数理解析研究所講究録
第 1679 巻 2010 年 53-55

一般バーンサイド環のための新たな部分群の族 I

千葉大学・教育学部　澤辺 正人 (Masato Sawabe)
Faculty of Education, Chiba University

1　一般バーンサイド環

G を有限群、$\mathrm{Sgp}(G)$ を G の部分群全体からなる族、$\mathcal{D} \subseteq \mathrm{Sgp}(G)$ を G-共役の作用で閉じている G の部分群族とする。$H \in \mathrm{Sgp}(G)$ を含む G-共役類を $(H) := \{{}^gH = gHg^{-1} \mid g \in G\}$ で表し、有限 G-集合 X を含む同型類を $[X]$ で表す。また $C(\mathcal{D})$ を $\mathcal{D}$ に属する部分群に対する G-共役類の全体とする。即ち $C(\mathcal{D}) = \{(H) \mid H \in \mathcal{D}\}$ とする。さらに $\{[G/H] \mid (H) \in C(\mathcal{D})\}$ を基底とする自由アーベル群を $\Omega(G, \mathcal{D})$ で表す。ここで $\mathcal{D}$ として全体の $\mathrm{Sgp}(G)$ をとると $\Omega(G) := \Omega(G, \mathrm{Sgp}(G))$ は有限 G-集合の直積により可換環の構造が入る。これが通常のバーンサイド環である。一方、真の部分族 $\mathcal{D} \subset \mathrm{Sgp}(G)$ に対して $\Omega(G, \mathcal{D})$ に環構造が入る場合があり、大雑把にいうとこれが一般バーンサイド環である。この場合 $\Omega(G, \mathcal{D})$ は $\Omega(G)$ の部分環であるとは限らない。この後で一般バーンサイド環の定義を述べる。

定義 1 (マーク準同型; page 517 in [Yos90], page 166 in [Ben91]) $(S) \in C(\mathcal{D})$ に対して S-固定点の個数で定義される写像を $\varphi_S : \Omega(G, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ とする。即ち $\varphi_S([G/H]) := \sharp\{S\text{-fixed points of } G/H\}$ で定義する。このとき加法的準同型

$$\varphi : \Omega(G, \mathcal{D}) \longrightarrow \tilde{\Omega}(G, \mathcal{D}) := \Pi_{(S) \in C(\mathcal{D})} \mathbb{Z}; \quad x \mapsto (\varphi_S(x))_{(S) \in C(\mathcal{D})}$$

を $\mathcal{D}$ に関するマーク準同型という。

定義 2 (一般バーンサイド環; Definition 3.12 in [Yos90]) 単位元を持つ可換環 R に対して R-加群 $R \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(G, \mathcal{D})$ を考える。このとき以下の二つを仮定する。

(1) $1 \otimes \varphi : R \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(G, \mathcal{D}) \longrightarrow R \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{\Omega}(G, \mathcal{D})$ は単射である。
(2) 像 $\mathrm{Im}(1 \otimes \varphi)$ は $R \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{\Omega}(G, \mathcal{D})$ の部分環であり、かつ単位元を有する。

このとき $x, y \in R \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(G, \mathcal{D})$ 対してその積を以下のように定義することが出来る。

$$xy := (1 \otimes \varphi)^{-1} \Big((1 \otimes \varphi)(x) \cdot (1 \otimes \varphi)(y) \Big)$$

この積と共に $R \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(G, \mathcal{D})$ は単位元を有する可換環となり、これを係数環 R 上 $\mathcal{D}$ に関する G の一般バーンサイド環という。

ここで R-加群 $R \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(G, \mathcal{D})$ がいつ一般バーンサイド環として実現されるか？という問いは極めて自然である。この問いに関する一つの解答として次をあげることが出来る。

注意 1 (cf. Lemma 3.7(c) + Theorem 3.11(b) in [Yos90]) 任意の $D \in \mathcal{D}$ が self-normalizing であれば $\Omega(G, \mathcal{D})$ は $\mathbb{Z}$ 上の一般バーンサイド環になる。

この観察に従ってここでは self-normalizing な部分群族に着目していくことにする。

2 設定と結果

$\mathcal{G} := \{G_1, G_2, \ldots, G_\ell\} \subseteq \mathrm{Sgp}(G)$ を勝手な部分群の族とし $I := \{1, 2, \ldots, \ell\}$ を添え字の集合とする。また任意の $\emptyset \neq F \subseteq I$ に対して $G_F := \cap_{i \in F} G_i$ と定め、特に $B := G_I$ とおく。さらに $\mathcal{G}_I := \{{}^x G_F \mid x \in G,\ \emptyset \neq F \subseteq I\}$ とすると $\mathcal{G}_I$ は G-共役で閉じた部分群族となる。

