

## 平面で構成できる数直線のいくつかのコンパクト化による上限

嶺 幸太郎 (筑波大学大学院数理物質科学研究科)

本稿では、実数直線のいかなるコンパクト化も平面に埋め込めるようなコンパクト化たちの上限になるという事実の証明を通して、コンパクト化に関するいくつかの近似定理を紹介する。

本稿においては、位相空間  $X$  はすべてチコノフ空間とする。<sup>1</sup> また、実数直線を  $\mathbb{R}$  で表し、単位閉区間  $[-1, 1]$  を  $\mathbf{I}$  と書く。

### 1. 既に知られているいくつかの近似定理

$X$  のハウスドルフ・コンパクト化全体を  $\mathcal{K}(X)$  とし、 $\mathcal{K}(X)$  上に次のような向き “ $\leq$ ” および同値関係 “ $\sim$ ” を定義する。

定義. ふたつのコンパクト化  $\gamma X, \delta X \in \mathcal{K}(X)$  において  $f|_X = \text{id}_X$  なる連続関数  $f: \delta X \rightarrow \gamma X$  が存在するとき  $\gamma X \leq \delta X$  と書く。  $\gamma X \leq \delta X$  かつ  $\delta X \leq \gamma X$  が成立するとき  $\gamma X \sim \delta X$  と関係 “ $\sim$ ” を定義すれば、これは同値関係となる。更に、 $\mathcal{K}(X)/\sim$  上にも “ $\leq$ ” により自然に向きが定義され、 $(\mathcal{K}(X)/\sim, \leq)$  は順序集合、とくに上半完備束<sup>2</sup>となる。以下、順序集合  $(\mathcal{K}(X)/\sim, \leq)$  を  $\mathcal{K}(X)$  と略記する。

$\mathcal{K}(X)$  の最大元  $\beta X = \sup \mathcal{K}(X)$  は Stone-Čech コンパクト化である。  $X$  が局所コンパクト空間である場合、 $\mathcal{K}(X)$  は完備束となり最小元  $\alpha X = \inf \mathcal{K}(X)$  は  $X$  の 1 点コンパクト化である。ある  $\gamma X \in \mathcal{K}(X)$  がいくつかのコンパクト化たちの上限となっているとき、 $\gamma X$  はそれらで近似できると呼ぶ。ただし、これはあくまでも言葉のあやであり、 $\mathcal{K}(X)$  上に位相が定義されているわけではないことに注意したい。

それでは、あるコンパクト化がより単純なコンパクト化で近似できるためには、どういった条件が必要なのであろうか。また、近似に必要なコンパクト化の数はどれくらい少なくできるのか。これらの自然な問題に対する考察を本稿では与えたい。

まずは、いくつかの既存の結果を紹介しよう。多くの先行研究のすべてを紹介することはできないが、 $\beta X$  に対する近似定理として例えば次が知られている。

<sup>1</sup>位相空間  $X$  がハウスドルフ・コンパクト化を持つための必要十分条件は  $X$  がチコノフ空間となることである。

<sup>2</sup>順序集合が上半完備束 (complete upper semilattice) であるとは、任意の部分集合がその順序において上限を持つことである。任意の部分集合が上限および下限を持つ場合は完備束 (complete lattice) であるという。

定理 1.1 (Chandler-Faulkner [2], 1987). 局所コンパクト空間  $X$  が無限遠で連結ならば  $\beta X$  は特異コンパクト化たちで近似できる.

ここで, 局所コンパクト空間  $X$  が無限遠で連結 (**connected at infinity**) であるとは, 補集合が連結となるより大きいコンパクト部分集合が  $X$  のいかなるコンパクト部分集合に対しても存在することである. 連結空間においては, これは端コンパクト化 (**end compactification**) が1点コンパクト化であることを意味する.  $X$  が無限遠で連結ならば2点コンパクト化を持たないことに注意しておきたい.  $\gamma X \in \mathcal{K}(X)$  が特異コンパクト化 (**Singular compactification**) であるとは, 剰余  $\gamma X \setminus X$  が  $\gamma X$  のレトラクトとなるようなコンパクト化のことである.<sup>3</sup>

定理 1.2 (Woods [8], 1995). 距離付け可能な空間  $X$  において,  $\beta X$  は Smirnov コンパクト化で近似できる.

定理 1.3 (Kawamura-Tomoyasu [6], 2001). 距離付け可能かつ可分な局所コンパクト空間  $X$  において,  $\beta X$  は Higson コンパクト化で近似できる.

