

準地衡風渦系の平衡状態 - エネルギー依存性 -

木村 英史, 岡田 拓也, 高橋直也, 宮崎 武 (電通大院),
東京都調布市調布ヶ丘 1-5-1, E-mail:hidefumi@miyazaki.mce.uec.ac.jp

平成 21 年 3 月 31 日

1 緒言

大気, 海洋といった大規模な地球流体现象には, 密度成層効果と回転効果 (コリオリ効果) の影響でいくつか特徴的な現象が起こることが知られている. そのような特徴的な現象の 1 つに渦運動がある. 秩序渦が長い期間安定に存在し続けて広域流れに大きな影響を与えている. 例えば, 南極域で発見されたオゾンホールは成層圏周極渦という秩序渦構造と密接な関係がある事が認識されている. オゾン破壊物質が外側からのオゾン供給のない周極渦内に閉じ込められ, オゾンホールが発生する原因となっている. 一方, オゾン濃度の低い気塊はフィラメント状に引き伸ばされ, 折り畳まれて混合しながら中緯度まで影響を及ぼす.

こうした大規模な地球流体運動は, コリオリ効果と安定密度成層効果のため, 鉛直高さの異なる層ごとに二次元運動とみなせる. したがって, 粗い近似 (第 0 近似) では各層ごとに二次元 Euler 方程式で記述される. これまで 2 次元点渦系に関する研究は数多くなされており, 統計力学の分野では [1, 2, 3, 4] などが報告されている. 近年では, Yatsuyanagi ら [5] が円筒容器内に閉じ込めた非中性プラズマや地球流体渦に関連して, 2 次元点渦系の大規模数値計算 ($N = 6724$) を行い, 統計力学的な意味での負温度状態 (高エネルギー) と正温度状態 (低エネルギー) を調べた.

しかし, 地球流体運動のより詳細な特徴を捉えるためには 3 次元計算が必要である. そこで地球流体の第一近似として準地衡風近似 [6] が用いられた. さらに McWilliams [7] と McWilliams *et al.* [8] はスペクトル法を用いて準地衡風乱流の数値シミュレーションを行い, 2 次元流と同様に自発的に渦構造が生成されることを確認した.

Meacham [9] と Meacham *et al.* [10] は準地衡風近似のもとで, 一様な外部渦度・水平ストレーン・鉛直シアを埋め込まれた楕円体渦の非定常解を求めた. さらに Meacham *et al.* [11] は, モーメントの簡略化の観点から非定常解の明確な理論的解釈を得た. 一様シア中の楕円体渦の動力学は 2 自由度のハミルトン力学系であることが示されている.

これらの厳密解に基づいて, 我々のグループは一連の準地衡風渦モデルを開発した. また Dritschel *et al.* [12] は我々のモデルを改良した楕円体渦モデルを提案したが, 余分な変数を用いていた. そこで, Miyazaki *et al.* [13] と Liet *et al.* [14] は, 幾何学的意味がわかりやすい正準変数を導入し, 点渦 (N 自由度), wire 渦モデル ($2N$ 自由度), 楕円体渦モデル ($3N$ 自由度) の準地衡風乱流渦モデルを開発した. また, Hoshi and Miyazaki [15] は点渦系の統計的性質と散逸過程をモデル化した球渦系の統計的性質を調べた. 分子動力学専用計算機による大規模数値計算と, ハミルトン力学最大エントロピー理論 (情報エントロピーを最大化する) による平衡解は定性的に一致した.

本論文では, 分子動力学専用計算機 MDGRAPE-3¹による大規模直接数値計算と最大エントロピー理論により平衡状態渦分布を求める. 特にそのエネルギー依存性に注目して, 統計力学的な温度定義に基づく正温度領域, 0^{-} -inverse-temperature, 負温度領域での平衡渦分布を詳細に調べる.

¹We thank for computational resources of the RIKEN Super Combined Cluster(RSCC).

2 準地衡風方程式と運動方程式

2.1 準地衡風方程式

準地衡風近似では流体運動は水平面内で起こることから、速度場 (u, v) について流れ関数を導入する。

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (1)$$

一様成層回転流体の準地衡風運動方程式は次のように表される [6].

