数理解析研究所講究録
第 1678 巻 2010 年 118-127

作用素平均を用いたヘルダーの不等式の逆について

(On a reverse of Hölder inequality via operator mean)

芝浦工業大学工学部　瀬尾祐貴 (Yuki Seo)
Faculty of Engineering, Shibaura Institute of Technology

1 始めに

非負実数の組 $\{a_i\}_{i=1}^n$ と $\{b_i\}_{i=1}^n$ に対して、その積の和の上限の評価として、Cauchy の不等式があります。

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i \ \leq \ \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2}. \tag{1}$$

ここで、それぞれの実数をその平方根で置きなおすと、次になります。

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{a_ib_i} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i}. \tag{2}$$

不等式について考えるときの自然な質問の一つに、それがある種の逆関係を持つかどうかがあります。Cauchy の不等式に対してそのことを考えることは、不等式におけるもっとも基本的な原理のひとつ、つまり順序関係の組織的な開発の上に私たちを導いてくれます。

問題： 非負実数の組 $\{a_i\}_{i=1}^n$ と $\{b_i\}_{i=1}^n$ が、与えられた定数 ρ に対して、

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2} \ \leq \ \rho\sum_{i=1}^n a_ib_i \tag{3}$$

を満たすような状況とは何か？

この問題を見た時にすぐわかることは、a_i と b_i に制限を設けないと、(3) の右辺は有界だが、(3) の左辺は発散することがあることです。従って、(3) のような上限 ρ があるためには、

$$0 < m \leq \frac{a_i}{b_i} \leq M \qquad \text{for } i = 1, 2, \cdots, n \tag{4}$$

となるような条件が必要だということがわかります。古典的な考察、例えば、Diaz と Metcalf [4] を参考にすると、算術幾何平均の不等式を利用して、条件 (4) のもとで、

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2} \ \leq \ \frac{M+m}{2\sqrt{Mm}}\sum_{i=1}^n a_ib_i \tag{5}$$

という上限を持つことがわかります。これは、まさにCauchyの不等式の自然な逆不等式としてみることができると思います。(2)の型に直すと

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i} \leq \frac{\sqrt{M}+\sqrt{m}}{2\sqrt[4]{Mm}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i b_i} \tag{6}$$

になります。

さて、 Cauchyの不等式の非可換化は多くの数学者によって試みられています。最近、Eun-Young Lee [8]は、作用素幾何平均の劣加法性をCauchyの不等式(2)の非可換版だと考えました。即ち、正定値行列の組 $\{A_i\}_{i=1}^n$ と $\{B_i\}_{i=1}^n$ に対して、次を行列版Cauchyの不等式とみました:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \sharp B_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \sharp \left(\sum_{i=1}^{n} B_i\right). \tag{7}$$

ここで、作用素幾何平均 $\sharp$ は、次で定義されます[7]。正定値行列 A と B に対して、

$$A \sharp B = A^{1/2}\left(A^{-1/2} B A^{-1/2}\right)^{1/2} A^{1/2}.$$

勿論、A と B が、可換ならば、実数の幾何平均と一致します: $\sqrt{AB} = A\sharp B$. 従って、不等式(7)は、ぴったり、不等式(2)の非可換版とみなせます。この見方は、[9]の中で、J.Pečarić らも古典的不等式の一つとして扱っています。

さて、Cauchyの不等式の逆不等式(6)が考えられているわけですから、当然、非可換化したときどうなるのか?と考えることは自然なことです。勿論、実数版のときでさえ、2つの数の組には制限がつきましたから、行列版で逆不等式を考える時も、ある制限のもとで考察をしなければいけません。それは、実数の時に対応させて、次のように考えるのが適当でしょう。

$$0 < mA \leq B \leq MA \qquad \text{for some scalars } 0 < m < M \tag{8}$$

Leeは、この条件をsandwich conditionと名付けました。うまい命名だと思います。実数版では、比もしくは商に対する条件になりますが、行列だと、このような定式化になるという主張です。この条件下で、Leeは、作用素幾何平均を用いた行列版Cauchyの不等式の逆不等式を導きました。

