数理解析研究所講究録
第 1669 巻 2009 年 114-121

放物型 Hardy 空間における Carleson 測度と Carleson 不等式との関係

中川　勇人*

概要

上半空間上の放物型作用素の解空間として定まる関数空間において Carleson 不等式を考察する．ここでは Hardy 空間 h^p_α において $1 < p < \infty$ のときの不等式を調べる．Carleson 不等式が成立するための必要十分条件として Carleson 測度を拡張した T_τ-Carleson 測度を提唱する．

1　序

上半空間 $\mathbb{R}^{n+1}_+ := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ $(n \geq 1)$ において，Hardy 型ノルムが有限になる放物型関数である連続関数全体を h^p_α とおき，単に「放物型 Hardy 空間」と呼ぶことにする（詳しい定義は次節参照）．放物型 Hardy 空間の有する性質を調べることは大きな研究テーマであるが，ここでは Carleson 不等式を取り扱う．

Poisson 積分についての Carleson 不等式に関する研究は数多くある．古典的には例えば次の定理が知られている．ここで，$P^{(1/2)}[f]$ は f の Poisson 積分，$\kappa^{(1/2)}[\mu]$ は μ の Carleson 定数とする．

定理 A ([SW])

μ を $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上正 Borel 測度，$1 < p \leq \infty$ とする．このとき，ある定数 $C > 0$ が存在して $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して，次の不等式

$$\|P^{(1/2)}[f]\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

が常に成立するならば，μ は Carleson 測度である．逆に，μ が Carleson 測度であれば不等式は成立し，定数部分は p と n のみによる定数 $C_{p,n}$ を用いて $C = C_{p,n}\left(\kappa^{(1/2)}[\mu]\right)^{\frac{1}{p}}$ と表せる．

---

* 名古屋大学多元数理, E-mail : m04026b@math.nagoya-u.ac.jp
2000 Mathematics Subject Classification: Primary 35K05; Secondary 26D10, 31B10
Keywords and phrases: Parabolic operator, Hardy space, Carleson measure inequality
A talk at RIMS meeting "ポテンシャル論とその関連分野" organized by Masaharu Nishio, February 16 - 18, 2009.

定理 A の後半部分に関しては最近の研究でより精密な結果が得られている.

定理 **B** ([V])
μ を $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上 Carleson 測度, $2 < p \leq \infty$ とする. このとき, n によらないある定数 $C > 0$ が存在して $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して, 次の不等式

$$\|P^{(1/2)}[f]\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, d\mu)} \leq C\left(\kappa^{(1/2)}[\mu]\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{1}$$

が常に成立する.

定理 **C** ([GLM])
μ を $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上 Carleson 測度, $1 < p \leq 2$ とする. このとき, ある定数 $C > 0$ が存在して $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して, 不等式 (1) が成立する. ここで, 不等式 (1) における定数 C は, n によらず p にのみよる定数 C_p と n, p によらない定数 C' によって $C_p n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\ (1 < p < 2), C'\,(\log n)^{1/2}\ (p = 2)$ と表せる.

ここでは放物型 Hardy 空間において Carleson 不等式を考察する. 命題 2.2 より, 境界上の L^p 関数 f に対する基本解との合成積 $P^{(\alpha)}[f]$ (厳密な定義は次節の (3) 参照) について, $P^{(\alpha)}[f] \in h^p_\alpha$ であり, その上半空間での何らかの条件を満たす測度での L^p ノルムと f の境界での L^p ノルムとの関係は放物型 Hardy 空間における Carleson 不等式と同じことである. 不等式の存在を仮定したときの測度の性質は T_τ-Carleson 測度として表現できる. T_τ-Carleson 測度およびその定数 $\kappa^{(\alpha)}_\tau[\mu]$ の定義については次節で述べる.

