数理解析研究所講究録
第1670巻 2009年 10-14

同変デファイナブル s-コボルディズム定理

大阪大学大学院理学研究科　西村孝宏 (Takahiro Nishimura)
Graduate School of Science, Osaka University

1. 同変 s-コボルディズム定理

本稿では、S.Araki、K.Kawakubo によるコンパクト Lie 群に対する同変 s-コボルディズム定理 ([1]) をデファイナブルカテゴリーに拡張することを目的とする。

G をコンパクト Lie 群、W を $\partial W = M \sqcup N$(disjoint union) を満たすコンパクトな $C^\infty G$-多様体とする。包含写像 $i_M : M \to W$, $i_N : N \to W$ が G-ホモトピー同値写像のとき、3つ組 $(W; M, N)$ を G-h-コボルディズムという。さらに、G-h-コボルディズム $(W; M, N)$ が $\tau_G(i_M) = 0 \in Wh_G(M)$ のときに、$(W; M, N)$ を G-s-コボルディズムという。

G-s-コボルディズム定理が成り立つためには、次元の条件が必要になる。

H、K を W のアイソトロピー群として、

$$W^H = \bigsqcup_\lambda W_\lambda^H,\ W^K = \bigsqcup_\mu W_\mu^K$$

と W^H、W^K を連結成分に分解し、以下の2つの次元の条件を考える。

(*1) $W_\mu^K \supseteq W_\lambda^H$ ならば、任意の連結成分の組 W_λ^H、W_μ^K に対して、

$$\dim W_\mu^K - \dim W_\lambda^H \geq \dim G + 3$$

(*2) H がアイソトロピー群の最大元ならば、任意の連結成分 W_λ^H に対して、

$$\dim W_\lambda^H \geq \dim G + 6$$

この2つの次元の条件を使って G-s-コボルディズム定理が与えられている。

定理 1.1(同変 s-コボルディズム定理 [1]). G をコンパクト Lie 群、$(W; M, N)$ を G-s-コボルディズムとする。W が、次元の条件 (*1) と (*2) を満たすとすると、G-微分同相

$$W \cong_G M \times I \text{ rel. } M$$

が成り立つ。

特に、M は N に G-微分同相である。

2. デファイナブルカテゴリーについて

デファイナブル集合はすべてパラメータつきで考えるものとする。

$K \subset \mathbb{R}^n$、$L \subset \mathbb{R}^m$ をデファイナブル集合とする。連続写像 $f : K \to L$ のグラフがデファイナブル集合のときに f をデファイナブル写像という。また、$U \subset \mathbb{R}^n$、$V \subset \mathbb{R}^m$ をデファイナブル開集合とする。デファイナブル写像 $f : U \to V$ が C^r 写像 のときにデファイナブル C^r 写像という。

デファイナブル C^r 写像 $f : U \to V$ に対して、$h \circ k = id$、$k \circ h = id$ を満たすデファイナブル C^r 写像

$k: V \to U$ が存在するとき、f はデファイナブル C^r 微分同相写像と呼ばれる。

$\mathbb{R}$ のすべてのデファイナブル集合が点と開区間の有限和のときに、$\mathcal{M}$ を o-manimal という。

定義 2.1. $0 \leq r \leq \omega$ とする。

(1) $\mathbb{R}^n$ のデファイナブル集合 X が $\mathbb{R}^n$ の d 次元デファイナブル C^r 部分多様体とは、任意の $x \in X$ に対して、$\mathbb{R}^n$ の原点のデファイナブル開近傍 U_x から x の $\mathbb{R}^n$ でのデファイナブル開近傍 V_x へのデファイナブル C^r 微分同相写像 $\phi_x : U_x \to V_x$ が存在して、$\phi_x(0) = x, \phi_x(\mathbb{R}^d \cap U_x) = X \cap V_x$ を満たす。ここで $\mathbb{R}^d$ は $\mathbb{R}^n$ の後ろの $(n-d)$ 個の成分が 0 の部分集合である。

(2) X を有限チャート $\{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^d\}$ を持つ C^r 多様体とする。任意の i、j に対して $\phi_i(U_i \cap U_j)$ が $\mathbb{R}^d$ のデファイナブル開集合で、写像 $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|\phi_i(U_i \cap U_j) : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ がデファイナブル C^r 微分同相写像であるとき、X を d 次元デファイナブル C^r 多様体という。このアトラスをデファイナブル C^r アトラスという。

