

数式処理と数学的活動

千葉県立東葛飾高等学校 大橋 真也 (Shinya Oohashi)
Higashi-Katsushika HighSchool

2009年に発表された高等学校の新学習指導要領解説では、「数学的活動」を「課題学習」というものとして取り上げ、その中でのコンピュータ活用について位置づけている。このような高等学校における「課題学習」の中で、数式処理はどのような役割を果たし、どのような活動を考えることが出来るのかを考察した。

1 はじめに

昨年は新学習指導要領とその数学的活動に関して、今後の数学教育でのコンピュータの活用に関して憂慮することについて考察をした。今年度、高等学校においても新学習指導要領解説が発表され、教科書の編集が始まり、徐々に内容が明らかになるにつれて、今後の数学教育におけるコンピュータ活用の位置づけについて考察することが可能となった。

これらの考察は、実際に教科書が発行され、学校現場での移行措置が実施され、個々の学校における教師の指導内容に対する考え方に大きく左右されることではある。しかし今後の数学教育における「数学的活動」という新しい視点の可能性を考えることによって、少しでも子どもたちの思考力や表現力を伸ばすツールとしての数式処理の位置づけを明確にすることができるものとして考える。

2 数学的活動とは何か

2008年に小・中学校、2009年には高等学校の新しい学習指導要領が発表され、2009年4月からは小・中学校では、移行措置が始まった。同じく2009年に公表された高等学校学習指導要領解説数学編では、小学校学習指導要領解説算数編、中学校学習指導要領解説数学編とは、書きぶりが大きく異なり、数学的活動の位置づけも大きく異なる。

昨年同様、数学的解説について説明すると、以下のようになる。

数学的活動について

数学的活動とは、生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営みである。ここで、「数学にかかわりのある様々な営み」として中学校数学科において重視しているのは、数や図形の性質などを見いだす活動、数学を利用する活動及び数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動である。もちろん、これらの数学的活動は基本的に問題解決の形で行われ、その過程では、試行錯誤をしたり、操作したり、資料を収集整理したり、実

験したり、観察したりするなど数学にかかわりのある様々な営みが行われるが、(数学的活動)では上述した三つの数学的活動を示している。数学的活動については、生徒が自立的、主体的に取り組む機会を意図的、計画的に設けることとしている。

学習指導要領の中では、このように定義されているが、一般に「数学的活動」は、観察可能な活動で、観察・操作・実験を表す「外的活動」と観察可能でない、類推・演繹的思考の活動を表す「内的活動」の2つに分けて考えることができる。これは、NCTM(全米教師協会)の出している米国の数学教育の基準となっている Principle & Standards for School Mathematics が定めている Content standard と Process standard の分類によく似ている。米国では、学習内容を Number and Operation, Algebra, Geometry, Measurement, Data Analysis and Probability を含む Content standard と、Problem Solving, Reasoning and Proof, Communication, Connection, Representation からなる Process standard に分け、それぞれの分類がまったく独立ではなく、2つの分類が有機的に交差するような2次元的な枠組みの中で教科内容や教科書の内容を組み立てるように工夫されている。日本においてもこれまであった数学の教科の枠組みである、数と式、図形、関数、資料の活用¹のような1次元的な枠組みから、そこにそれぞれの内容に数学的内容として、付加したものではなく、実際には、2次元的な枠組みの第2の軸としての数学的活動が存在しているものとも考えることもできる。

すなわち今回の学習指導要領の改訂では、「数学的活動」である、Process standard という新たな数学に関する次元を増やして考えるという大きな変化としてみるることができる。またこの「数学的活動」や Process standard の次元の新設及び重視という傾向は、国際学力調査等における日本の数学的能力の向上を視野に入れたものでもあり、いままで欠如していた数学的側面の導入とも言えるだろう。

しかしながら、高等学校の学習指導要領解説数学編には、中学校のような数学内容の中にここに大きく位置づけられる「数学的活動」の項目が存在していない。活動の具体的事例に関してもそれほど書かれていない。実際に高等学校における数学的活動の位置づけを学習指導要領解説の中では、以下のように書かれている。

算数的活動・数学的活動は、基礎的・基本的な知識・技能を確実に身に付けるとともに、数学的な思考力・表現力を高めたり、算数・数学を学ぶことの楽しさや意義を実感したりするために、重要な役割を果たすものである。算数的活動・数学的活動を生かした指導を一層充実し、また、言語活動や体験活動を重視した指導が行われるようにするために、小・中学校では各学年の内容において、算数的活動・数学的活動を具体的に示すようにするとともに、高等学校では、必修科目や多くの生徒の選択が見込まれる科目に「課題学習」を位置付ける。

