle \notin \pi\mathbb{Z}$ に対して

$$g_*^{-1}h(g_*T_\alpha, g_*T_\beta) = \cot(\langle\beta, H\rangle)[T_\alpha, S_\beta]^\perp.$$

(2) $\langle\alpha, H\rangle, \langle\beta, H\rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ に対して

$$g_*^{-1}h(g_*Y_{\alpha,i}, g_*Y_{\beta,j}) = -\tan(\langle\beta, H\rangle)[Y_{\alpha,i}, X_{\beta,j}]^\perp.$$

(3) $Y_0, Y_1 \in V(\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{m}_1)$ に対して $h(g_*Y_0, g_*Y_1) = 0$.
(4) $\langle\alpha, H\rangle \notin \pi\mathbb{Z}, Y \in V(\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{m}_1)$ に対して $h(g_*T_\alpha, g_*Y) = 0$.
(5) $\langle\alpha, H\rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}, Y \in V^\perp(\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{m}_1)$ に対して $h(g_*Y_{\alpha,i}, g_*Y) = 0$.
(6) $\langle\alpha, H\rangle \notin \pi\mathbb{Z}, \langle\beta, H\rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ に対して

$$g_*^{-1}h(g_*T_\alpha, g_*Y_{\beta,i}) = \tan(\langle\beta, H\rangle)[T_\alpha, X_{\beta,i}]^\perp$$

系 3.22. $g = \exp H$ $(H \in \mathfrak{a})$ とおく．$K_2\pi_1(g) \subset M_1$ の平均曲率ベクトル m について次が成り立つ．

$$g_*^{-1}m_{\pi_1(g)} = -\sum_{\substack{\lambda \in \Sigma^+ \\ \langle\lambda, H\rangle \notin \pi\mathbb{Z}}} m(\lambda)\cot(\langle\lambda, H\rangle)\lambda + \sum_{\substack{\alpha \in W^+ \\ \langle\alpha, H\rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}}} n(\alpha)\tan(\langle\alpha, H\rangle)\alpha.$$

[8, Cor. 2.8] において $K_2\pi_1(g) \subset M_1$ の平均曲率ベクトルは法接続に関して平行であることを示した．次の系は [6] の拡張である．

系 3.23. $g = \exp H$ $(H \in \mathfrak{a})$ とおく．軌道 $K_2\pi_1(g) \subset M_1$ が全測地的となるための必要十分条件は任意の $\lambda \in \tilde{\Sigma}^+ = \Sigma^+ \cup W^+$ に対して $\langle\lambda, H\rangle \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ となることである．

系 3.24. $K_2\pi_1(e)$ は M_1 の全測地的部分多様体であり，$T^\perp_{\pi_1(e)}(K_2\pi_1(e))$ を接空間とする全測地的部分多様体も存在する．

鏡映部分多様体は Leung の論文 [12] で定式化された．

定義 3.25. $\tilde{M}$ を完備 Riemann 多様体とする．$\tilde{M}$ の対合的等長変換の固定点集合の連結成分を**鏡映部分多様体**という．鏡映部分多様体を定める対合的等長変換は鏡映部分多様体に対して一意的に定まる．そこでこの一意的に定まる対合的等長変換をその鏡映部分多様体の**鏡映**と呼ぶことにする．

注意 3.26. $K_2\pi_1(e)$ は M_1 の鏡映部分多様体である．

鏡映部分多様体は全測地的である ([10]) が，Hermann 作用の軌道の場合は次の意味で逆も成り立つ：

命題 3.27. $G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ のとき，$K_2\pi_1(g) \subset M_1$ が全測地的ならば $K_2\pi_1(g) \subset M_1$ は鏡映部分多様体である．

系 3.28. ([2, Theorem 5.3] を参照) $g = \exp H$ $(H \in \mathfrak{a})$ とおく．$\xi \in \mathfrak{a}$ に対して $K_2\pi_1(g) \subset M_1$ の形作用素 $A^{g_*\xi}$ の固有値の集合は次で与えられる．

$$\begin{aligned}
&\{-\langle \xi, \lambda\rangle \cot(\langle \lambda, H\rangle)(\text{重複度} = m(\lambda)) \mid \lambda \in \Sigma^+, \langle \lambda, H\rangle \notin \pi\mathbb{Z}\} \\
&\cup \left\{\langle \alpha, \xi\rangle \tan(\langle \alpha, H\rangle)(\text{重複度} = n(\alpha)) \mid \alpha \in W^+, \langle \alpha, H\rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\} \\
&\cup \{0(\text{重複度} = \dim(V(\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{m}_1)))\}.
\end{aligned}$$

系 3.28 と [9, p. 459] の考察から次が従う：

系 3.29. $g = \exp H$ $(H \in \mathfrak{a})$ とおく．$K_2\pi_1(g) \subset M_1$ が austere となるための必要十分条件は $\mathfrak{a}$ 内の有限集合

$$\begin{aligned}
&\{-\lambda \cot(\langle \lambda, H\rangle)(\text{重複度} = m(\lambda)) \mid \lambda \in \Sigma^+, \langle \lambda, H\rangle \notin \pi\mathbb{Z}\} \\
&\cup \{\alpha \tan(\langle \alpha, H\rangle)(\text{重複度} = n(\alpha)) \mid \alpha \in W^+, \langle \alpha, H\rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