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) q = 0. \quad (2)$$

ここで q はポテンシャル渦度であり、次のように定義する。

$$q = -\Delta \Psi = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi. \quad (3)$$

点渦系はデルタ関数的にポテンシャル渦度が集中しているモデルを考えているため、 $\mathbf{R}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ に位置する渦強さ $\hat{\Gamma}_i$ の N 体の準地衡風点渦系のポテンシャル渦度は次のように表される。

$$q = \sum_{i=1}^N \hat{\Gamma}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i), \quad \mathbf{r} = (x, y, z). \quad (4)$$

ここで N は点渦の数を示す。

2.2 運動方程式

N 体準地衡風点渦系における Hamiltonian H は、 $N(N-1)/2$ 対の相互作用エネルギーの総和

$$H = \sum_{(i,j)}^N \frac{\hat{\Gamma}_i \hat{\Gamma}_j}{4\pi |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|}, \quad (5)$$

で表され、保存量である。 i 番目の点渦の運動方程式は正準形式に表される。

$$\frac{dX_i}{dt} = \frac{1}{\hat{\Gamma}_i} \frac{\partial H}{\partial Y_i}, \quad \frac{dY_i}{dt} = -\frac{1}{\hat{\Gamma}_i} \frac{\partial H}{\partial X_i}. \quad (6)$$

点渦系の保存量は H の他に渦重心 (P, Q) と角運動量 I がある。

$$P = \sum_{i=1}^N \hat{\Gamma}_i X_i, \quad Q = \sum_{i=1}^N \hat{\Gamma}_i Y_i \quad (7)$$

$$I = \sum_{i=1}^N \hat{\Gamma}_i (X_i^2 + Y_i^2) \quad (8)$$

渦重心は原点 ($P = Q = 0$) に、長さスケールは $L_0 = \sqrt{I / \sum_{i=1}^N \hat{\Gamma}_i}$ を用いて、 $X_i \rightarrow X_i / L_0$ などのように規格化する。時間 t はポテンシャル渦度で無次元化する。渦数は $N = 2000$ またエネルギーを $E = H / (\sum_{i=1}^N \hat{\Gamma}_i)^2$ と規格化して用いる。ここで、準地衡風点渦系の Poisson 可換不変量は $P^2 + Q^2, I, H$ の3つであるので、Liouville-Arnol'd の定理より自由度 4 以上の渦運動はカオスを示す。

3 準地衡風点渦系の平衡状態

3.1 直接数値計算

無限空間のある領域に点渦をランダムに分布させ、点渦系の統計的性質を調べた。 $\frac{1}{r}$ の相互作用を MDGRAPE-3 を用いて計算し、時間発展には精度保証された LSODE-package を用いた。MDGRAPE-3は単精度程度の計算で行われるため、保存量である $E, I, (P, Q)$ は有効数字 6 桁目まで保存される。

3.2 統計力学的温度定義

まず、3次元空間に点渦を配置し、 10^6 個のサンプルを用意した。鉛直方向に点渦を等間隔（鉛直方向渦分布は一定）に配置し、水平方向に正規乱数を用いて分布した場合（実線）と一様乱数を用いて分布した場合（破線）のミクロカノニカル分布（状態数分布）を図 1 に示す。正規乱数を用いた場合、状態数が最頻度となるエネルギー値は一様乱数を用いた場合に対して大きくなる。Hoshi and Miyazaki [15] では統計力学的な温度定義について、一様乱数を用いた場合の状態数分布を用いたが、それは低エネルギー状態を生み出していた。水平方向に正規乱数を用いると状態数が最頻度となるエネルギーで鉛直高さによらない平衡渦分布が実現する。以後、水平方向に正規乱数を用いた状態数分布に従った統計力学的な温度定義を用いる。すなわち、状態数がエネルギーの増加関数となる領域は“正温度領域”，減少関数となるエネルギー領域は“負温度領域”，状態数最頻度となるエネルギーを“0'-inverse-temperature”と定義する。

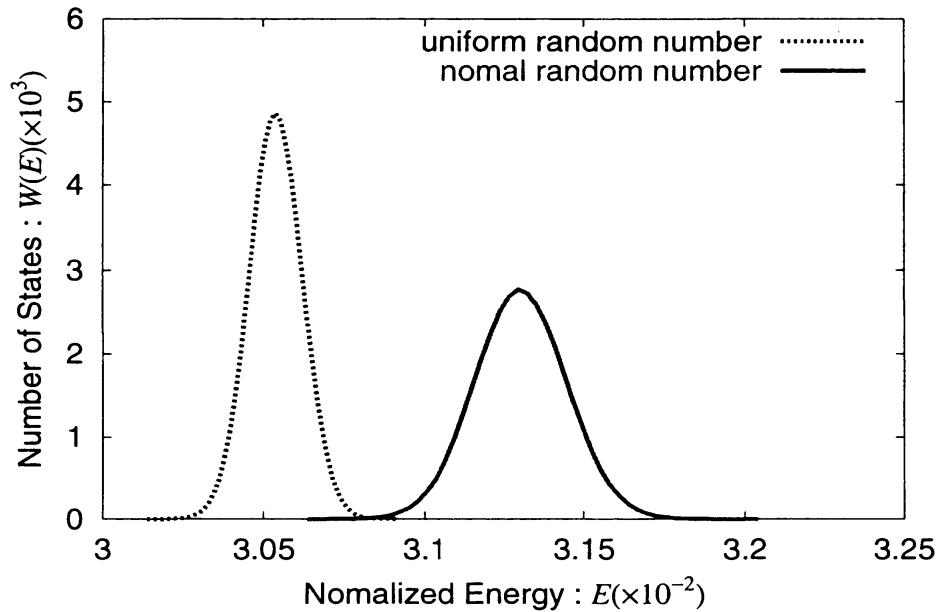


図 1: ミクロカノニカル分布 (実線:正規乱数、破線:一様乱数).