定理 **D** ([N])
$0 < \alpha \leq 1, 1 < p \leq \infty, \tau = \frac{n}{2\alpha}/(1 + \frac{n}{2\alpha})$, μ を $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上正 Borel 測度とする. このとき, ある定数 $C > 0$ が存在して $u \in h^p_\alpha$ に対して, 次の不等式

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, d\mu)} \leq C\|u\|_{h^p_\alpha}$$

が常に成立するならば, μ は T_τ-Carleson 測度である.

逆に, 測度に T_τ-Carleson 測度であるということを仮定したときには, 既に部分的にではあるが次の定理 E が得られていた.

定理 **E** ([N])
$0 < \alpha \leq 1, 2 < p \leq \infty, \tau = \frac{n}{2\alpha}/(1 + \frac{n}{2\alpha})$, μ を $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上 T_τ-Carleson 測度とする. このとき, n によらないある定数 $C > 0$ が存在して $u \in h^p_\alpha$ に対して, 次の不等式

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, d\mu)} \leq C(\kappa^{(\alpha)}_\tau[\mu])^{\frac{1}{p}} \|u\|_{h^p_\alpha}$$

が常に成立する.

定理 E において $\alpha = 1/2$ とすると定理 B と一致する．すなわち定理 E は従来の結果の一般化になっているわけであるが，$1 < p \leq 2$ の場合には結果は知られていなかった．今回得られた結果は $1 < p \leq 2$ の場合も含めたものである．

主定理
$0 < \alpha \leq 1, 1 < p < \infty, \tau = \frac{n}{2\alpha}/(1+\frac{n}{2\alpha})$，$\mu$ を $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上 T_τ-Carleson 測度とする．このとき，p, n にのみよるある定数 $C > 0$ が存在して $u \in h^p_\alpha$ に対して，次の不等式

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, d\mu)} \leq C(\kappa^{(\alpha)}_\tau[\mu])^{\frac{1}{p}} \|u\|_{h^p_\alpha} \tag{2}$$

が常に成立する．

主定理は $2 < p \leq \infty$ のときには定数が「n によらない」という評価がなされていないことが定理 D より弱い結果となっているものの，$1 < p \leq 2$ のときにも不等式の成立が保障されていることが主定理における拡張された点である．なお，主定理の証明の下敷きとなっているのは古典的な定理 A のそれである．

本稿の構成は次のとおりである．第 2 節ではまず放物型 Hardy 空間を定義し，次に Carleson 測度を拡張した T_τ-Carleson 測度を導入する．共に [N] におけるものと同一のものである．また，証明に用いる補題などを準備する．第 3 節では主定理の証明を行う．なお、主定理の証明の方針については学習院大学の澤野嘉宏助教に助言をいただいた．この場を借りて感謝を申し上げたい．

本稿では C は定数を表すが，たとえ同一の行にあっても必ずしも同じとは限らない．依存する変数を明示したいときは C_p などと添え字によって表現することにする．

2 準備

主定理の証明のための準備として，この節では放物型 Hardy 空間の定義を与え，また従来の Carleson 測度を拡張する．

放物型作用素 $L^{(\alpha)}$ は，$0 < \alpha \leq 1$ として，

$$L^{(\alpha)} = \partial_t + (-\Delta_x)^\alpha$$

で定義され，超関数の意味で $L^{(\alpha)} u = 0$ が成立する連続関数 u を (α-) 放物型関数と呼ぶ ([NSS])．$L^{(\alpha)}$ の基本解は，

$$W^{(\alpha)}(x,t) = \begin{cases} (2\pi)^{-n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^{2\alpha}} e^{ix\cdot\xi}\, d\xi & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0), \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n, t \leq 0). \end{cases}$$

で定義され，$\alpha = 1/2, 1$ のときそれぞれ Poisson 核，Gauss 核に一致する：

$$W^{(1/2)}(x,t) = \begin{cases} \Gamma(\frac{n+1}{2}) \dfrac{t}{(|x|^2 + t^2)^{\frac{n+1}{2}}} & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0), \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n, t \leq 0), \end{cases}$$

$$W^{(1)}(x,t)=\begin{cases}(4\pi t)^{-n/2}e^{-|x|^2/4t} & (x\in\mathbb{R}^n, t>0),\\ 0 & (x\in\mathbb{R}^n, t\le 0).\end{cases}$$