X の部分集合 Y がデファイナブルとは、各 $\phi_i(U_i \cap Y)$ が $\mathbb{R}^d$ のデファイナブル部分集合のときをいう。

X のデファイナブル部分集合を Z とする。任意の $x \in Z$ に対して、x の X でのデファイナブル開近傍 U_x から $\mathbb{R}^d$ のデファイナブル開集合 V_x へのデファイナブル C^r 微分同相写像 ϕ_x が存在して、$\phi_x(x) = 0, U_x \cap Y = \phi_x^{-1}(\mathbb{R}^k \cap V_x)$ を満たすときに、Z を X の k 次元デファイナブル C^r 部分多様体という。$\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^d$ はうしろの $(d-k)$ 個の成分が 0 の部分集合である。.

(3) X (resp.Y) をデファイナブル C^r チャート $\{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}_i$ (resp.$\{\psi_j : V_j \to \mathbb{R}^m\}_j$) を持つデファイナブル C^r 多様体とする。C^r 写像 $f : X \to Y$ がデファイナブル C^r 写像とは、任意の i、j に対して $\phi_i(f^{-1}(V_j) \cap U_j)$ が $\mathbb{R}^n$ でデファイナブル集合かつ開集合で、$\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(f^{-1}(V_j) \cap U_i) \to \mathbb{R}^m$ が C^r 写像であるときをいう。

(4) X、Y をデファイナブル C^r 多様体とする。デファイナブル C^r 写像 $f : X \to Y$、$h : Y \to X$ で $f \circ h = id$、$h \circ f = id$ を満たすものが存在するとき、X が Y にデファイナブル C^r 微分同相であるという。

(5) デファイナブル C^r 多様体が、ある $\mathbb{R}^l$ のデファイナブル C^r 部分多様体にデファイナブル C^r 微分同相のときアフィンという。

(6) $\mathbb{R}^n$ の境界を持つデファイナブル C^r 部分多様体や境界を持つデファイナブル C^r 多様体も同様に定義できる。

定義 2.2. $0 \leq r \leq \omega$ とする。

(1) 群 G がデファイナブル C^r 多様体 (アフィンデファイナブル C^r 多様体) で群作用 $G \times G \to G$、逆元 $G \to G$ がデファイナブル C^r 写像のときに、G をデファイナブル C^r 群 (アフィンデファイナブル C^r 群) という。

G を C^r デファイナブル群とする。

(2) G の表現写像とは、G から $O_n(\mathbb{R})$ への群準同型写像でデファイナブル C^r 写像のことである。G の表現とは 表現写像 $G \to O_n(\mathbb{R})$ によって誘導される線形作用を持つ $\mathbb{R}^n$ のことである。

(3) デファイナブル C^rG-多様体とは、デファイナブル C^r 多様体 X と G の X への群作用 θ で $\theta : G \times X \to X$ がデファイナブル C^r 写像であるような、組 (X, θ) である。

(4) デファイナブル C^rG-多様体 X のデファイナブル C^r 部分多様体は、G-不変のときに X のデファイナブル C^rG-部分多様体という。

(5) デファイナブル C^rG-写像、デファイナブル C^rG-微分同相写像、デファイナブル C^rG-同相写像、アフィ

ンデファイナブル C^rG-多様体も同様に定義できる。

命題 2.2([4]). $n=\infty$、または、ω として、G をコンパクトデファイナブル C^n 群とする。

(1) G の表現 Ω の、任意のデファイナブル C^nG-部分多様体 X は、Ω で X のデファイナブル C^nG-チューブ型近傍 (U,r) を持つ。

(2) 境界を持つ任意のコンパクトアフィンデファイナブル C^nG-多様体 X はデファイナブル C^nG-カラー近傍を持つ。すなわち、デファイナブル C^nG-埋め込み $\phi : \partial X \times [0,1] \to X$ が存在し、$\phi|\partial X \times \{0\} = id_{\partial X}$, を満たす。

$\mathcal{M}$ を $\mathbf{R}_{exp} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, e^x)$ の exponential o-minimal expansion とする。

定理 2.3([5]). G をコンパクトデファイナブル C^∞ 群、X をコンパクトアフィンデファイナブル $C^\infty G$-多様体とする。 A、B が G-不変で共通部分を持たないデファイナブルな X の閉部分集合と仮定すると、 G-不変なデファイナブル C^∞-関数 $f : X \to \mathcal{R}$ で $f|A=1$、$f|B=0$ を満たすものが存在する。