4 結果:平衡状態渦分布のエネルギー依存性

平衡状態渦分布のエネルギー依存性を調べるために, 正温度領域, '0'-inverse-temperature, 負温度領域における直接数値計算を行う. このときの計算条件を表1に示す. ここで, 渦系重心の鉛直座標より渦度領域の上端・下端までの距離を $|z_{\max}|$ とする. 鉛直方向渦分布 $P(z)$ は,

$$P(z) = 2\pi \int_0^{\infty} r F(r, z) dr \quad (9)$$

で表され, Case A, B, C とともに $P(z)$ は鉛直高さ z によらず一定とする.

表 1: 数値計算条件 (鉛直方向渦分布 $P(z)$ 、渦度領域の鉛直高さ $|z_{\max}|$ 、渦数 N 、エネルギー)

Case	鉛直方向渦分布 $P(z)$ (渦度領域の鉛直高さ z_{\max})	渦数 N	エネルギー
A	$P(z) = \frac{1}{2z_{\max}}$	2000	$E = 3.054 \times 10^{-2}$ (正温度領域)
B	$P(z) = \frac{1}{2z_{\max}}$	2000	$E = 3.130 \times 10^{-2}$ ('0'-inverse-temperature)
C	$P(z) = \frac{1}{2z_{\max}}$	2000	$E = 3.236 \times 10^{-2}$ (負温度領域)

図2は, 各 Case の xz 平面への射影図である. Case A(正温度領域, $E = 3.054 \times 10^{-2}$) では, 中心層において渦分布が半径方向に広がり, 上下層では対称軸付近に集中した. Case B('0'-inverse-temperature, $E = 3.130 \times 10^{-2}$) では, 鉛直方向に依存性せず分布し, また Case C(負温度領域, $E = 3.236 \times 10^{-2}$) では, 中心層において対称軸付近に集中し, 上下層では半径方向に広がった.

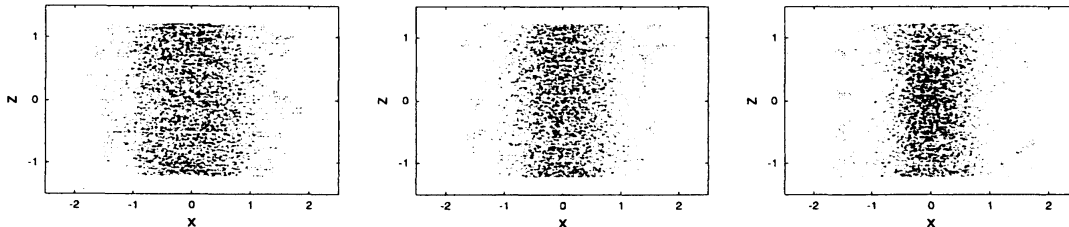


図 2: xz 平面射影図:左から Case A(正温度領域, $E = 3.054 \times 10^{-2}$), Case B('0'-inverse-temperature, $E = 3.130 \times 10^{-2}$), Case C(負温度領域, $E = 3.236 \times 10^{-2}$)

平衡状態渦分布は渦系重心を通る鉛直軸に対して軸対称となったので, 周方向には一様であるとみなして平均を取る. 渦系重心からの距離を r 、鉛直方向の座標 z とした平衡状態の確率密度分布 $\hat{F}(r, z) = F(r, z)/P(z)$ [$\int_0^{\infty} r \hat{F}(r, z) dr = 1$ と規格化] を調べた. $\hat{F}(r, z)$ は, 平衡状態に達した時間以降のデータを平均した.

Case A(正温度領域, $E = 3.054 \times 10^{-2}$), Case B('0'-inverse-temperature, $E = 3.130 \times 10^{-2}$), Case C(負温度領域, $E = 3.236 \times 10^{-2}$) の平衡渦分布 $\hat{F}(r, z)$ を, それぞれ図3, 図4, 図5に示す. 平衡渦分布はエネルギーに応じて大きく変化した. Case B('0'-inverse-temperature, $E = 3.130 \times 10^{-2}$) では初期配置とほぼ変わらない平衡状態となる. 鉛直高さによらず半径方向は正規分布となる. また, Case A(正温度領域, $E = 3.054 \times 10^{-2}$) では中心層よりも上下層で分布が対称軸に対して集中する. また, Case C(負温度領域, $E = 3.236 \times 10^{-2}$) では上下層よりも中心層で分布が対称軸近辺に集中する. 正温度領域で現れた上下層で対称軸に対する分布の集中を 'End-effect', 負温度領域で現れた上下層で対称軸に対する分布の広がりを 'Inverse-end-effect' と呼ぶこととする. 次節で最大エントロピー理論を踏まえて平衡渦分布のエネルギー依存性のメカニズムを探る.

