数理解析研究所講究録
第 1677 巻 2010 年 208-214

チャールズ・バベッジ "Essays on the Philosophy of Analysis" のうち "Analysis of the Essay of Games" について

兵庫県加東土木事務所　野村恒彦 (Tsunehiko Nomura)
Kato Public Construction Office of Hyogo Prefecture

はじめに

"Essays on the Philosophy of Analysis"*1 は、英国の科学者チャールズ・バベッジが残した未刊行の手稿である。バベッジはケンブリッジ大学の学部生時代に友人たちと解析協会 (Analytical Society) を組織し、当時発展していた大陸特にフランスにおける解析学を英国へ導入を図ろうとした。解析協会が 1813 年に刊行した『解析協会論文集』(*Memoirs of the Analytical Society*) は、その大きな足跡の一つと言えるものである。

本稿で述べるように "Essays on the Philosophy of Analysis" は、成立時期から考えてバベッジらの企図の延長上に位置づけられるものである。そこでは大陸解析学の英国への導入にあたって、それらの内容や記号法への論議がなされており、バベッジという 19 世紀初頭の英国数学者の関心の状況も見ることができ、ひいては大陸解析学導入前夜の英国における数学の状況も把握することができるという貴重な文献となっている。

"Essays on the Philosophy of Analysis" は大部な手稿となっているため、各章ごとに論じる形態を採ることにした。従って全体を俯瞰することを目的とした論考は、すべての章を論じた後に行いたいと考える。

1 "Essays on the Philosophy of Analysis" の成立

前述したように "Essays on the Philosophy of Analysis" はバベッジが残した未刊行の手稿であり、19 世紀初頭の英国数学の状況を論じるための貴重な文献である。

"Essays on the Philosohpy of Analysis" に関して、その成立、構成、そして記号法に関しては既に論じているので*2、ここでは簡単に説明を行うこととしたい。

なお、"Essays on the Philosohpy of Analysis" は、大英博物館が刊行しているマイクロフィルムのコレクション No. 37202 に収められている。本稿での議論は関西大学図書館が所蔵しているマイクロフィルムのコピーを使用した。また、"Essays on the Philosohpy of Analysis" はバベッジ自身の手書きによる原稿であるため、判読できない個所も少なからずある。従って手稿の内容を検討するにあたっては、一部の内容ではあるが、ダビーとフィッシュが活字に起こしたものがあるので、それらを参考とした。

"Essays on the Philosohpy of Analysis" の成立について、ダビーはブロムヘッドのバベッジあての 1821 年 3 月 7 日付の書簡の記述をもとに、その成立を 1821 年頃としている*3。実際のバベッジの手稿には日付を確かめる表記がないに等しいので、ダビーが行ったような手段を採るしかないと考える。また、このダビーによる手稿が 1821 年頃成立したという主張は、バベッジが 1822 年以降階差エンジンの設計製作に集中していることから考えて、妥当なものであると考えられる。

またバベッジが 1826 年にルーカス教授の地位を得るために立候補したことは知られているが、その地位を得た場合のテキストとしてこの "Essays on the Philosohpy of Analysis" の使用を予定していたことを、

*1 Ch. Babbage, "Essays on the Philosophy of Analysis", British Museum Additional Manuscripts 37202.
*2 野村恒彦, "チャールズ・バベッジの数学記号に関する研究", 博士論文 (神戸大学), 2007, pp.79-91.
*3 J. M. Dubbey, *The Mathematical Works of Charles Babbage*, (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978), (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004), p.93.

シェーファーは報告している。*4。

シェーファーはこの後、「バベッジはルーカス教授の地位を、関数計算法の高等演習、力学解析、数学記号法の刷新の中心に据えようと提案していた。*5」と述べている。シェーファーのこの主張は、当時のバベッジの関心から考えて妥当なものである。

"Essays on the Philosohpy of Analysis" にはいくつかの章があるが、それぞれに付された題名は以下のとおりである。これらを見てもその主題は多岐にわたっており、バベッジの関心の広さが確かめられる。また全体として本章では、数式の変形や定数の具体的数値による場合分けが数多く見ることができる。

この事実は題名にある "Analysis" という語句と密接に関係があると考える。"Analysis" とは現代においては微積分学を意味するが、バベッジによる手稿からは、異なった意味をもっているのではないかという考えにも至る。これらについては稿を改めて論じたい。

