数理解析研究所講究録
第1674巻 2010年 173-182

非線形微分方程式のシミュレーション結果のCASによるビジュアライゼーション化について

東京情報大学・総合情報学部　三宅修平 (Shuhei Miyake)
Faculty of Informatics,
Tokyo University of Information Sciences

1　はじめに

様々な分野で現れる現象の把握は微分方程式の解析に帰着する場合が多い．しかしながら，これらの問題は非線形の問題になる場合が多く，解析的な解を構成できないことから，何らかの近似解法により数値解を求めることになる．このような問題の近似解法としては，差分法，有限要素法が汎用性を有する数値計算法として知られているが，高い非線形性を有する問題に対して，積分方程式の数値解法が有効な場合がある．

本稿では Wang [2] により提案された“片持ち梁の一端に垂直方向から集中荷重を作用させ，他の一方の固定支持角度 α を $0\sim 2\pi$ まで変化させたとき，弾性梁には如何なる梁形状が存在するか？”という Elastica の数理モデルを取り上げる．

解析に際しては，2階の常微分方程式として定式化される基本式を積分操作することにより積分方程式に変換し，得られた積分方程式を離散化することにより，数値シミュレーションを行う．さらにその数値結果を代表的な *CAS* である *Mathematica* によりビジュアライゼーション化できることを示し，弾性梁の興味深い非線形現象を明らかにする．

2　基本方程式

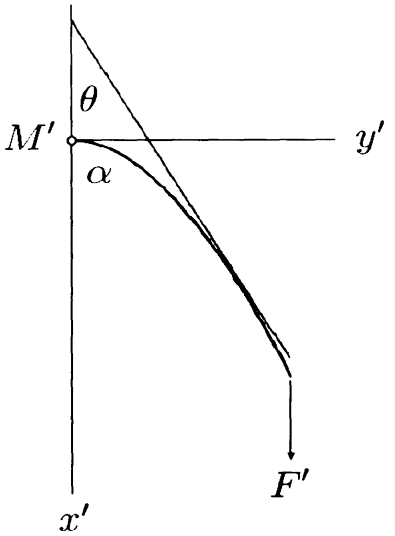
解析の対象とするモデルは，Wang [2] による Elastica 問題で，Fig.1 に示されるような長さ L の一様に薄い弾性棒の一端に集中荷重 F' を作用させ，他の一端の固定角度 α を $0\sim 2\pi$ まで変化させたとき，弾性梁が如何になる挙動するかというものである．

Fig.1 で示されるようなモデルにおいて，梁の大変形挙動を支配する基本微分方程式は梁の変形曲線の曲率 $\frac{d\theta}{ds'}$ が，曲げモーメント M' に比例し，曲げ変形に伴う梁の伸縮を無視するという，古典 Bernoulli–Euler 理論に従うならば，以下の釣り合い式及び幾何学的関係式を得る．

$$EI\frac{d\theta}{ds'} = F'y' - M' \tag{1}$$

$$\frac{dx'}{ds'} = \cos\theta \tag{2}$$

$$\frac{dy'}{ds'} = \sin\theta \tag{3}$$



EI	:	Flexural rigidity
s'	:	Arc length
θ	:	Local angle of inclination
x', y'	:	Cartesian coordinate
F'	:	End load

Fig 1: The coodinate system

ここで，(1) 式を s' で微分し，(3) 式を適用すれば，次式を得る．

$$EI\frac{d^2\theta}{ds'^2} = F'\sin\theta \tag{4}$$

さらに，(4) 式および (2，3) 式を無次元化すれば， 以下を得る．

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = K^2\sin\theta \tag{5}$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta \tag{6}$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin\theta \tag{7}$$

ただし，無次元量は以下で与えられる．

$$s = \frac{s'}{L}, x = \frac{x'}{L}, y = \frac{y'}{L}, K^2 = \frac{F'L^2}{EI}, M = \frac{M'L}{EI} \tag{8}$$