Theorem 1 (Eun-Young Lee(2009)). *Let A_i, B_i be positive definite matrices such that $mA_i \leq B_i \leq MA_i$ for some scalars $0 < m \leq M$ and $i = 1, 2, \cdots, n$. Then*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \sharp \left(\sum_{i=1}^{n} B_i\right) \leq \frac{\sqrt{M}+\sqrt{m}}{2\sqrt[4]{Mm}} \sum_{i=1}^{n} A_i \sharp B_i.$$

この商に現れた定数は、

$$A = \frac{\sqrt{M}+\sqrt{m}}{2} \qquad \text{and} \qquad G = \sqrt{\sqrt{M}\sqrt{m}}$$

とおくと、A/G となっています。これは、Kantorovich 係数の平方根になっています。そして、この定数は、実数版 Cauchy の不等式の逆不等式 (6) に現れた定数と全く同じものであることに気付きます。Lee の見方の良さの表れではないかと思います。

2 差版の逆 Cauchy の不等式

私たちは、[5] で、この Lee の結果の差版を考えました。

Theorem 2. *Let A_i, B_i be positive definite matrices such that $mA_i \le B_i \le MA_i$ for some scalars $0 < m \le M$ and $i = 1, 2, \cdots, n$. Then*

$$\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) \sharp \left(\sum_{i=1}^n B_i\right) - \sum_{i=1}^n A_i \sharp B_i \le \frac{(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2}{4(\sqrt{M}+\sqrt{m})} \sum_{i=1}^n A_i.$$

この定理を証明するために、私たちは次の２つの結果を必要とします。まず、高校数学で、Cauchy-Schwarz の不等式というと、次が一般的です。ふたつのベクトル x, y に対して、

$$|(x,y)| \le \| x \| \| y \| .$$

この不等式の差版の逆不等式が成立します。これはまた、差版の Kantorovich 不等式と同値になっています。

Lemma 3. *Let Z be a positive definite matrix such that $m \le Z \le M$ for some scalars $0 < m \le M$. Then*

$$\| Zh \| \| h \| - (Zh, h) \le \frac{(M-m)^2}{4(M+m)} \| h \|^2 \tag{9}$$

for every vector h.

証明 ここでは、Bourin [3] による商の対する証明が興味深いので、その手法をまねた方法を紹介します。

H の部分空間を $\mathbb{S}$ とする。Z の $\mathbb{S}$ への制限を $Z_{\mathbb{S}}$ とします。M' と m' を $Z_{\mathbb{S}}$ の最大固有値と最小固有値とすると、

$$\frac{(M-m)^2}{4(M+m)} \ge \frac{(M'-m')^2}{4(M'+m')}$$

がわかります。実際、$m \le m' \le M' \le M$ ですから、

$$\begin{aligned}
&\frac{(M-m)^2}{4(M+m)} - \frac{(M'-m')^2}{4(M'+m')} = \frac{1}{2}\left(\frac{M+m}{2} - \frac{2Mm}{M+m}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{M'+m'}{2} - \frac{2M'm'}{M'+m'}\right) \\
&= (M-M')\frac{(M+m)(M'+m') - 4mm'}{4(M+m)(M'+m')} + (m'-m)\frac{4MM' - (M+m)(M'+m')}{4(M+m)(M'+m')} \\
&\ge 0.
\end{aligned}$$

従って、$\mathbb{S} = \mathrm{span}\{h, Zh\}$ としたとき、$Z_{\mathbb{S}}$ に対して、(9) を証明できれば十分です。だから、H の次元を2、$\| h \| = 1$ と仮定できます。そこで、長さ 1 の直交するベクトルを e, f とし、$x \in [0,1]$ に対して、

$$Z = Me \otimes e + mf \otimes f \quad \text{and} \quad h = xe + \sqrt{1-x^2} f$$

とおきます。さらに、$y \in [0,1]$ に対して、$x^2 = y$ とします。このとき、

$$\| Zh \| - (Zh, h) = \sqrt{M^2 y + m^2(1-y)} - (My + m(1-y))$$

となり、$[0,1]$ 上で、この式の右辺は、$y = (M+3m)/4(M+m)$ のとき、最大値 $(M-m)^2/4(M+m)$ を取ります。これで、Lemma 3 は、証明できました。