3. 同変 s-コボルディズム定理のデファイナブルカテゴリーへの拡張

デファイナブルカテゴリーへ拡張するために必要な命題をいくつか述べる。

G をコンパクト Lie 群、$0 \le r \le \omega$ とする。f を C^rG-多様体 X から G の表現 Ω への写像とする。G の Haar measure を dg、X から Ω への C^r 写像空間を $C^r(X,\Omega)$ であらわす。

平均化作用素 $A : C^r(X,\Omega) \to C^r(X,\Omega)$ を

$$A(f)(x) = \int_G g^{-1} f(gx) dg$$

で定義する。

命題 3.1([4]). G をコンパクトデファイナブル C^∞ 群とする。

(1) $A(f)$ は同変である。また、f が同変ならば $A(f)=f$ である。

(2) $0 \le r \le \infty$、$f \in C^r(X,\Omega)$ とすると、$A(f) \in C^r(X,\Omega)$ が成り立つ。

(3) f が多項式ならば、$A(f)$ も多項式である。

(4) X がコンパクトで $0 \le r \le \infty$ とすると、$A : C^r(X,\Omega) \to C^r(X,\Omega)$ は C^r 位相で連続である。

(5) G が有限群、$0 \le r \le \omega$、X がデファイナブル C^rG-多様体で f がデファイナブル C^r 写像とすると、$A(f)$ はデファイナブル C^rG-写像である。

M、N を C^r 多様体とする。M から N への C^r 写像の集合を $C^r(M,N)$、C^r 微分同相写像の集合を $Diff^r(M,N)$ とする。

定理 3.2([3]). $1 \le r \le \omega$ とする。M、N を境界を持たない C^r 多様体とすると、$Diff^r(M,N)$ は $C^r(M,N)$ で開集合となる。

系 3.3([3]). $1 \le r \le \omega$ とする。M、N を境界を持つ C^r 多様体とすると、$Diff^r(M,N)$ は $C^r(M,\partial M; N, \partial N) = \{f \in C^r(M,N) | f(\partial M) \subset \partial N\}$ で開集合となる。

以下で、同変コボルディズム定理のデファイナブルカテゴリーへの拡張について述べる。

通常の場合と同様にこのデファイナブルカテゴリーでコボルディズムを定義する。

G をコンパクトなデファイナブル C^∞ 群、W を $\partial W = M \sqcup N$ を満たすコンパクトなデファイナブル $C^\infty G$-多様体とする。包含写像 $i_M : M \to W, i_N : N \to W$ が(デファイナブル)G-ホモトピー同値写像のとき、3つ組 $(W; M, N)$ をデファイナブル $C^\infty G$-h-コボルディズムという。さらに、デファイナブル $C^\infty G$-h-コボルディズム $(W; M, N)$ が $\tau_G(i_M) = 0 \in Wh_G(M)$ のときに、$(W; M, N)$ をデファイナブル $C^\infty G$-s-コボルディズムという。

定理 3.4(同変デファイナブル s-コボルディズム定理). $\mathcal{M}$ を exponential o-minimal expansion とし、G をコンパクトなデファイナブル C^∞ 群、$(W; M, N)$ をデファイナブル $C^\infty G$-s-コボルディズムとする。W がアフィンで、次元の条件 (*1) と (*2) を満たすとすると、デファイナブル $C^\infty G$-微分同相

$$W \cong_{def,G} M \times I \text{ rel. } M$$

が成り立つ。

特に、M は N に $C^\infty G$-微分同相である。

証明. $\tau_G(i_M) = 0 \in Wh_G(M)$ なので、定理 1.1 より、$C^\infty G$-微分同相

$$W \cong_G M \times I \text{ rel. } M$$

$$M \cong_G N.$$

が成り立つ。上についての $C^\infty G$-微分同相写像を $f : M \times I \to W$ とすると、f の $M \times \{0\}$ への制限写像 $f|_{M\times\{0\}} : M \times \{0\} \to M$ は、$M \times \{0\}$ と M を同一視することで、恒等写像である。したがって、$f|_{M\times\{0\}}$ はデファイナブル $C^\infty G$-同相写像となる。