境界条件は，Fig.1 より，荷重端で曲げモーメントが 0，もう一方の回転させる一端で slope angle が $\alpha(0 \leqq \alpha \leqq 2\pi)$ なる，以下の式で与えられる．

$$\theta(0) = \alpha \tag{9}$$

$$\frac{d\theta}{ds}(1) = 0 \tag{10}$$

以上により，本稿で対象とする数理モデルは (5,9,10) 式により，与えられたことになる．

3 積分方程式への変換

本稿では積分方程式への変換は文献 [1] の手法に従う．(5) 式の両辺を 1 から任意の s まで積分すると

$$\frac{d\theta}{ds}(s) - \frac{d\theta}{ds}(1) = \int_1^s K^2 \sin\theta d\rho \tag{11}$$

を得る．

ここで境界条件式 (10) を考慮に入れ，(11) 式をさらに 0 から s まで積分操作を行えば次式を得る．

$$\theta(s) - \theta(0) = \int_0^s \left\{ \int_1^\omega K^2 sin\theta d\rho \right\} d\omega \tag{12}$$

境界条件 (9) 式を考慮に入れ，(12) の右辺を部分積分すれば，以下の積分方程式を得ることができる．

$$\theta(s) = \alpha - K^2 \left\{ s\int_s^1 \sin\theta d\rho + \int_0^s \rho \sin\theta d\rho \right\} \tag{13}$$

次に，積分方程式表現 (13) が境界条件式 (9,10) を満たしているか確かめる．(13) 式を s で微分すると

$$\frac{d\theta}{ds}(s) = -K^2 \int_s^1 \sin\theta d\rho \tag{14}$$

ここで $s = 1$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{ds}(1) &= -K^2 \int_1^1 \sin\theta d\rho \\ &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

となり，境界条件式 (10) を満たす．また，(13) 式で $s = 0$ と置けば，明らかに境界条件式 (9) を満たす．

以上により，基本微分方程式 (5) と境界条件式 (9,10) は積分方程式表現 (13) に変換されたことになる．

梁の各点におけるモーメント $M(s)$ は (13) 式を s で微分することにより，以下で与えられる．

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{ds}(s) &= -K^2 \int_s^1 \sin\theta d\rho \\ &= -M(s) \end{aligned} \tag{16}$$

従って，固定端のモーメント $M(0) = M^*$ は

$$M^* = \int_0^1 K^2 \sin\theta d\rho \tag{17}$$

で与えられる．

また，梁の変形形状については，(6,7) 式を変形すれば梁の各点における x, y 方向の変位が，以下のように表現できる．

- x 方向の変位

$$x(s_i) = \int_0^{s_i} \cos\theta ds \tag{18}$$

- y 方向の変位

$$y(s_i) = \int_0^{s_i} \sin\theta ds \tag{19}$$

但し $(0 \leq s_i \leq 1)$

4 積分方程式の離散化

閉区間 $[0,1] = [s_0, s_n]$ を n 等分し (13) 式に適用すれば，以下の $n+1$ 個の式を得る．

$$\theta(s_i) = \alpha - K^2 \left\{ s_i \int_{s_i}^{1} \sin\theta d\rho + \int_0^{s_i} \rho \sin\theta d\rho \right\} \tag{20}$$

$$(\text{ただし}\, i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

ここで，$\theta(s_i) = \theta_i$ とおき，各積分項を離散化された未知関数値 $\theta_0 \sim \theta_n$ を用い，台形公式による数値積分を行えば，(20) 式は離散化され，近似的に以下の $n+1$ 元の連立超越方程式に帰着する．

$$\theta_i \;=\; \alpha - K^2 \frac{1}{2n} \left[s_i \sum_{j=i}^{n-1} (\sin\theta_j + \sin\theta_{j+1}) + \sum_{j=0}^{i-1} (\rho_j \sin\theta_j + \rho_{j+1} \sin\theta_{j+1}) \right] \tag{21}$$

梁の各点における変位は，(21) 式の数値計算により得られた近似解 θ_i を利用して，(18,19) 式を台形公式による数値積分することにより計算することができる．また M^* も同様に (17) 式を数値積分することにより計算することができる．