この事実により，$f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ について

$$P^{(\alpha)}[f](x,t):=\int_{\mathbb{R}^n}W^{(\alpha)}(x-y,t)f(y)dy,\qquad (x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+ \tag{3}$$

とすると，$P^{(1/2)}[f], P^{(1)}[f]$ はそれぞれ Poisson 積分，Gauss 積分を表す．

基本解 $W^{(\alpha)}(x,t)$ については次の semigroup property が成り立つ：

$$W^{(\alpha)}(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}W^{(\alpha)}(x-y,t-s)W^{(\alpha)}(y,s)\,dy\quad (0<s<t).$$

また，以下の基本解に関する評価式が知られている．

補題 2.1.

ある定数 $C>0$ が存在して，$(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+$ について，

$$W^{(\alpha)}(x,t)\le C\frac{t}{(t+|x|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}}.$$

放物型 Hardy 空間 h^p_α を，

$$h^p_\alpha=\{u\colon \mathbb{R}^{n+1}_+\text{上}\,\alpha\text{-放物型かつ連続関数}\mid \|u\|_{h^p_\alpha}<\infty\}\quad (1<p\le\infty)$$

と定義する．ここで，ノルムは

$$\|u\|_{h^p_\alpha}:=\begin{cases}\sup_{t>0}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,t)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & (1<p<\infty),\\ \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+}|u(x,t)| & (p=\infty),\end{cases}$$

と定めることにする．

命題 2.2.

h^p_α に属する関数 u に対して，$u=P^{(\alpha)}[f]$ を満たす関数 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ がただ一つ存在する．逆に，関数 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して $P^{(\alpha)}[f]\in h^p_\alpha$ である．

Carleson 測度を放物型 Hardy 空間 h^p_α についての Carleson 不等式が要請する方向で拡張する．

定義 2.3 (T_τ-Carleson 測度, T_τ-Carleson 定数)**.**

$0<\alpha\le 1$, μ を $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上正 Borel 測度，$\tau>0$ とするとき，ある定数 $C>0$ が存在して，

$$\mu(T^{(\alpha)}(x,t))\le Ct^{(\frac{n}{2\alpha}+1)\tau}$$

が満たされているとき，μ を（$L^{(\alpha)}$ に関する）T_τ-Carleson 測度と呼ぶ．ここで，$T^{(\alpha)}(x,t) := \{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \mid |y-x|^{2\alpha} + s \le t\}$ $((x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+)$ とする．また，

$$\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu] := \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+} \frac{\mu(T^{(\alpha)}(x,t))}{t^{(\frac{n}{2\alpha}+1)\tau}}$$

とおき，T_τ-Carleson 定数と呼ぶ．

定義 2.3 において，$\alpha = 1/2$ とすると従来の Carleson 測度およびその定数になる．
$\mathcal{O}(\subset \mathbb{R}^n)$ を開集合とし，

$$\widehat{O} := \bigcup_{\substack{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+ \\ B(x,t^{1/2\alpha})\subset\mathcal{O}}} T^{(\alpha)}(x,t)$$

とする．ここで，$B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| < r\}$ としている．このとき次の補題が成立する．

補題 2.4.

$$\mu(\widehat{O}) \le C\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu]|\mathcal{O}|.$$

証明 $k = 1, 2, \ldots$ として

$$\widehat{\mathcal{O}_k} := \bigcup_{\substack{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+ \\ B(x,t^{1/2\alpha})\subset\mathcal{O} \\ |x|\le k}} T^{(\alpha)}(x,t)$$

とすると，$\widehat{\mathcal{O}} = \bigcup_{k=1}^\infty \widehat{\mathcal{O}_k}$ である．$\bigcup_{k=1}^N \widehat{\mathcal{O}_k}(\subset \widehat{\mathcal{O}})$ の N についての単調増加性により，

$$\mu(\widehat{\mathcal{O}_k}) \le C\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu]|\mathcal{O}|$$