が重複度も含めて -1 倍に関して不変になることである．

系 3.22，系 3.23，系 3.29 より次がわかる．

系 3.30. $g \in G$ とする．

(1) $K_2\pi_1(g) \subset M_1$ が極小 $\Leftrightarrow$ $K_1\pi_2(g^{-1}) \subset M_2$ が極小
(2) $K_2\pi_1(g) \subset M_1$ が全測地的 $\Leftrightarrow$ $K_1\pi_2(g^{-1}) \subset M_2$ が全測地的
(3) $K_2\pi_1(g) \subset M_1$ が austere $\Leftrightarrow$ $K_1\pi_2(g^{-1}) \subset M_2$ が austere

命題 3.31. (G, K) を compact 対称対とし，compact 対称空間 $M = G/K$ 内の点 p の軌道 Kp を考える．軌道 $Kp \subset M$ が austere ならば全測地的である．

命題 3.31 の全測地的軌道は [6] によって分類されている．

3.3 G が単純で $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$ の場合

定理 3.32. (1) (G, K_1, K_2) を compact 対称三対で G は単純, $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$ かつ $\theta_1 \not\sim \theta_2$ と仮定する. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を (G, K_1, K_2) から構成した三対とすると $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ は $\mathfrak{a}$ の対称三対である.

$$m(\lambda) = \dim \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \lambda, 1)\ (\lambda \in \Sigma),$$
$$n(\alpha) = \dim \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \lambda, -1)\ (\alpha \in W) \tag{3.7}$$

とおく. $m(\lambda), n(\alpha)$ は重複度の条件 (定義 1.12) を満たす.

(2) $(G, K_1, K_2), (G, K_1', K_2')$ を 2 つの compact 対称三対で G は単純, $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1, \theta_1 \not\sim \theta_2, \theta_1'\theta_2' = \theta_2'\theta_1', \theta_1' \not\sim \theta_2'$ と仮定する. それぞれに付随する Hermann 的対称三対をそれぞれ $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W), (\tilde{\Sigma}', \Sigma', W')$ と表す. もし, $(G, K_1, K_2) \sim (G, K_1', K_2')$ ならば $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W) \sim (\tilde{\Sigma}', \Sigma', W')$ となる.

命題 3.33. $H \in \mathfrak{a}$ の K_2-軌道 $K_2\pi_1(\exp H)$ について次が成り立つ.

(1) $K_2\pi_1(\exp H)$ が正則軌道 $\Leftrightarrow$ H が正則点
(2) $K_2\pi_1(\exp H)$ が全測地的軌道 $\Leftrightarrow$ H が全測地点
(2) $K_2\pi_1(\exp H)$ が austere 軌道 $\Leftrightarrow$ H が austere 点
(2) $K_2\pi_1(\exp H)$ が極小軌道 $\Leftrightarrow$ H が極小点

参考文献

[1] N. Bourbaki, Groupes et algebres de Lie, Hermann, Paris, 1975.

[2] O. Goertsches and G. Thorbergsson, On the geometry of orbits of Hermann actions, Geom. Dedicata (2007) **129** pp. 101–118.

[3] E. Heintze, R. S. Palais, C. Terng, G. Thobergsson, Hyperpolar actions on symmetric spaces, Geometry, topology, & physics, 214-245, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995.

[4] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., Calibrated geometries, Acta Math., **148** (1982), 47–157.

[5] S. Helgason, Differential Geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, 1978.

[6] D. Hirohashi, O. Ikawa and H. Tasaki, Orbits of isotropy groups of compact symmetric spaces, Tokyo J. Math. **24** (2001) 407–428.

[7] D. Hirohashi, H. Tasaki, H. Song and R. Takagi, Minimal orbits of the isotropy groups of symmetric spaces of compact type, Differential geometry and its applications **13** (2000) 167–177.

[8] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, Orbits of Hermann actions, Osaka J. Math. **38** (2001) 923–930.

[9] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds, J. Math. Soc. Japan. **61** (2009) 437–481.

[10] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, vol. 2.

[11] A. Kollross, A classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions, Trans. Amer. Math. Soc. **354**(2), 571–612 (2002).

[12] Dominic S. P. Leung, The reflection principle for minimal submanifolds of Riemannian symmetric spaces, J. Differential Geometry, 8 (1973), 153–160.

[13] T. Matsuki, Double coset decompositions of reductive Lie groups arising from two involutions, Journal of Algebra **197**, 49-91 (1997).

[14] T. Matsuki, Classification of two involutions on compact semisimple Lie groups and root systems, Journal of Lie theory **12**, 41-68 (2002).

[15] J. A. Wolf, Complex homogeneous contact manifolds and quaterninonic symmetric spaces, J. Math. Maech. **14** (1965), 1033–1047.