5 連立超越方程式の数値計算

通常，連立超越方程式は Newton 法により数値解を求めることができる．しかしながら前節で与えた連立超越方程式 (21) は α を $0 \sim 2\pi$ まで変化させたとき $\theta_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ がどのような解の挙動を示すかを捉える必要がある．

本稿で取り上げる Elastica 問題は，荷重パラメータ K が増大したとき極限点を有するような非線形性の高い問題であることから，単純な α 増分解法では解析が不可能である．このような問題に対しては [5] が有効であることが知られていることから，(21) 式の数値計算に対して [5] を適用した．

6 *Mathematica* によるビジュアライゼーション化

CAS の定番ソフトである *Mathematica* は数式処理のみならずアニメーションを含む強力なグラフィック機能を有している．本稿では，数値計算により得られた結果をテキストファイルとして書き込み，そのデータを読み込み *Mathematica* 上でビジュアライゼーション化した．以下にプログラム例を示す．

```
avsm=ReadList["d:anvsm10.dat",{Number,Number}];
shape=ReadList["d:devsm10.dat",{Number,Number}];
bdata=Partition[shape,51];
Animation[Do[Show[
    GraphicsArray[{
    Graphics[{RGBColor[0.8,0.1,0],
        Thickness[0.007],PointSize[0.08],
        Line[Take[avsm,i]],Point[Part[avsm,i]]},
             PlotRange ->{{0.0,7.0},{-30.,30.}},
             Frame ->True,AspectRatio->1.0,
             Axes->Automatic],
    Graphics[{RGBColor[0.8,0.1,0],
        Thickness[0.007],PointSize[0.08],
        Line[Part[bdata,i]],Point[{0.0,0.0}]},
             PlotRange ->{{-1.,1.},{-1.,1.}},
             Frame ->True,AspectRatio->1.0,
             Axes->Automatic]}]],
   {i,1,Length[bdata],1}]]
```

ただし，anvsm10.dat は $M^* - \alpha$ 曲線の座標データである．また devsm10.dat は梁形状を表す座標データである．上述のプログラムにより，$M^* - \alpha$ 曲線とそれに伴う梁形状の変化を同時に並べてビジュアライゼーション化できる．

7 数値計算例

数値計算に際しての [0, 1] の分割数 n は非線形性が低い場合，つまり $K = 5$ 以下程度の場合には $n = 20$ 程度で十分な精度の解を得ることができる．しかしながら $K = 5$ を超える数値計算では非線形性が非常に高くなり，梁形状も非常に複雑になることから不自然な数値計算結果となる．このようなことから，本稿では分割数 n はすべての数値計算例において $n = 50$ を採用した．収束条件はすべての残差式の和が 1.0×10^{-8} 以下になったとき収束解と見做した．

Wang[2] は $K = 1 \sim 5$ までの解を，Runge-Kutta 法により計算している．これらの解はすべて本手法とグラフ上で一致した．

本手法による $K = 1$ の場合の $M^* - \alpha$ 曲線を Fig.2 に示す．この計算例の場合，M^* に対して α が 1 対 1 対応となっている．したがって，任意の固定端の支持角度 α に対して，梁形状は一意に決まる．