を示せば十分である．

$$\mathcal{O}_k := \{B(x,t) \subset \mathcal{O} \mid t \le \mathrm{dist}(x, \partial\mathcal{O}) \le 2t, |x| \le k\}$$

に対して $\widehat{\mathcal{O}_k} = \bigcup_{B(x,t^{1/2\alpha})\subset\mathcal{O}_k} T^{(\alpha)}(x,t)$ である．Vitali の被覆定理により $\mathcal{O}_k$ を被覆する $\{B(x_{j,k}, r_{j,k})\}_j$ を次を満たすようにとることができる：任意の $B(x,t) \subset \mathcal{O}_k$ に対して，ある定数 C が存在して $\{B(x_{j,k}, r_{j,k})\}_j \supset \mathcal{O}_k$ の部分族 $\{\tilde{B}(\tilde{x}_{j,k}, \tilde{r}_{j,k})\}_{j=1}^m \supset \mathcal{O}_k$ がとれて，各 $\tilde{B}(\tilde{x}_{j,k}, \tilde{r}_{j,k})$ が disjoint で $B(x,t) \subset \bigcup_j C \cdot \tilde{B}(\tilde{x}_{j,k}, \tilde{r}_{j,k})$ とできる．なお、$C \cdot B(x,t) := B(x, Ct)$ である．これより，$\widehat{\mathcal{O}_k} \subset \bigcup_j \widehat{\tilde{B}(\tilde{x}_{j,k}, \tilde{r}_{j,k})}$ となる．ゆえに，

$$\mu(\widehat{\mathcal{O}_k}) \le \sum_j \mu(\widehat{\tilde{B}(\tilde{x}_{j,k}, \tilde{r}_{j,k})}) \le C\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu] \sum_j \tilde{r}_{j,k}^{n/2\alpha} \le C\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu]|\mathcal{O}|$$

となり補題は証明された．

□

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p \leq \infty)$ であるとき，

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

は f の極大関数と呼ばれ，$Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ となる．極大関数のノルムの評価として次が知られている．

補題 2.5 ([SW])**.**
$C_{p,n} = 2\left(\dfrac{5^n p}{p-1}\right)^{1/p}$ とすると，

$$\|Mf\|_{L^p} \leq C_{p,n}\|f\|_{L^p}$$

が成立する．

3 $1 < p$ のときの Carleson 測度不等式

この節では主定理の証明を行う．

命題 2.2 より不等式 (2) は任意の $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \left| \int_{\mathbb{R}^n} W^{(\alpha)}(x-y,t) f(y)\, dy \right|^p d\mu(x,t) \leq C\kappa^{(\alpha)}[\mu] \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy \tag{4}$$

であることと同値である．補題 2.1 より

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} W^{(\alpha)}(x-y,t) f(y)\, dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t|f(y)|}{(t+|x-y|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}} dy \tag{5}$$

である．

$$\begin{aligned} F(x,t) &:= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{t|f(y)|}{(t+|x-y|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}} dy \right)^p, \\ \mathcal{O}_\lambda &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sup_{(y,s)\in\Gamma_\alpha(x)} F(y,s) > \lambda\}, \\ \Gamma_\alpha(x) &:= \{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \mid |y-x| < s^{1/2\alpha}\} \end{aligned}$$

とおく．$F(y,s) > \lambda$ となる $(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ に対して $z \in B(y, s^{1/2\alpha})$ ととると $(y,s) \in \Gamma_\alpha(z)$ であるから，$\sup_{(w,r)\in\Gamma_\alpha(z)} F(w,r) \geq F(y,s) > \lambda$ である．これ