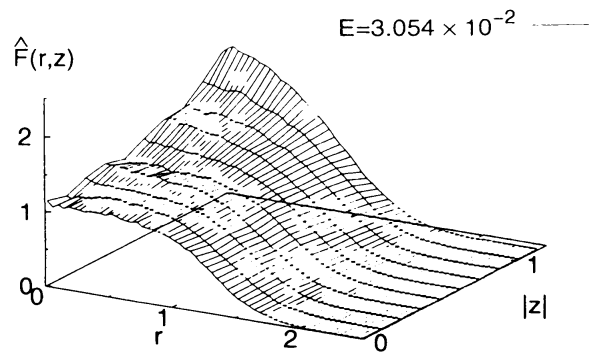


図 3: Case A(正温度領域、 $E = 3.054 \times 10^{-2}$ での平衡渦分布 $\hat{F}(r, z)$, 座標軸の r は渦系重心 $((P, Q) = (0, 0))$ を通る鉛直軸からの距離, $|z|$ は鉛直高さを表す.

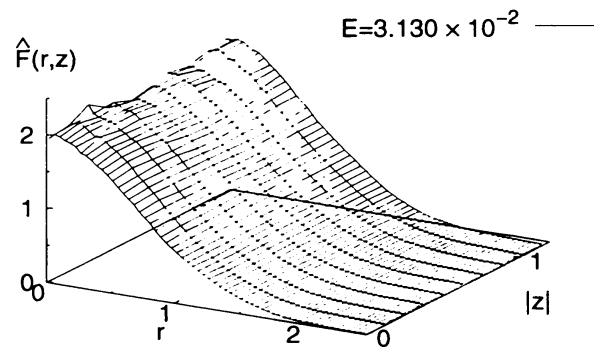


図 4: Case B('0'-inverse-temperature', $E = 3.130 \times 10^{-2}$) での平衡渦分布 $\hat{F}(r, z)$, 座標軸の r は渦系重心 $((P, Q) = (0, 0))$ を通る鉛直軸からの距離, $|z|$ は鉛直高さを表す.

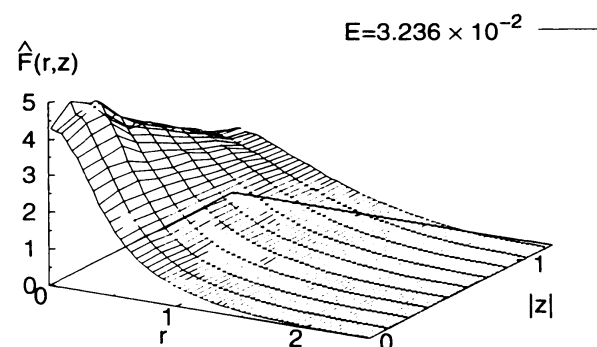


図 5: Case C(負温度領域、 $E = 3.236 \times 10^{-2}$) での平衡渦分布 $\hat{F}(r, z)$, 座標軸の r は渦系重心 $((P, Q) = (0, 0))$ を通る鉛直軸からの距離, $|z|$ は鉛直高さを表す.

5 最大エントロピー理論

準地衡風点渦系において最大エントロピー理論 [3] より平衡渦分布を求めた。最大エントロピー理論とは情報エントロピーを制約条件のもとで最大化し最適なパラメータを導く方法であり、ラグランジュ未定乗数法を用いて解く事ができることが知られている。本研究では反復法をもちいて数値的に収束解を導出した。

5.1 連続渦度分布における最大エントロピー理論

準地衡風単分散点渦系における平衡渦度分布を最大エントロピー理論 [3] を用いて次のように求めた。

$z_1 \leq z \leq z_2$ の連続分布について、渦数： \hat{N} 、循環： $\hat{\Gamma}_{1,2,\dots,\hat{N}} = 1$ 、エネルギー： E 、角運動量： $\hat{I} (= I/\hat{N} = 1)$ とする。渦数密度を $n(\mathbf{r}, t)$ で与えたとき、確率密度関数は $F(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t)/\hat{N}$ となる。

鉛直方向の渦度分布 $P(z)$ は次の式で与えられる。

$$P(z) = \iint F(\mathbf{r}) dx dy \left(\int_{z_1}^{z_2} P(z) dz = 1 \right). \quad (10)$$