次に、安藤 [1] は、正写像と作用素幾何平均の間に次のような美しい関係があることを示しました。私たちは、ここではこれを安藤の不等式と呼ぶことにします。Φ を正写像とし、A, B を正定値行列とすると、

$$\Phi(A \sharp B) \le \Phi(A) \sharp \Phi(B)$$

が、成立します。ここで、正写像とは、線形性を持ち、さらに正値性を保持することを言います。ただし、Φ の正規性は仮定しません。このとき、次の差版の逆不等式が分かります。

Lemma 4. *Let A and B be positive definite matrices such that $mA \le B \le MA$ for some scalars $0 < m \le M$ and let $\Phi : M_n(\mathbb{C}) \mapsto M_k(\mathbb{C})$ be a positive linear map. Then*

$$\Phi(A) \sharp \Phi(B) - \Phi(A \sharp B) \le \frac{(\sqrt{M} - \sqrt{m})^2}{4(\sqrt{M} + \sqrt{m})} \Phi(A). \tag{10}$$

Lemma 4 から Theorem 2 は、すぐに分かります。Lemma 4 の証明に Lemma 3 が本質的になりますが、かなり込み入った議論をしなければいけません。そこが、Lee の工夫ですが、安藤はこの Lemma 4 のもっと簡明な証明を与えました [2]。そして、更にそれは一般のヒルベルト空間上の作用素に対する結果にもなっています。次の節で、安藤による証明を紹介します。

3 安藤による証明

まず、導かれた結果を述べます。separating condition のもとで、より一般的なケースの考察は、[6] でなされています。

Theorem 5. *Let A and B be positive invertible operators on a Hilbert space H such that $mA \leq B \leq MA$ for some scalars $0 < m \leq M$ and let $\Phi : B(H) \mapsto B(K)$ be a positive linear map. Then*

$$\Phi(A) \sharp \Phi(B) - \Phi(A \sharp B) \leq \frac{(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2}{4(\sqrt{M}+\sqrt{m})}\Phi(A). \tag{11}$$

証明. 安藤の証明はもっと簡明に書かれていますが、以下の議論に必要となるため、少し脚色してその証明を紹介します。まず、簡単のために、差を表す評価を、

$$\rho = \frac{(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2}{4(\sqrt{M}+\sqrt{m})}$$

とおきます。そして、$C = A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$ とおきます。このとき、$C^{1/2}$ のスペクトルの条件は、

$$\sqrt{m}I \leq C^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{M}I$$

を満たします。さらに、$\lambda = \frac{\sqrt{M}+\sqrt{m}}{2}$ とおきます。$C^{1/2}$ のスペクトルが両端にかかっている想定で、その中点を λ としているわけです。さて、ここで、次の 2 次関数を考えます。

$$f(t) = (t-\lambda)^2 \quad \text{on} \quad [\sqrt{m}, \sqrt{M}].$$

このグラフは、x 軸で接する下に凸の放物線で、 $t=\lambda$ が放物線の頂点ですから、最大値は端点 $t=\sqrt{m}$ 及び $t=\sqrt{M}$ で取ります。従って、次の不等式が成り立ちます。

$$\left(C^{\frac{1}{2}} - \lambda I\right)^2 \leq (\sqrt{m}-\lambda)^2 I = (\sqrt{M}-\lambda)^2 I = \left(\frac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{2}\right)^2 \tag{12}$$

ところが、この最大値は、私たちの欲しい評価 ρ を用いて表すことができます。

$$2\lambda\rho = 2\frac{\sqrt{M}+\sqrt{m}}{2}\frac{(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2}{4(\sqrt{M}+\sqrt{m})} = \frac{(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2}{4} = \left(\frac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{2}\right)^2.$$

さて、これらから、私たちはあっという間に結論を得ることができます。そこで使う道具は、非可換版の算術幾何平均の不等式

$$A \sharp B \leq \frac{A+B}{2}$$

だけです。 さて、(12) を展開します。

$$C - 2\lambda C^{\frac{1}{2}} + \lambda^2 I \leq 2\rho\lambda I$$

さらに次のようにまとめます。

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}C+\lambda I\right)\leq C^{\frac{1}{2}}+\rho I$$