つまり、高等学校においては「数学的活動」を「課題学習」という自由度の高いものとして、位置づけようとしているということである。実際に「課題学習」に関して、さらに細かく読み進めると、数学Iの項目の中には、以下のように示されている。

¹中学校の数学内容の分類である。

課題学習は、①から④までの内容又はそれらを相互に関連付けた内容に関連した課題を設け、それらの解決を通して数学のよさを認識できるようにするものである。課題学習については、指導時期や場面を工夫し数学的活動を一層重視した指導が行われる必要がある

また高等学校数学化の目標の中には、「数学的活動」について以下のような表現がある。

数学的活動を通して、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め、事象を数学的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。

これらはまさに NCTM の Process standard にも共通するものであり、「数学のよさ」を認識させる観点として、「課題学習」を位置づけているのである。解説書の第2節の内容の取り扱いでは、「数学的活動」を、「自ら課題を見だし、解決するための構想を立て、考察・処理し、その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり、それを発展させたりすること」、「学習した内容を生活と関連付け、具体的な事象の考察に活用すること」、「自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり、議論したりすること。なお、数学的活動は、コンピュータなどを積極的に活用することによって一層充実したものにすることができる」としており、この最後の項目では、「数学的活動」と「コンピュータの積極的な活用」について示されている。

3 課題学習とは何か

それでは、「課題学習」について、より詳細にみていこう。解説書の数学Iの項目には、課題学習の実施に関して以下のような表現がある。

課題学習の実施については、内容との関連を踏まえ、適切な時期や場面を考慮することが大切である。必ずしも、それぞれの項目の終りに実施する必要はなく、複数の項目にわたる課題を学習したり、場合によってはより早い時期に課題学習を行いそれ以後の内容ではどのようなことを学習するのを感じ取らせ、関心や意欲をもって学習を進めさせることも可能である。

ここでは、複数項目の関連付けなどを意識させるために、単元のまとめではなく、単元の早い時期での関心や意識付けのための「課題学習」を位置づけている。

実施に当たっては、一方的に知識を与えるのではなく、数学的活動を一層重視することが大切である。例えば、課題を理解する、結果を予想する、解決の方向を構想する、解決する、解決の過程を振り返ってよりよい解決を考えたり、更に課題を発展させたりする、という一連の過程に沿って、必要な場面で適切な指導を工夫するとともに、適宜自分の考えを発表したり議論したりするなどの活動を取り入れるよう配慮する。

さらにこの「課題学習」は関心・意欲を高めるだけでなく、知識を理解したり、技能を身につけるだけでもなく、結果を予想したり、解決の方向を構想する、解決する、振り返るなどの問題解決の過程を意識して、取り入れることを示している。

これらの具体的な事例は、解説書の数学 I の中では、以下のような例があげられている。

黄金比について説明し、身の回りにあるものから黄金比をもつ形を探したり、黄金比に関係のある話題を調べたりする。黄金比について説明する際、黄金比と対比させて紙の寸法と白銀比との関連に触れることも考えられる。

さらに、図形と計量の内容と関連させて黄金比を取り上げ、数の不思議さを感じ取らせる。例えば、正五角形や頂角が 36° の二等辺三角形などを取り上げ、その図形の中に潜む黄金比を見いだしたり、それに関連して 18° や 72° の三角比の値を求めたりする活動を行う。

例えば、食品の値段を上げると売れる食品の数は一定の割合で減少すると仮定して、純利益と食品の値段の関係を二次関数で表し、純利益が最大になるように食品の値段と売れる数を決定する活動が考えられる。特に、食品の値段と売れる食品の数との関係をどのように仮定するのがよいか、を生徒に工夫させるようにする。

また多くの学校で実施される数学 A のなかでは以下のような例があげられている。

例えば、 $23 \times 51 = 1173$ という計算について

左辺：23 について $2 + 3 = 5$ ，51 について $5 + 1 = 6$ ，更に $5 \times 6 = 30$ で $3 + 0 = 3$

右辺：1173 について $1 + 1 + 7 + 3 = 12$ ，更に $1 + 2 = 3$

したがって、このような計算をすると左辺と右辺の計算結果はともに 3 で、等しくなっている。

この他にも「整数の性質」に関連して、江戸時代に吉田光由が著した「塵劫記」の次のような問題を取り上げ、一次不定方程式を利用して解き、その解の意味を考えたり、似たような問題がないか調べ、人間の活動に数学がどのようにかかわっているかを考察したりする活動を行うことも考えられる。

「一斗（十升）入りの桶に油が一斗入っている。七升枡と三升枡を使って、一斗桶と七升枡にそれぞれ五升ずつ油を分けたい。どのようにすればよいか。」
(油分け算)

4 コンピュータの扱い

それでは、学習指導要領解説の中でのコンピュータの扱いはどの程度なのだろうか。解説書の中での「コンピュータ」という用語は 33 回程度しか出現しないが、それらは、次のような科目の中で現れる。