各渦は水平面に運動するため、時間発展後も $P(z)$ は変化しない。

Shannon entropy は、

$$\log \hat{Z} = -\hat{N} \iiint F(\mathbf{r}) \log F(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (11)$$

であり、 \hat{Z} は分配関数である。

角運動量 \hat{I} とエネルギー H はそれぞれ次の式で表される。

$$\hat{I} = \iiint (x^2 + y^2) F(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 1, \quad (12)$$

$$\frac{8\pi H}{\hat{N}^2} = \iiint \iiint \frac{F(\mathbf{r}) F(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}'. \quad (13)$$

エネルギーの定義式 (13) では、2 体点渦の確率分布 $F_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ を平均場近似による確率分布関数

$$F_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = F(\mathbf{r}) F(\mathbf{r}'), \quad (14)$$

で近似している。

最大エントロピー理論は、 $P(z), I, H$ 一定の制約条件のもとで Shannon entropy \hat{Z} を最大にする分布を求める。その平衡渦分布は、次の非線形積分方程式を満足する (mean field equation の積分形)。

$$\log F(\mathbf{r}) + 1 + \alpha(z) + \beta(x^2 + y^2) + \frac{\gamma}{4\pi} \iiint \frac{F(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = 0. \quad (15)$$

ここで $\alpha(z), \beta, \gamma$ はそれぞれ $P(z), I$ および H に関連した Lagrange 未定定数である。

平衡状態において軸対称な分布となる ($F(x, y, z) = F^c(r, z)$) とき、式 (10), (12), (13) および (15) は次のように書くことができる。

$$P(z) = 2\pi \int_0^\infty r F^c(r, z) dr, \quad (16)$$

$$\hat{I} = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^\infty dr r^3 F^c(r, z) = 1, \quad (17)$$

$$\frac{H}{\hat{N}^2} = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{z_1}^{z_2} dz' \int_0^\infty dr \int_0^\infty dr' \frac{rr' F^c(r, z) F^c(r', z')}{\sqrt{(r+r')^2 + (z-z')^2}} \times K \left(2\sqrt{\frac{rr'}{(r+r')^2 + (z-z')^2}} \right), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \log F^c(r, z) + 1 + \alpha(z) + \beta r^2 \\ + \frac{\gamma}{\pi} \int_{z_1}^{z_2} dz' \int_0^\infty dr' \frac{r F^c(r', z')}{\sqrt{(r+r')^2 + (z-z')^2}} \\ \times K \left(2\sqrt{\frac{rr'}{(r+r')^2 + (z-z')^2}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Kは第一種楕円関数である。

上式 of 非線形積分方程式を、反復法を用いて数値的に解く。初期値は、直接数値計算における平衡状態時の確率密度分布のデータとする。収束解を得るためには、良い初期値と数多くの反復が必要となる。Hoshi and Miyazaki [15]は正温度領域での収束解を与えた。

5.2 ‘0’-inverse-temperature での理論解

‘0’-inverse-temperature で式 (19) にてラグランジュ未定乗数 $\gamma = 0$ となる。平衡状態の半径方向渦分布は鉛直高さによらず正規分布となる。図6に示すように直接数値計算 (Case B) で平衡状態渦分布は理論解と良好に一致する。

$$F(r, z) = \frac{P(z)}{\pi} \exp(-r^2) \quad (20)$$

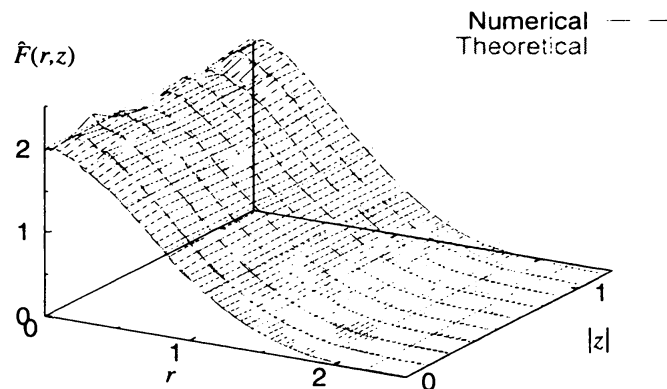


図6: ‘0’-inverse-temperature での平衡状態の確率密度分布 $\hat{F}(r, z)$, 理論解との比較, 実線: 直接数値計算結果、破線: 理論解

5.3 ‘Gaussian Model’(半径方向の渦分布近似モデル)