両辺に $A^{1/2}\cdot A^{1/2}$ をかけると、$A^{1/2}C^{1/2}A^{1/2}=A\sharp B$ だから、

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}B+\lambda A\right)\leq A\sharp B+\rho A.$$

両辺に正写像 Φ をとると、Φ の線形性より

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}\Phi(B)+\lambda\Phi(A)\right)\leq\Phi(A\sharp B)+\rho\Phi(A).$$

ところが、この式の左辺の評価は、先ほどのべた算術幾何平均の不等式を用いると、

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}\Phi(B)+\lambda\Phi(A)\right)\geq\left(\frac{1}{\lambda}\Phi(B)\right)\sharp(\lambda\Phi(A))=\Phi(B)\sharp\Phi(A)$$

になります。だから、この２つの不等式をまとめると、

$$\Phi(B)\sharp\Phi(A)\leq\Phi(A\sharp B)+\rho\Phi(A)$$

となり、Theorem 5 を得ます。しかも、この証明には、行列の特殊性を一切使っていません。一般のヒルベルト空間上の作用素に対して成立しています。

4　一般化

さて、なぜ、どういう原理が働いて、このようにうまくいくのか？実に不思議です。その不思議さはさておき、この手法でこれだけ鮮やかに証明ができるとすると、もっと一般的な場合もこの手法を用いて証明ができるのではないかと考えたくなります。そのために、Cauchy の不等式の一般形である Hölder の不等式を思い出します。$1/p+1/q=1$ を満たす各 $p,q>1$ に対して、

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\ \leq\ \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{1/q}$$

が成立します。当然、重み付き作用素幾何平均の劣加法性を、この不等式の行列版としてみます。正定値行列の組 $\{A_i\}_{i=1}^n$ と $\{B_i\}_{i=1}^n$、そして、各 $\alpha\in[0,1]$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n}A_i\sharp_\alpha B_i\leq\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)\sharp_\alpha\left(\sum_{i=1}^{n}B_i\right)\tag{13}$$

が成立します。重み付き作用素幾何平均 $\sharp_\alpha$ は、次で定義されます。各 $\alpha \in [0,1]$ に対して、

$$A \sharp_\alpha B = A^{1/2}\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^\alpha A^{1/2}.$$

これは、変数を少し変換すると、実数に対する Hölder の不等式になります。そこで、この不等式 (13) の逆不等式を求めるためには、これまでの議論から、安藤の不等式の差型の逆不等式を求めればいいことが分かります。つまり、各 $\alpha \in [0,1]$ に対して、

$$\Phi(A) \sharp_\alpha \Phi(B) - \Phi(A \sharp_\alpha B) \leq \bigcirc\ \Phi(A)$$

を満たす ◯ を見つけることです。

さて、先ほどの安藤の手法を真似てみます。ポイントは次です。Theorem 5 の証明における関数 $f(t) = t^{1/2}$ に対して、次の評価式を構成しました。

$$\frac{1}{2}\left(\lambda^{-1}t + \lambda\right) \leq t^{\frac{1}{2}} + \rho$$

λ をスペクトルの中点として取ると、欲しかった ρ の値が、上の不等式に現れるのです。とすれば、まったく同じように、関数 $f(t) = t^\alpha$ に対して、

$$(1-\alpha)\lambda^\alpha + \alpha\lambda^{\alpha-1}t \leq t^\alpha + \bigcirc \quad \text{for } t \in [m, M]$$

を満たすような λ と ◯ を見つければいいわけです。しかし、先ほどのように λ を中点に取るというわけにはいきません。α がかかっているので、対称性が崩れているからです。でも、その見つけ方の方法まで安藤の手法を教えてくれています。

$$F(t) = (1-\alpha)\lambda^\alpha + \alpha\lambda^{\alpha-1}t - t^\alpha$$

とおきます。このとき、端点で一致すればいいわけです。つまり、$F(m) = F(M)$ です。代入すれば、

$$(1-\alpha)\lambda^\alpha + \alpha\lambda^{\alpha-1}m - m^\alpha = (1-\alpha)\lambda^\alpha + \alpha\lambda^{\alpha-1}M - M^\alpha$$