次に，$K = 2$ の場合の $M^* - \alpha$ 曲線を Fig.3 に示す．

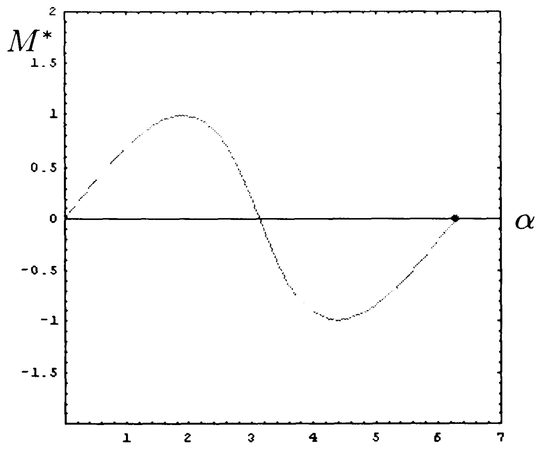


Fig 2: Torque curve for $K = 1$

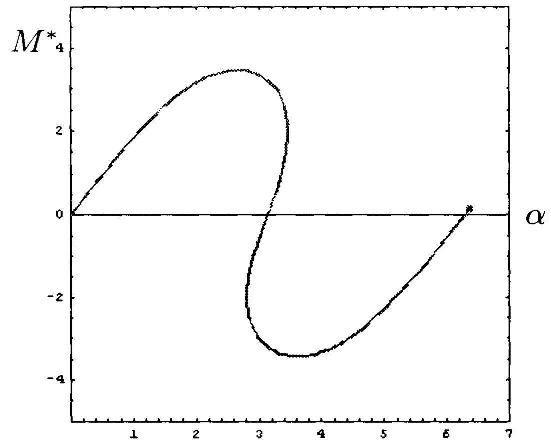


Fig 3: Torque curve for $K = 2$

この計算例の場合，α が π 近傍では 3 つの解が存在している．従って，α が π 近傍では，1 つの支持角度 α に対して，3 つの梁形状が存在していることになる．

Fig.4〜Fig.6 では $K = 4, 6, 10$ の場合の $M^* - \alpha$ 曲線を示す．K の値が増加するにつれて，α が π 近傍では多数の解が存在するようになる．特に，$K = 10$ の場合，α が π 近傍では，1 つの支持角度 α に対して，7 つの梁形状が存在していることになる．

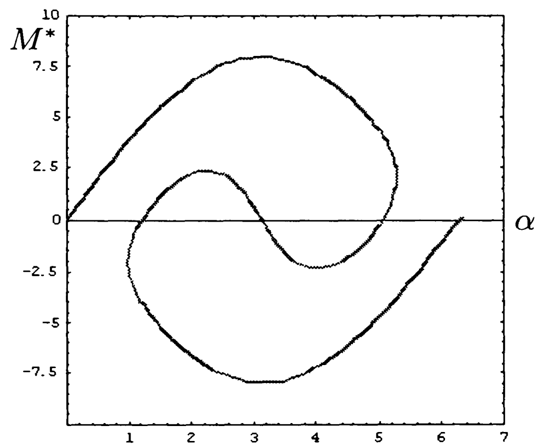


Fig 4: Torque curve for $K = 4$

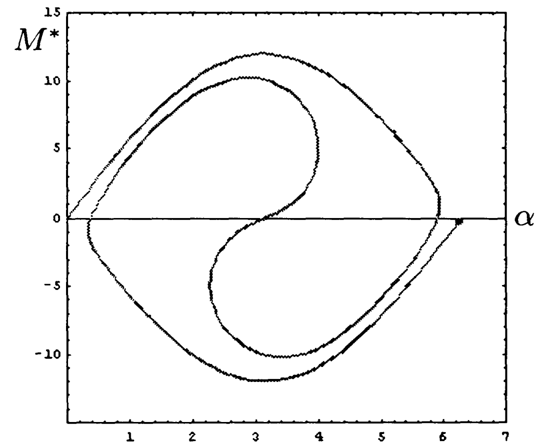


Fig 5: Torque curve for $K = 6$

Fig.7 と Fig.8 に $K = 12, 14$ の場合の $M^* - \alpha$ 曲線を示す．この計算結果は，$M^* - \alpha$ 曲線が非常に複雑になるので，Fig.2〜Fig.6 の半分である α を $0 \sim \pi$ まで変化させた場合のみの $M^* - \alpha$ 曲線を示す．Fig.7 と Fig.8 に示されている通り，α は $0 \sim \pi$ までのみの計算結果であるにもかかわらず，π 近傍では 5 つの解が存在している．

Fig.9〜Fig.12 は $K = 14$ の場合の $\alpha - M^*$ 曲線と，それに伴なう梁形状がどのように変化するかを示している．複雑な $\alpha - M^*$ 曲線及び梁形状の非線形挙動が捉えられていることが解る．