題名
Title
Index
Analysis of the Essay of Games
Of Games
General Notions Respecting Analysis
Of Induction
Of Generalization
Of Analogy
Of Artifices
Of Questions Requiring the Invention of New Modes of Analysis
Merits for Invention and the Philosophy of Analysis
On Notation
Analogy
Induction
Des rapprochements
Of Artifices
Abstraction
Notation
Games
Notation
Continuity
Preface
Invention

表 1　フォリオに付された章題

*4 S. Schaffer, "Paper and Brass: the Lucasian Proffesorship 1820-39" , *From Newton to Hawking: A History of Cambridge University's Lucasian Proffesors of Mathematics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003), pp.271-2.

*5 *Ibid.*, p.272.

2 "Analysis of the Essay of Games" (f.4r-f.15v) について

本稿で論じるフォリオには、"Analysis of the Essay of Games" という章題が付されている。その内容は大きく分けて次のようになる。なお、"Analysis of the Essay of Games" は 9v, 10v, 11v, 14v が空白のページとなっている。また、5r と 6r の一部についてはダビーにより活字化されている*6。

1. ゲームの名前の列記
2. "Essays on the Philosophy of Analysis" の全体構成への言及
3. n 進法についての論議

"Analysis of the Essay of Games" に続いて "Of Games" があるが、本章の第 1 の部分は次のような理由により "Of Games" の下書きと考えることができる。

1. "Of Games" に書かれている数式と同じ数式が記述されていること。
2. "Of Games" とは異なり清書されていないこと。
3. "Of Games" の方が "Analysis of the Essay of Games" より詳細な議論がなされていること。

これらの下書きとも捉えられる部分については本稿でも述べることとするが、その内容の詳細な吟味は "Of Games" を論じる際に譲りたい。

さて、"Analysis of the Essay of Games" の第 1 の部分である f.4r 及び f.4v にはその章題にあるとおり、いくつかのゲームの名前が掲げられている。それらのゲームの名前は、次のようである*7。

- Knights move at chess
- The Plob of the Bridges Euler's Method
- Solitaire or Fox and Goose
- Prob of two penny post man
- Games of chance

章題が示すこれらゲームについての論文の詳細については "Essays on the Philosophy of Analysis" では論じられていない上、本章の後半部分で論じられているのは、n 進法についてである。これらゲームと "Essays on the Philosophy of Analysis" との関連については明らかではないが、n 進法をゲームの考察の対象とすることについては非常に興味深いものと考える。

上に掲げたゲームのうち、"Knights move at chess" はチェスのナイトの駒が一度も同じマスを通ることなく 64 マスを動かせる方法を検討したものであり、オイラーにそれについての論文がある*8 。バベッジにはそのオイラーの論文を検討した論文がある*9。次の "The Plob of the Bridges Euler's Method" は、明らかにオイラーによる「ケーニヒスベルクの橋の問題」のことであると考えることができる。また "Solitaire or Fox and Goose" のうち、Solitaire は一人で遊ぶゲーム (主にトランプゲーム) のことであり、Fox and Goose は 2 人で遊ぶボードゲームである。

---

*6 Dubbey, *op. cit.*, pp.97-8.

*7 筆者がコピーしたものが焦点があっておらず、判読が困難な箇所があり、すべての内容について記載できなかった。

*8 L. Euler, "Solution d'une question curieuse que ne paroit soumise a aucune analyse" , *Mémoires de l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres, Année 1759*, Vol. 15, 1766, pp.310-337.

*9 Ch. Babbage, "An Account of Euler's Method of Solving a Problem, Relative to the Move of the Knight at the Game of Chess" , *Journal of Science and the Arts*, Vol. 3, 1817, pp.72-7.