‘0’-inverse-temperature で平衡渦分布は正規分布となるため、半径方向渦分布を正規分布であると仮定した ‘Gaussian Model’ を導入する。 ‘Gaussian Model’ では確率密度関数 $F(r, z)$ を次のように近似する。

$$F(r, z) = \frac{P(z)}{\pi a^2(z)} e^{-\frac{r^2}{a^2(z)}} \quad (21)$$

鉛直方向に高さの異なる層ごとに半径方向は正規分布していると仮定する。各層の分布はパラメータ $a(z)$ (便宜上、パッチ半径と以後呼ぶ) によって示される。

$$\int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{P(z)}{\pi a^2(z)} e^{-\frac{r^2}{a^2(z)}} = P(z) \quad (22)$$

$P(z)$ は鉛直渦分布であり、式 (16) から得られる。角運動量とエネルギーは式 (17),(18) から次のように変形できる。

$$I = N\Gamma \int a^2(z) P(z) dz \quad (23)$$

$$H = \frac{N^2 \Gamma^2}{\pi^2} \int dz \int dz' \int_0^\infty dr \int_0^\infty dr' \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{P(z) P(z')}{a^2(z) a^2(z')} \frac{r r' e^{-\frac{r^2}{a^2(z)}} e^{-\frac{r'^2}{a^2(z')}}}{\sqrt{(r+r')^2 + (z-z')^2}} \\ & \times K \left(2 \sqrt{\frac{r r'}{(r+r')^2 + (z-z')^2}} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Shannon Entropy も簡単な形で記述される。

$$\log Z = -N \int dz \int_0^\infty \frac{2r dr}{a^2(z)} P(z) e^{\frac{r^2}{a^2(z)}} \quad (26)$$

$$\times \left[\log \left(\frac{P(z)}{\pi a^2(z)} \right) - \frac{r^2}{a^2(z)} \right] \quad (27)$$

$$= -N \int dz P(z) \left[\log \left(\frac{P(z)}{\pi a^2(z)} \right) - 1 \right] \quad (28)$$

I 、 E の保存量のもとで Shannon entropy を最大にするよう、 $\delta a(z)$ で変分することで次の積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & - 2a^2(z) + \beta a^4(z) \\ & + \frac{\bar{\gamma}}{\pi^2} \int_{z_1}^{z_2} dz' \left[-\frac{2P(z')}{a^2(z)} \int_0^{a(z)} dr \int_0^{a(z')} dr' \frac{r r'}{\sqrt{(r+r')^2 + (z-z')^2}} \right. \\ & \quad \times K \left(2 \sqrt{\frac{r r'}{(r+r')^2 + (z-z')^2}} \right) \\ & \quad + \frac{P(z') a^2(z)}{a^2(z')} \int_0^{a(z')} dr' \frac{r'}{\sqrt{(a(z)+r')^2 + (z-z')^2}} \\ & \quad \left. \times K \left(2 \sqrt{\frac{a(z) r'}{(a(z)+r')^2 + (z-z')^2}} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

ここで、 β と γ は Lagrange 未定定数である。式 (29) は一変数 $a(z)$ に対する微分方程式であり、容易に収束解が求められる。

6 結果および考察:平衡状態渦分布のエネルギー依存性

'Gaussian Model' を用いて平衡渦分布のエネルギー依存性を調べた. 平衡状態の鉛直方向角運動量分布 $J(z)$ を図 7 に示す.

$$\begin{aligned} \frac{I}{N\Gamma} &= \int_{-z_{max}}^{z_{max}} dz \int_0^{\infty} r^3 F(r, z) dr \\ &= \int_{-z_{max}}^{z_{max}} J(z) dz \end{aligned} \quad (30)$$

角運動量が大きいかほど渦分布は対称軸まわりに広がり, 小さいほど分布は対称軸に集中していることを示す. エネルギーを上げると中心層では対称軸に対して分布は集中し上下層で対称軸に対して分布は広がる. また, エネルギーを下げると中心層では対称軸に対して広がり上下層では対称軸に対して集中する.

直接数値計算結果より平衡状態の鉛直方向角運動量分布 $J(z)$ を求めたものを図 8 に示す. Case A(正温度領域, $E = 3.045 \times 10^{-2}$) の場合, 中心層で対称軸に対して分布は広がり上下層で対称軸に対して分布は集中する. Case B('0'-inverse-temperature, $E = 3.130 \times 10^{-2}$) の場合, 鉛直方向に均一な分布となり Case C(負温度領域, $E = 3.236 \times 10^{-2}$) の場合, 中心層で対称軸に対して分布は集中し, 上下層で対称軸に対して分布は広がる. 鉛直方向角運動量分布のエネルギーに対する依存性は定性的に直接数値計算結果と 'Gaussian Model' の平衡解で一致する. 'End-effect' と 'Inverse end-effect' のメカニズムは次のように説明される. エネルギーに対して中心層の渦分布が大きな影響力を持つ. 中心層の渦分布が対称軸に対して広がればエネルギーは小さくなり, 対称軸に対して集中すればエネルギーは大きくなる. しかし角運動量の保存を満たすように上下層で分布が変化する. よってエネルギーを小さくする (中心層の渦分布が対称軸に対して広がる) と上下層では対称軸に対して渦分布が集中し, エネルギーを大きくする (中心層の渦分布が対称軸に対して広がる) と上下層では対称軸に対して渦分布が広がると考えられる.