となりますから、この方程式を解いてやりますと、

$$\lambda = \left(\frac{M^\alpha - m^\alpha}{\alpha(M-m)}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

となり、λ が求まりました。値 ◯ についても、$F(m)$ を計算するだけです。

$$\begin{aligned}
F(m) &= (1-\alpha)\left(\frac{M^\alpha - m^\alpha}{\alpha(M-m)}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + \alpha\frac{M^\alpha - m^\alpha}{\alpha(M-m)}m - m^\alpha \\
&= (1-\alpha)\left(\frac{M^\alpha - m^\alpha}{\alpha(M-m)}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + \frac{M^\alpha m - Mm^\alpha}{M-m} \\
&= -C(m, M, \alpha)
\end{aligned}$$

ここで、なじみの記号 $C(m, M, \alpha)$ が出てきました。差型の Kantorovich 不等式に現れる大切な係数です。さて、あとは、計算です。最後のところで、重み付きの算術幾何平均の不等式を使います。

$$(1-\alpha)\lambda^{\alpha} + \alpha\lambda^{\alpha-1}C \le C^{\alpha} - C(m, M, \alpha)I$$

両辺に $A^{1/2} \cdot A^{1/2}$ をかけると、

$$(1-\alpha)\lambda^{\alpha}A + \alpha\lambda^{\alpha-1}B \le A \sharp_{\alpha} B - C(m, M, \alpha)A$$

さらに、両辺の Φ をとると、

$$(1-\alpha)\lambda^{\alpha}\Phi(A) + \alpha\lambda^{\alpha-1}\Phi(B) \le \Phi(A \sharp_{\alpha} B) - C(m, M, \alpha)\Phi(A)$$

一方、 重み付きの算術幾何平均の不等式より

$$(1-\alpha)\lambda^{\alpha}\Phi(A) + \alpha\lambda^{\alpha-1}\Phi(B) \ge \Phi(A) \sharp_{\alpha} \Phi(B)$$

がわかりますから、ほしかった関係式がもとまりました。まとめると次のようになります。

Theorem 6. *Let A and B be positive operators such that $mA \le B \le MA$ for some scalars $0 < m \le M$ and let $\Phi : B(H) \mapsto B(K)$ be a positive linear map. Then for each $\alpha \in [0, 1]$*

$$\Phi(A) \sharp_{\alpha} \Phi(B) - \Phi(A \sharp_{\alpha} B) \le -C(m, M, \alpha)\Phi(A) \tag{14}$$

where

$$C(m, M, \alpha) = (\alpha - 1)\left(\frac{M^{\alpha} - m^{\alpha}}{\alpha(M-m)}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + \frac{Mm^{\alpha} - mM^{\alpha}}{M-m}.$$

In particular, if we put $\alpha = \frac{1}{2}$ in Theorem 6, then we have Theorem 1.

ところで、ここまで読まれた読者の中には、この方法では評価が少し甘いのではないかと、思われる方もおられると思います。しかし、Theorem 6 は、次の意味で sharp です。即ち、各 $\alpha \in [0, 1]$ に対して、

$$\Phi(A) \sharp_{\alpha} \Phi(B) - \Phi(A \sharp_{\alpha} B) = -C(m, M, \alpha)\Phi(A)$$

を満たす可逆な正作用素 A, B と正写像 Φ が存在する。実際に、これを満たす例を構成します。まず、正写像 $\Phi : M_2(\mathbb{C}) \mapsto \mathbb{C}$ は、

$$\Phi(X) = rx_{11} + (1-r)x_{22} \quad \text{for} \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \quad \text{with } 0 < r < 1$$

とします。さらに、可逆な正作用素 A と B は、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad B = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix},$$

とおきます。このとき、sandwich condition $mA \le B \le MA$ は、明らかに成立します。さらに、構成から、

$$\Phi(A)\sharp_\alpha\Phi(B) = (m + r(M-m))^\alpha$$
$$\Phi(A\sharp_\alpha B) = m^\alpha + r(M^\alpha - m^\alpha)$$