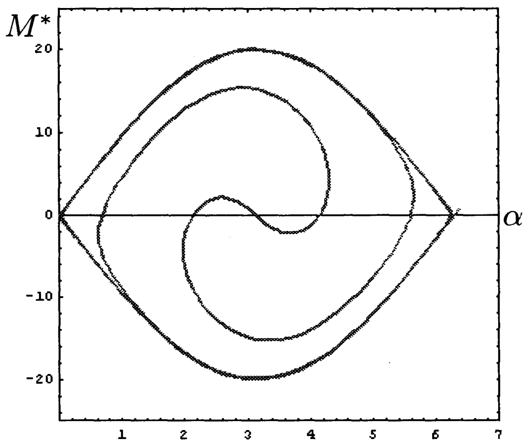


Fig 6: Torque curve for $K = 10$

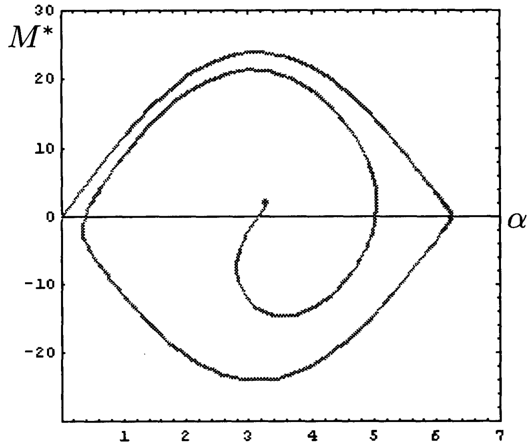


Fig 7: Torque curve for $K = 12$

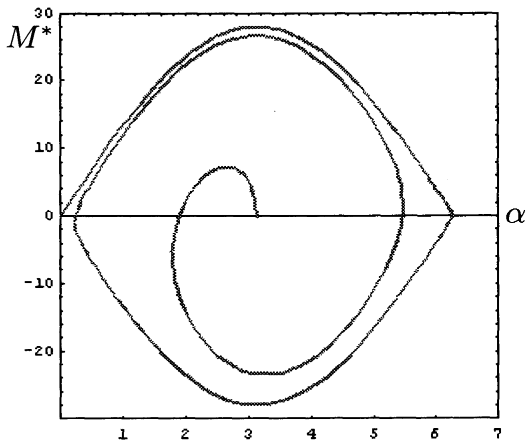


Fig 8: Torque curve for $K = 14$