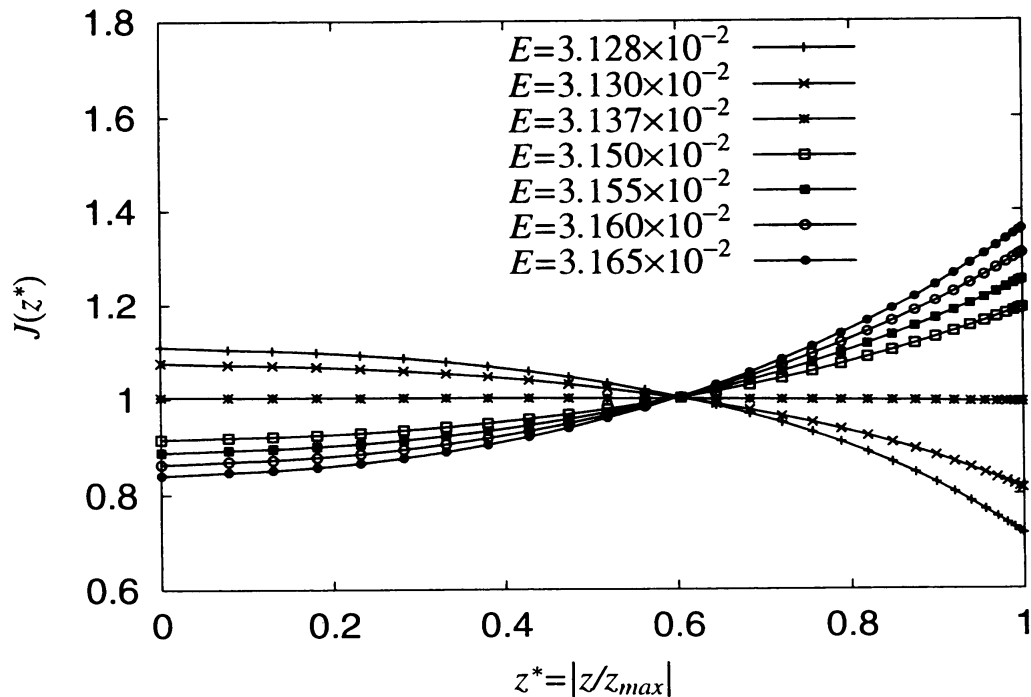


図 7: 鉛直方向角運動量分布 $J(z)$ のエネルギー依存性: 'Gaussian Patch Model' による平衡解

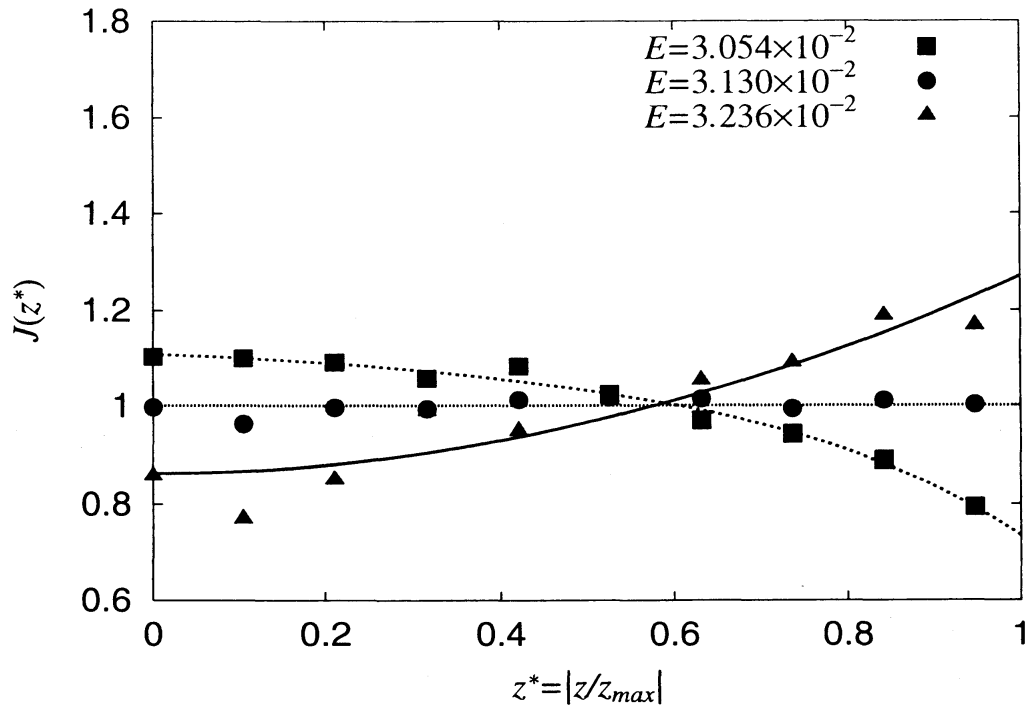


図 8: 鉛直方向角運動量分布 $J(z)$ のエネルギー依存性: 直接数値計算結果

7 結言

準地衡風点渦系の平衡状態について、直接数値計算と理論計算を行った。ミクロカノニカル統計的にエネルギーに関する状態数分布を調べ、 $'0'$ -inverse-temperature (エネルギー最頻度となる状態)、正温度領域 (エネルギー増加に伴い状態数も増加する領域)、負温度領域 (エネルギー増加に伴い状態数が減少する領域) のエネルギーについて数値計算を行い平衡渦分布を調べたところ、 $'0'$ -inverse-temperature では、初期配置と変わらずに平衡状態になり、鉛直方向に依存せず、半径方向は正規分布となった。正温度領域では、中心層では対称軸まわりに広がり、上下層では対称軸付近に集中する 'End-effect' がみられた。また負温度領域では、中心層では対称軸付近に集中し、上下層では対称軸まわりに広がる 'Inverse end-effect' がみられた。

'Gaussian Model' モデルを用いた最大エントロピー理論による平衡解を求め、直接数値計算で得られた平衡解のエネルギー依存性を定性的に再現した。

平衡分布のエネルギー依存性は、エネルギーを下げると中心層で渦分布が対称軸まわりに広がり、上下層で対称軸に集中する。エネルギーを上げると中心層で渦分布が対称軸に集中し、上下層で対称軸まわりに広がる。そのメカニズムは、中心層の分布がエネルギーに大きく影響し、角運動量による制約条件を上下層の分布が変化により満たす為である。

参考文献

- [1] Onsager, L., "Statistical hydrodynamics", *Nuovo Cimento Suppl.*, **6** (1949), pp.279-287
- [2] Joyce, G. and Montgomery, D., "Negative temperature states for the two-dimensional guiding center plasma", *J. Plasma Phys.*, **10** (1973), pp.107-121
- [3] Kida, S., "Statistics of the System of Line Vortices", *J. Phys. Soc. Jpn.*, **39**(5) (1975), pp.1395-1404
- [4] Lundgren, T. S. and Pointin, Y. B., "Statistical Mechanics of Two-Dimensional Vortices", *J. Stat. Phys.*, **17**(5) (1997), pp.323-355
- [5] Yatsuyanagi, Y., Kiwamoto, Y., Tomita, H., Sano, M. M., Yoshida, T. and Ebisuzaki, T., "Dynamics of Two-Sign Point Vortices in Positive and Negative Temperature States", *Phys. Rev. Lett.*, **94** (2005), 054502