以上の設定はやや抽象的ではあるが、具体例として次のような状況を想定している。まず G の p-部分群 U に対して $O_p(N_G(U)) = U$ を満足するようなものを radical p-部分群という。定義から $O_p(G)$ は常に G の radical 部分群である。そこで $O_p(G)$ を除く G の radical p-部分群全体の集合を $\mathcal{B}_p(G)$ で表す。G の Sylow p-部分群を一つ固定しておく。ここで $\mathcal{B}_p(G)$ を通常の包含関係で半順序集合と見なした時のその極小元の中で P に含まれているもの全体を $\{U_1, U_2, \ldots, U_\ell\}$ とする。これは標数 p の体上で定義された Lie 型の群に関する Unipotent radical の共役類の代表系の類似物に他ならない。このとき先に設定した G_i は正規化群 $N_G(U_i)$ を想定している。これは極大放物部分群の類似物である。さて以下の仮定を設定する。

Hypothesis (H) (1) If $B \leq {}^x G_F$ then ${}^x G_F = G_F$.
(2) If $G_J = G_K$ then $J = K$.

先に述べた Unipotent radical は Sylow p-部分群 P の中で weakly closed である。即ち P に含まれる U_i の G-共役部分群は U_i に限る。つまり最初の仮定はこの双対的な性質である。また二つ目も Lie 型の群や散在群においては基本的な性質になっている。

Hypothesis (SN) 任意の $H \in \mathcal{G}_I$ は self-normalizing である。

先に述べたように我々は一般バーンサイド環を実現する self-normalizing な部分群に興味がある。また我々の想定している radical p-部分群の正規化群も定義から常に self-normalizing である。即ち我々の目的から考えるとこの仮定も自然なものである。さてこれらの仮定の下で、マーク準同型は極めて制限される。

命題 1 **(H)**(1) と **(SN)** を仮定すると任意の $(S), (T) \in C(\mathcal{G}_I)$ に対して次が成り立つ。

$$\varphi_T([G/S]) = \begin{cases} 1 & \text{if } T \leq_G S \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで Table of marks $M_G(\mathcal{G}_I) := (\varphi_T([G/T]))_{(S),(T) \in C(\mathcal{D})}$ (cf. page 167 in [Ben91]) を思い出す。これは $C(\mathcal{D})$ で index 付された行列であり $((S), (T))$-成分がマーク準同型の値 $\varphi_T([G/T])$ で定義されているものである。また $M_G(\mathcal{G}_I)$ は一般バーンサイド環の積の情報そのものであり極めて重要な対象である（定義 2 を参照)。命題 1 の主張は $\mathcal{G}_I$ に属する部分群間の包含関係のみを見ることによって $M_G(\mathcal{G}_I)$ が得られるというものである。命題 1 から導かれるこの他の帰結は [OS09, Lemma 7] 等を参照されたい。

半順序集合 $(\mathcal{P}, \leq)$ に対して $\mathcal{P}$ を基底とする自由アーベル群を $M(\mathcal{P})$ とする。さらに基底の要素 $x, y \in \mathcal{P}$ に対してその積を

$$xy := \sum_{z \in \mathcal{P}} \Big(\sum_{t \in \mathcal{P}_{\leq x, y}} \mu_{\mathcal{P}}(z, y) \Big) z$$

で定義しこれを線形に拡張する。この積と共に $M(\mathcal{P})$ は可換環となり、これを $\mathcal{P}$ のメビウス環という。

命題 2 **(H)** と **(SN)** を仮定する。このとき一般バーンサイド環とメビウス環に対して環同型 $\Omega(G,\mathcal{G}_I) \cong M(C(\mathcal{G}_I), \le)$ が成り立つ。ここで $(S),(T) \in C(\mathcal{G}_I)$ に対して $T \le_G S$ なるとき $(T) \le (S)$ と順序を定めるものとする。

仮定 **(H)** の下で半順序集合の間の反同型 $(C(\mathcal{G}_I), \le) \cong_{\mathrm{opp}} (2^I \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$ が得られる。この事実と命題 2 から我々の部分群族 $\mathcal{G}_I$ に対する一般バーンサイド環には様々な組合せ論的な性質が備わっていると期待できる。これについては準備中の [OS] を参照されたい。

参考文献

[Ben91] D.J. Benson, "Representations and Cohomology I", Cambridge Studies in Advanced Mathematics **31**, Cambridge University Press, 1991.

[OS09] F. Oda and M. Sawabe, A collection of subgroups for the generealized Burnside rings, *Adv. Math.* **222** (2009), 307–317.

[OS] F. Oda and M. Sawabe, in preparation.

[Yos90] T. Yoshida, The generalized Burnside ring of a finite group, *Hokkaido Math. J.* **19** (1990), 509–574.