次に f の $M \times \{1\}$ への制限写像 $f|_{M\times\{1\}} : M \times \{1\} \to N$ を考える。ここで、デファイナブル $C^\infty G$-部分多様体として N を含む群 G の表現を Ω として、$f|_{M\times\{1\}} : M \times \{1\} \to \Omega$ とみなす。$\mathcal{M}$ が exponential o-minimal expansion で G がコンパクトなので、定理 2.1 より Ω の中で N のデファイナブル $C^\infty G$-チューブ型近傍 U_N が存在し、デファイナブル $C^\infty G$-レトラクション $r_N : U_N \to N$ が存在する。$f|_{M\times\{1\}}$ に多項式近似定理を適用して、$f|_{M\times\{1\}}$ の C^r-近似写像として多項式写像 $h_N : M \times \{1\} \to \Omega$ を得る。命題 3.1 より h_N を A で平均化することにより、h_N を多項式 G-写像と仮定することができる。この近似を十分に近くすることで、h_N の像が U_N に含まれるようにできる。よって、$r_N \circ h_N$ はデファイナブル $C^\infty G$-写像で、$f|_{M\times 1}$ の C^r-近似写像である。逆関数定理より、デファイナブル写像 $(r_N \circ h_N)^{-1}$ は $C^\infty G$-写像であるので、$r_N \circ h_N$ はデファイナブル $C^\infty G$-同相写像である。

また、ある十分に小さい ε に対して、$M \times (\varepsilon, 1-\varepsilon)$ のデファイナブル $C^\infty G$-チューブ型近傍 U、デファイナブル $C^\infty G$-レトラクション $r : U \to M \times (\varepsilon, 1-\varepsilon)$ が存在し、$f|_{M\times(\varepsilon,1-\varepsilon)}$ の多項式近似写像 h を平均化することで多項式 G-写像 h が得られる。こうして、上と同様に、$f|_{M\times(\varepsilon,1-\varepsilon)} : M \times (\varepsilon, 1-\varepsilon) \to W \setminus (M \amalg N)$ の C^r-近似写像として、デファイナブル $C^\infty G$-写像 $r \circ h : M \times (\varepsilon, 1-\varepsilon) \to W \setminus (M \amalg N)$ を得ることができる。

$\mathcal{M}$ が exponential o-minimal expansion で W がコンパクトでアフィンであるので、定理 2.2 より、$k|[0, \frac{\varepsilon}{3}] = 1$ と $k|[\frac{2}{3}\varepsilon, \varepsilon] = 0$ を満たす $k : [0, \varepsilon] \to I$、また、$l|[1-\varepsilon, 1-\frac{2}{3}\varepsilon] = 1$ と $l|[1-\frac{\varepsilon}{3}, 1] = 0$ を満たす

$l : [1-\varepsilon, 1] \to I$ が存在する。写像 $F : M \times 1 \to N$ を

$$F(x,t) = \begin{cases} r \circ (k(t)(f|_{M\times 0}(x,0)) + (1-k(t))(r \circ h(x,t))) & , (x,t) \in M \times [0,\varepsilon] \\ r \circ (h(x,t)) & , (x,t) \in M \times [\frac{2}{3}\varepsilon, 1-\frac{2}{3}\varepsilon] \\ r \circ (l(t)(r \circ h(x,t)) + (1-l(t))(r_N \circ h_N(x,1))) & , (x,t) \in M \times [1-\varepsilon, 1] \end{cases}$$

で定義する。F は f の近似写像でデファイナブル $C^\infty G$-写像で、$M \times I$ の境界を W の境界に写すので、系 3.3 より F は微分同相写像となる。F はデファイナブル $C^\infty G$-写像なので、F は M に制限すると恒等的なデファイナブル $C^\infty G$-同相写像である。 □

参考文献

[1] S.Araki, K.Kawakubo, *Equivariant s-cobordism theorems*, J.Math.Soc.Japan 40, No.2 (1988), 349-367

[2] K.H.Dovermann, M.Masuda, T.Petrie, *Fixed point free algebraic actions on varieties diffeomorphic to* $\mathbb{R}^n$, Progr. math. 80 (1990), 49-80

[3] M.W.Hirsch,*Differential Topology*, Grad. Texts in Math. 33 (1976), Springer

[4] T.Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. 123 (2002), 323-349

[5] T.Kawakami,*Realative properties of definable* C^∞ *manifolds with finite abelian group actions in an o-minimal expansion of* R_{exp}, Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. 59 (2009), 21-27