は $z \in \mathcal{O}_\lambda, B(y, s^{1/2\alpha}) \subset \mathcal{O}_\lambda$ であることを意味する．$(y,s) \in \widehat{\mathcal{O}_\lambda}$ となるから，$\{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \mid F(y,s) > \lambda\} \subset \widehat{\mathcal{O}}$ である．これより，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} F(x,t)\,d\mu(x,t) &= \int_0^\infty \mu(\{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \mid F(y,s) > \lambda\})d\lambda \\ &\le \int_0^\infty \mu(\widehat{\mathcal{O}_\lambda})\,d\lambda \\ &\le C\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu] \int_0^\infty |O_\lambda| d\lambda \\ &= C\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu] \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{(z,s)\in\Gamma_\alpha(x)} F(z,s)\,dx\end{aligned}$$

である．２番目の不等式は補題2.4による．三角不等式により $|x-y| \le |x-z|+|z-y| < s^{1/2\alpha} + |z-y|$ であることから $|x-y|^{2\alpha} + s < C(s+|z-y|^{2\alpha}) + s < C(s+|z-y|^{2\alpha})$ である．よって，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} F(x,t)\,d\mu(x,t) &\le C\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu] \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{(z,s)\in\Gamma_\alpha(x)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{s|f(y)|}{(s+|z-y|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}}dy\right)^p dx \\ &\le C\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu] \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{(z,s)\in\Gamma_\alpha(x)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{s|f(y)|}{(s+|x-y|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}}dy\right)^p dx\end{aligned}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{s|f(y)|}{(s+|x-y|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}}dy &= \int_{|x-y|<s^{1/2\alpha}} \frac{s|f(y)|}{(s+|x-y|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}}dy \\ &\quad + \sum_{m=1}^\infty \int_{(2^{m-1}s)^{1/2\alpha} \le |x-y| < (2^m s)^{1/2\alpha}} \frac{s|f(y)|}{(s+|x-y|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}}dy \\ &=: I_0 + \sum_{m=1}^\infty I_m\end{aligned}$$

と積分を分けて評価する．

$$I_0 \le \int_{|x-y|<s^{1/2\alpha}} \frac{s|f(y)|}{s^{\frac{n}{2\alpha}+1}}dy = \frac{1}{s^{n/2\alpha}} \int_{|x-y|<s^{1/2\alpha}} |f(y)|\,dy \le Mf(x)$$

であり，

$$\begin{aligned}I_m &\le \int_{(2^{m-1}s)^{1/2\alpha} \le |x-y| < (2^m s)^{1/2\alpha}} \frac{s|f(y)|}{(s+2^{m-1}s)^{\frac{n}{2\alpha}+1}}dy \\ &\le \frac{2^{-m}2^{(\frac{1}{2\alpha}+1)}}{(2^m s)^{n/2\alpha}} \int_{|x-y|<(2^m s)^{1/2\alpha}} |f(y)|\,dy \\ &\le 2^{-m}2^{(\frac{1}{2\alpha}+1)} Mf(x)\end{aligned}$$

より

$$\sum_{m=1}^{\infty} I_m \leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \right) 2^{(\frac{1}{2\alpha}+1)} Mf(x) = 2^{(\frac{1}{2\alpha}+1)} Mf(x)$$

であるから，ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{s|f(y)|}{(s + |x-y|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}} dy \leq C\, Mf(x)$$

とできる．ゆえに，

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} F(x,t)\, d\mu(x,t) \leq C\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu] \int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p dx$$

であり，補題 2.5 の評価を用いることにより

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} F(x,t)\, d\mu(x,t) \leq C\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu] \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx$$

が得られる．これと (5) により直ちに (4) が得られ，主定理は証明された．

参考文献

[GLM] L. Grafakos, E. Laeng, C. Morpurgo, *Inequalities for Poisson integrals with slowly growing dimensional constants*, Publ. Mat. **51** (2007), 59-75.

[N] 中川　勇人, 放物型 Hardy 空間における Carleson measure inequality, 数理解析研究所講究録 1618, 82-88.

[NSS] M. Nishio, N. Suzuki, K. Shimomura, *α-parabolic Bergman spaces*, Osaka J. Math. **42** (2005), 153-162.

[SW] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1971.

[V] I. E. Verbitsky, *A Dimension-free Carleson Measure Inequality*, Oper. Theory Advanced and Applications, Vol. **113** (2000), 393-398.