- 数学I (3) 二次関数, (4) データの分析
- 数学III (1) 平面上の曲線と複素数平面, (3) 微分法
- 数学B (1) 確率分布と統計的な推測
- 数学活用 (1) 数学と人間の活動, (2) 社会生活における数理的な考察

実際にコンピュータの活用について書かれているのはこれらの部分だけではあるが、内容としては、グラフとその隣接行列などについての説明なども内容にあり、コンピュータの活用はさまざまな項目の中で実施することが可能であると考えられる。

5 数式処理の関わり

それでは、このような「数学的活動」の中で「数式処理」はどのような活用が考えられるのだろうか。

現行とほぼ同様ではあるが、以下のような活用の可能性が考えられる。

- 数学実験をここで実施できるような教材の作成
- シミュレーションを行うための教材
- 数学的な法則や規則性を見つけるための思考ツール
- 作図・計測を行うためのワークシートの作成ツール

これらは数学における探索的活動や経験的活動のためのツールとしての使い方が主となっているが、これらを使っていくためには、今後教員の指導力や学校での理解が必要になると考えられる。

また教材の作成に関しては、個々の教員が学校の実情に合わせた教材を作成するのが望ましいことではあるが、ある程度カスタマイズ可能な教材や多くの学校での活用に耐えることができる汎用的な教材の作成が望まれる。

またコースウェア的な教材では、前にあげたような「課題学習」としての意味が損なわれてしまい、現行の数学内容の1次元的な捉え方と同様の考え方になってしまうだろう。そのため教員の指導方法の自由度だけでなく、生徒の発想力や思考力の自由度を高めるような教材の作成が望まれている。

6 教材作成プロジェクト

今年で3年目となるが、毎年8月に神戸の甲南大学、日本電子計算株式会社の協力により、中学校、高等学校の教師のための Mathematica による教材作成合宿が実施されている。

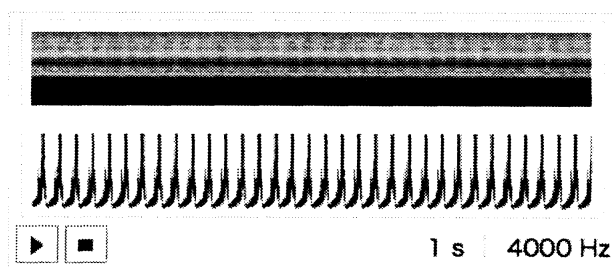
その中で作られた教材例をいくつか紹介する²。

²スクリーンショットは、教材をもとに作ったものであり、教材そのものとは異なる。

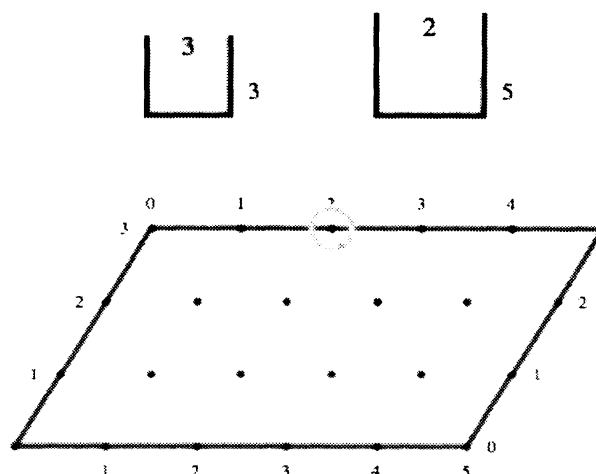
次の例は、コラッツの問題についての再帰回数に周期性があるかどうかを考えさせる教材の中で、ある数のコラッツの問題についての数の繰り返しを音で聞いて、その性質を考えさせるためのサンプルである。

教師は、その周期を音にするための関数を定義することで、生徒はさまざまな数についての繰り返しの音を聴くことができるのである。音という一見数学とは異なる手法で、数を解釈させるということで生徒の関心・意欲は高まり、生徒の課題に取り組む興味も高めることができることだろう。

playCollatz [97]



次の例は、「油分け算」について、実際に試行させたのちに、ダイアグラムを用いて考えさせ、その関連性を示すための教材である。導入時からダイアグラムを提示しては意味がないが、まとめの段階で、考えさせるツールとして提示することで、さらなる発展を考えることができる教材でもある。



7 おわりに

中学校の「数学的活動」や高等学校の「課題学習」においては、数式処理は教材開発や思考ツールとしての可能性を持っている。しかしながら、現行では、教師のこれらに対する理解と技術が不足している。今後もさまざまな研修の機会を考え、数式処理による教材作成を通して生徒の学力感を考えることを進めて行きたいと考えている。