が、わかり、

$$r = \frac{1}{M-m}\left(\frac{M^\alpha - m^\alpha}{\alpha(M-m)}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{m}{M-m}$$

と、r をおくと、$0 < r < 1$ を満たし、欲しかった関係式を得ます。

$$\begin{aligned}\Phi(A)\sharp_\alpha\Phi(B) - \Phi(A\sharp_\alpha B) &= (m + r(M-m))^\alpha - m^\alpha - r(M^\alpha - m^\alpha)\\ &= -C(m, M, \alpha)\\ &= -C(m, M, \alpha)\Phi(A)\end{aligned}$$

でも、なぜ、このような方法で逆不等式の評価ができるのか、つまり、関数の端点で値が一致するように変形すると欲しい最大値が求まるというその意味については、残念ながらわかりませんでした。しかし、安藤はより一般的な設定のもとで、この手法の意味について明らかにしました。その詳細は別稿に譲るとして、ここでは、安藤による結果を述べて、終わりにします。

Theorem 7. *Let A and B be positive operators on a Hilbert space H such that $mA \le B \le MA$ for some scalars $0 < m \le M$ and let Φ be a positive linear map. Then for each operator mean σ_f*

$$\begin{aligned}&\Phi(A)\ \sigma_f\ \Phi(B) - \Phi(A\ \sigma_f\ B)\\ &\le \left(\frac{f(M) - f(m)}{M-m}(m - \lambda_0) + f(\lambda_0) - f(m)\right)\Phi(A).\end{aligned}$$

where λ_0 is a unique solution of $f'(\lambda) = \frac{f(M)-f(m)}{M-m}$ and $m < \lambda_0 < M$.

これを用いれば、当然次のより一般的な差版の Hölder 型不等式を得ます。

Theorem 8. *Let A_i, B_i be positive operators on a Hilbert space H such that $mA_i \le B_i \le MA_i$ for some scalars $0 < m \le M$ and $i = 1, 2, \cdots, n$. Then for every operator mean σ_f*

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^n A_i\right)\ \sigma_f\ \left(\sum_{i=1}^n B_i\right) - \sum_{i=1}^n A_i\ \sigma_f\ B_i\\ &\le \left(\frac{f(M) - f(m)}{M-m}(m - \lambda_0) + f(\lambda_0) - f(m)\right)\sum_{i=1}^n A_i,\end{aligned}$$

where λ_0 is the unique solution such that $f'(\lambda_0) = \frac{f(M)-f(m)}{M-m}$ and $m < \lambda_0 < M$.

参考文献

[1] T.Ando, *Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products*, Linear Algebra Appl., **26** (1979), 203–241.

[2] T.Ando, *Reverse Hölder inequality via reverse A-G inequality*, a private note.

[3] J.-C.Bourin, *Matrix versions of some classical inequalities*, Linear Algebra Appl., **416**(2006), 890–907.

[4] J.B.Diaz and F.T.Metcalf, *Stronger forms of a class of inequalities of G.Polya-G.Szegö, and L.V.Kantorovich*, Bull. Amer. Math. Soc., **69**(1963), 415–418.

[5] M.Fujii, E-Y. Lee and Y.Seo, *A difference counterpart to a Matrix Hölder inequality*, to appear in Linear Algebra Appl.

[6] T.Furuta, J.Mićić, J.E.Pečarić and Y.Seo, *Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities*, Monographs in Inequalities 1, Element, Zagreb, 2005.

[7] F.Kubo and T.Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann., **246** (1980), 205–224.

[8] E-Y. Lee, *A matrix reverse Cauchy-Schwarz inequality*, Linear Algebra Appl., **430**(2009), 805–810.

[9] B.Mond, J.Pečarić, J.Sunde and S.Varosanec, *Operator versions of some classical inequalities*, Linear Algebra Appl., **264** (1997), 117–126.

FACULTY OF ENGINEERING, SHIBAURA INSTITUTE OF TECHNOLOGY, 307 FUKASAKU, MINUMA-KU, SAITAMA-CITY, SAITAMA 337-8570, JAPAN.
E-mail address : yukis@sic.shibaura-it.ac.jp