“Prob of two penny post man” 及び “Games of chance” については不明であるが、後者についてはバベッジに類似した題名を持つ論文がある[*10]。

次に f.5r から f.6v までは、“Essays on the Philosophy of Analysis” の全体構成について述べられている。これについては、ダビーが詳細に検討しているが[*11]、一部誤りも見受けられる[*12]。

そして f.7r からは、n 進法についての議論が始まる。

まずバベッジは次のような p 桁の数字 N を考える。まず $1N$ は $abcd\cdots n$ という数字である。次に最上桁の数字を最下桁に移動して $2N$ すなわち $bcd\cdots na$ を得る。同じように p 回繰り返して pN すなわち $nab\cdots m$ を得ることができる。

$$
\begin{array}{lr}
1N & abcd\cdots n \\
2N & bcd\cdots na \\
3N & cde\cdots nab \\
4N & \cdots \\
\cdots & \cdots \\
pN & nab\cdots m
\end{array}
$$

次にそれぞれの列の和を求めると、次式のようになる[*13]

$$(1+2+3+\cdots p)N = (a+b+c+\cdots n)(r^{p-1}+r^{p-2}+\cdots r+1)^{*14}$$

$r^{p-1}+r^{p-2}+\cdots r+1$ が $\frac{r^p-1}{r-1}$ となることから、N を求める式に変形すると、

$$N = \frac{2(a+b+c+\cdots n)}{p\cdot p+1}\cdot\frac{r^p-1}{r-1}{}^{*15}$$

さらに k が $r-1$ の因数であり $p>=k$ と考えると、N が k で割ることができた場合、kN は k^2N で割ることができる。以下同様に考えていくと $a+b+c+\cdots n$ は k で割ることができ、k^v とおくことができるとバベッジは主張する[*16]。すると、本式は以下のようになる。

$$N = \frac{2}{p\cdot p+1}\cdot\frac{r^p-1}{r-1}\cdot k^v$$

$r^{p-1}+r^{p-2}+\cdots r+1$ において r は、n 進数の基数となっていることが理解できるが、ここで r を 2 とすれば、2 進法を意味するところとなる。すると $r-1=1$ となり、また $k=1$ とすると上式は次のようになる。

$$N = \frac{2(2^p-1)}{p\cdot p+1}$$

*10 Ch. Babbage, “An Examination of Some Questions Connected with Game of Chance” , *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, Vol. 9, 1821, pp.153-77.

*11 Dubbey, *op. cit.*, pp.96-8.

*12 野村, 前掲書, pp.81-85.

*13 これらは f.7r と f.13r で同様の議論がなされている。その内容は f.13r に書かれているものがより詳しいので、ここではそれを説明することにする。

*14 本来ならば第 1 列は $1N$、$2N$ ではなく、N_1、N_2 と表記すると思われるが、ここでは列の合計を求める際に、係数として合計している。$a+b+c+\cdots n$ を $1N$ としても、$bcd\cdots na$ は $2N$ とはならないので、この左辺の合計を求めることは論拠不明である。

*15 f. 7r ではこの式は、$N = 2\frac{1+r+\cdots r^{p-1}}{p\cdot p+1}(a+b+c+\cdots+n)$ のようになっている。

*16 Babbage, *op. cit.*, f.8r.　ただし、この後段の議論の論拠は不明である。

また $r = 7$(7 進法)、すなわち $r - 1 = 6$ の場合を考えてみる。ここで k が 1、2、3、6 の場合は次のようになる[*17]。

$$N = \frac{2}{6} \cdot \frac{7^p - 1}{p \cdot p + 1} 2^v, \quad N = \frac{2}{6} \frac{7^p - 1}{p \cdot p + 1} 3^v, \quad N = \frac{2}{6} \cdot \frac{7^p - 1}{p \cdot p + 1} 6^v$$

この最初に式において、p が 2、3、4、5 の場合は次のとおりである[*18]。

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{7^2 - 1}{2 \cdot 3} 2^v = \frac{1}{3} \cdot \frac{48}{3} 2^{v-1}, \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{7^3 - 1}{3 \cdot 4} 2^v = \frac{1}{3} \cdot \frac{242}{3 \cdot 3} 2^{v-2}, \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{7^4 - 1}{3 \cdot 4} 2^v = \frac{2400}{3 \cdot 5} 2^{v-2} = 160 \cdot 2^{v-2}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{7^5 - 1}{5 \cdot 6} 2^v = \frac{16806}{3 \cdot 5 \cdot 6} 2^v, \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{7^6 - 1}{6 \cdot 7} 2^v$$