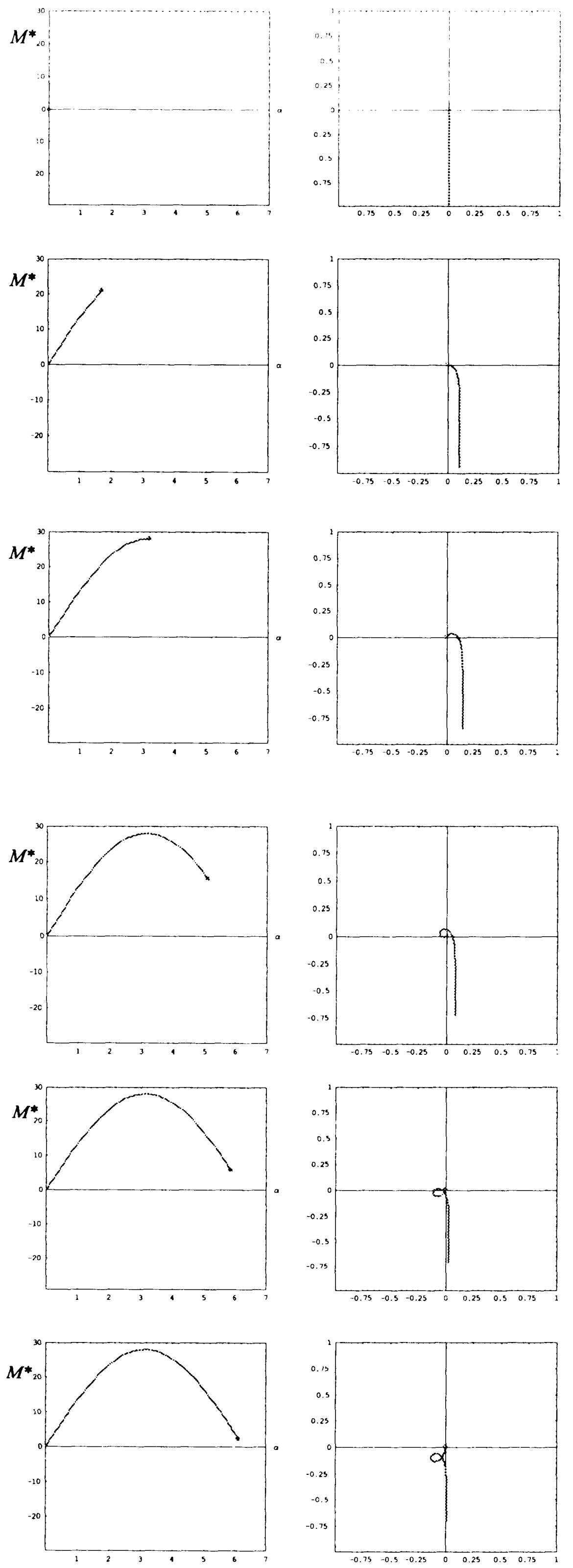


Fig 9: Torque curve and cantilever configurations for $K = 14$ in phase 1.

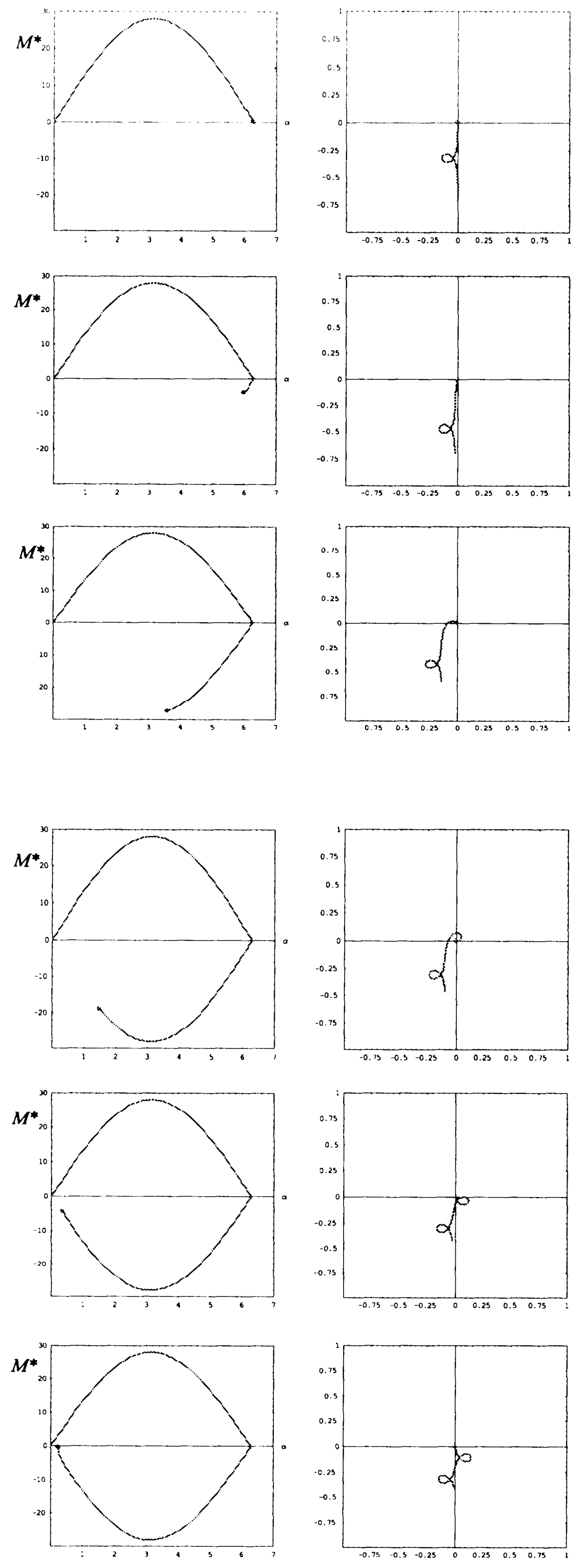


Fig 10: Torque curve and cantilever configurations for $K = 14$ in phase 2.