- [6] Pedlosky, J., "Geophysical Fluid Dynamics", *Springer, New York*, (1979), pp.624
- [7] McWilliams, J. C., "Statistical properties of decaying geostrophic turbulence", *J. Fluid Mech.*, **198** (1989), pp.199-230
- [8] McWilliams, J. C., Weiss, J.B. and Yavneh, I., "Anisotropy and coherent vortex structures in planetary turbulence", *Science.*, **264** (1994), pp.410-413
- [9] Meacham, S. P., "Quasigeostrophic, ellipsoidal vortices in a stratified fluid", *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, **16** (1992), 189–223.
- [10] Meacham, S.P., Pankratov, K.K., Shchepetkin, A.F. and Zhmur, V. V., "The interaction of ellipsoidal vortices with background shear flows in a stratified fluid", *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, **21** (1994), pp.167-212.
- [11] Meacham, S.P., Morrison, P.J. and Flierl, G.R., "Hamiltonian moment reduction for describing vortices in shear", *Phys. Fluids*, **9** (1997), pp.2310-2328.
- [12] Dritschel, D. G., Reinaud, J. N., and McKiver, W. J., "The quasi-geostrophic ellipsoidal vortex model", *J. Fluid Mech.*, **505** (2004), pp.201-223.
- [13] Miyazaki, T., Taira, H., Niwa, T. and Takahashi, N., "Refinements on the quasi-geostrophic wire-vortex model", *J. Phys. Soc. Jpn.*, **74** (2005), pp.359-367.
- [14] Li, Y., Taita, H., Takahashi, N. and Miyazaki, T., "Refinements on the Quasi-geostrophic Ellipsoidal Vortex Model", *Phys. Fluids*, **18**(7) (2006), 076604
- [15] Hoshi, S. and Miyazaki, T., *FDR*, **40** (2008), p.662-678.