上式のなかで係数が分数とならないのは、$p = 4$ の右辺である $160 \cdot 2^{v-2}$ だけである。ここでバベッジは次式を提示し v は 4、3、2、1 のいずれかの場合であると主張する[*19]。

$$2^v < p \cdot (r - 1) < 3 \cdot 6 < 18$$

そして、以下の 4 つの数は 7 進法で表されているとの言及がある。

$$1603, 635, 316, 143$$

例えば $v = 4$ の場合を考えてみると、確かに今までの議論から $160 \cdot 2^{4-2} = 640$ となり、640 は 7 進法では 1603 で表されることがわかる。すると v が 4、3、2、1 の場合は次の表のようになる。

v	数式	計算結果 (10 進数)	計算結果 (7 進数)
4	$160 \cdot 2^{4-2}$	640	1603
3	$160 \cdot 2^{3-2}$	320	635
2	$160 \cdot 2^{2-2}$	160	316
1	$160 \cdot 2^{1-2}$	80	143

表 2　7 進数の計算結果

またバベッジは同じ 7 進法の計算で、次のような表現も行っている[*20]。

231 and 360 is 1023

しかしこの計算には誤りがあり、下記のように 231 と 360 の合計は 1123 となる。バベッジは 1123 を 1023 と書き間違えたと考えられる。

231(10 進法では 120) + 360(10 進法では 189) = 1123(10 進法では 409)

[*17] *Ibid.*, f.10r-11r.　理由は不明であるが、掲げられている式では $k = 1$ の場合の式が省略されている。
[*18] ここでも理由は不明であるが、$p = 6$ の場合の記載がある。
[*19] 本式は $p = 4$、$r - 1 = 6$ となっており数値的には正しいが、$2^v < p(r - 1)$ となる根拠は不明である。
[*20] Babbage, *op. cit.*, f.11r.

バベッジは以上のような n 進法の計算を "Analysis of the Essay of Games" の末尾まで繰り返し行っているが、今まで述べてきたように r、p、k などの検討すべき場合が非常に多いため計算が煩雑になり、結果的に計算の目的が明確には伝わってこない。これは本章が "Of Games" の下書きであることと関係しているものと考えられる。

最初にバベッジが提示した計算は、n 桁の数字を 1 つづつ順送りに変えていった数字の合計であるが (順送りにしているため n 桁の数字すべての場合を考えているわけではない)、これはボードゲームのマスをあてはめているのではないかとも考えられるが (チェスの場合は 8×8 のボードなので 8 進数)、明らかではない。

3 まとめ

"Essays on the Philosophy of Analysis" は、既に述べたように 19 世紀の英国数学の状況を知る上で非常な貴重な文献である。しかし、本稿で論じた "Analysis of the Essays of Games" は、ゲームの名前の列記、手稿全体についての記述及び "Of Games" の下書きで構成されていることにより主題が絞り込まれておらず、統一的な議論がなされていない。

しかしそこでは、遊戯であるゲームに対するバベッジの関心は非常に高かったことが伺うことができる。さらに、"Of Games" でさらに追求されることとなる n 進法の議論が含まれている。これはバベッジの関心の一つの例を示すとともに、数学の一分野である "Analysis" の多方面への応用についても考えていたことがわかる。

"Of Games" で詳細に述べられることになっている n 進法についてや、その Game との関連及び 1 で述べた "Analysis" という語句の解釈については今後の課題としたい。

参考文献

[1] Babbage, Ch., "Essays on Philosophy of Analysis", British Museum Additional Manuscripts 37202.

[2] Becher, H. W., "Wodehouse, Babbage, Peacock and Modern Algebra" , *Historia Mathematica*, Vol.7, 1980, pp.389-400.

[3] Dubbey, J. M., *The Mathematical Works of Charles Babbage*, (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978), (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004).

[4] Enros, P. C., "The Analytical Society (1812-1813): Precursor of the Renewal of Cambridge Mathematics" , *Historia Mathematica*, Vol.10, 1983, pp.24-47.

[5] Schaffer, S., "Paper and Brass: the Lucasian Professorship 1820-39" , *From Newton to Hawking: A History of Cambridge University's Lucasian Professors of Mathematics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003), pp.241-93.

[6] 野村恒彦, "チャールズ・バベッジの数学記号に関する研究" , 博士論文 (神戸大学), 2007.