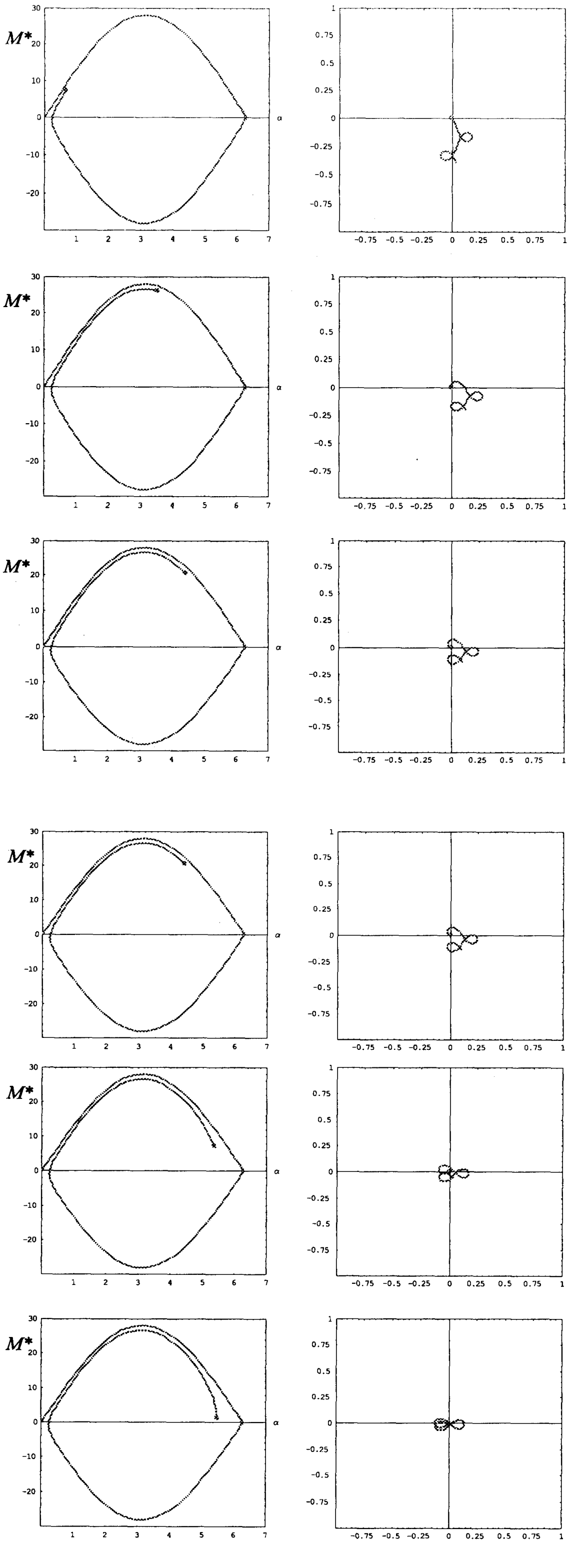


Fig 11: Torque curve and cantilever configurations for $K = 14$ in phase 3.

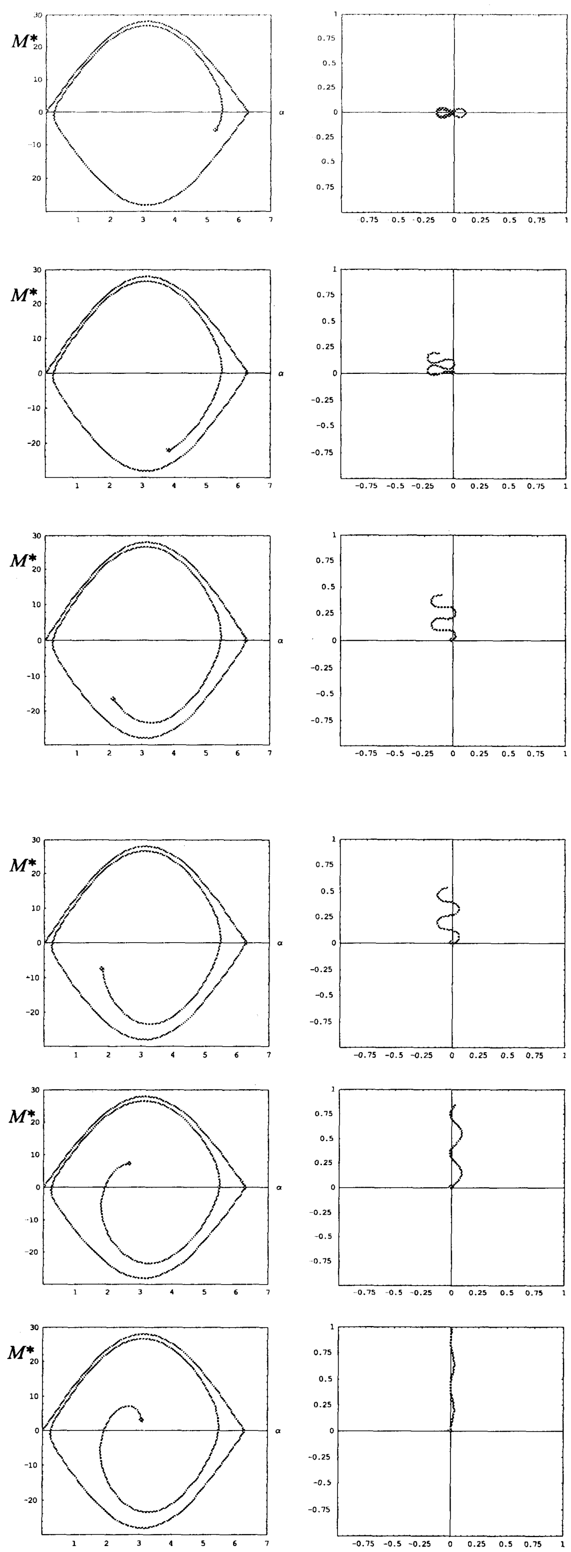


Fig 12: Torque curve and cantilever configurations for $K = 14$ in phase 4.

8 結語

2階の非線形微分方程式として与えられるElasticaの問題を積分方程式に変換し，得られた積分方程式を離散化し数値計算を行った．さらに得られた数値結果を *Mathematica* により容易にアニメーション化できることを示した．

これらを通じて，簡単な非線形微分方程式を積分方程式に変換し，数値シミュレーションすることにより，非常に興味深い非線形現象が現れることを明らかにした．

本稿では，梁の先端に集中荷重を受ける場合のシュミレーションを行ったが，今後は等分布荷重を受ける場合についても数値計算を行い，そのビジュアライゼーション化について，報告する予定である．

参考文献

[1] N.Tosaka, S.Miyake : Analysis of a nonlinear diffusion problem with Michaelis–Menten kinetics by an Integal Equation Method, *Bull. Math. Biol.*, Vol.44, pp.841–849, (1982)

[2] C.Y. Wang : Large deflection of a inclined cantilever with end load, *Int. J. No-Linear Mech.* Vol.16, No.2, pp.98–107, (1976)

[3] S. Miyake,R. Sugino:Visualizations of Nonlinear Phenomena of an Inclined Cantilevers by *Mathematica.*(to appear)

[4] S. Miyake : Integral equation analysis for highly nonlinear problem of an inclined cantilever with uniformly distributed load. (to appear)

[5] Milan Kubicek:Algorithm 502: Dependence of Solution of Nonlinear Systems on a Parameter [C5], ACM Transactions on Math. Software,Vol.2,pp.98–107,(1976)