Smirnov コンパクト化および Higson コンパクト化については,  $X$  上の実数値連続関数環の部分環を用いて次節で定義したい.

任意のコンパクト化に対する近似定理としては例えば次がある.

定理 1.4 (Faulkner [5], 1990). ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) の任意のコンパクト化は, 剰余が閉区間  $\mathbf{I}$  または1点と同相なコンパクト化で近似できる.

事実 1.5. 距離付け可能かつ可分な局所コンパクト空間  $X$  の任意のコンパクト化は, 距離付け可能なコンパクト化で近似できる.

今回は次の定理の証明の概略を紹介するとともに, この証明のアイデアが上述の定理群をどれだけ一般化できるか検討したい.

定理 1.6.  $\mathbb{R}$  の任意のコンパクト化は  $\mathbb{R}^2$  に埋め込めるようなコンパクト化で近似できる.

---

<sup>3</sup> 正確にはこれは定義と同値な条件である. 通常は,  $X$  からコンパクト空間への特異な連続関数を用いて定義する. 例えば Faulkner[4] を参照されたい.

## 2. 連続関数環とコンパクト化

$X$  の実数値有界連続関数全体を  $C^*(X)$  で表す.  $C^*(X)$  に一様ノルムによる位相を入れれば自然な和と積の演算に関してバナッハ環 (Banach algebra) となる.  $C^*(X)$  の単位的<sup>4</sup>閉部分環で  $X$  の位相を生成するもの全体を  $\mathcal{A}(X)$  とする. ここで,  $A \subset C^*(X)$  が  $X$  の位相を生成するとは,  $A$  のすべての元が連続となる最弱位相が  $X$  の元の位相に一致することである.  $X$  はチコノフ空間であるので, これは  $X$  の任意の閉集合とその外側の点を分離する関数が  $A$  の中に存在することと同値になる. 次はよく知られた事実である.<sup>5</sup>

**事実 2.1.**  $(\mathcal{K}(X), \leq)$  と  $(\mathcal{A}(X), \subset)$  は順序同型である.

実際, 各  $\gamma X \in \mathcal{K}(X)$  に対して,  $\gamma X$  に連続関数として拡張可能な  $X$  上の有界関数全体を  $S(\gamma X)$  とすれば (すなわち  $S(\gamma X) = \{f|_X \in C^*(X) \mid f \in C^*(\gamma X)\}$ ), 対応  $S: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{A}(X)$  は順序同型となる. ここで  $S(\gamma X)$  と  $C^*(\gamma X)$  はバナッハ環として同型 ( $\simeq$ ) であることに注意したい. また, 各  $A \in \mathcal{A}(X)$  に対して,  $X$  からチコノフ立方体  $\mathbf{I}^A$  への関数  $e_A: X \rightarrow \mathbf{I}^A$  を  $e_A(x) = (f(x)/\|f\|)_{f \in A}$  と定義すれば  $e_A$  は埋蔵写像であり,  $\mathbf{I}^A$  における  $X$  のコンパクト化を  $T(A) = \text{cl}_{\mathbf{I}^A} e_A(X)$  とすれば, 対応  $T: \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$  は  $S$  の逆写像となる.<sup>6</sup> これらを用いて, 次のようなコンパクト化が定義される.

**定義.** 距離付け可能な空間  $X$  および  $X$  の許容可能な距離  $d$  に対して,  $(X, d)$  から  $\mathbb{R}$  への有界な一様連続関数全体を  $U_d(X)$  とすれば  $U_d(X) \in \mathcal{A}(X)$  である.  $(X, d)$  の **Smirnov** コンパクト化とは,  $u_d X := T(U_d(X))$  で定義されるコンパクト化のことである. 更に,  $X$  が可分な局所コンパクト空間であり  $d$  が固有距離<sup>7</sup>であるとき,

$$H_d(X) := \left\{ f \in C^*(X) \mid \forall \varepsilon > 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \text{diam } f(B_d(x, \varepsilon)) = 0 \right\}$$

とすれば  $H_d(X) \in \mathcal{A}(X)$  となる. ここで,  $B_d(x, \varepsilon)$  は  $x \in X$  の  $d$  における  $\varepsilon$ -近傍を表し,  $\text{diam}$  は直径を表す. コンパクト化  $h_d X := T(H_d(X))$  は  $(X, d)$  の **Higson** コンパクト化と呼ばれる.

本稿では,  $\gamma X \in \mathcal{K}(X)$  が  $X$  のある許容可能な距離  $d$  について  $(X, d)$  の Smirnov コンパクト化あるいは Higson コンパクト化と同値であるとき,  $\gamma X$  を Smirnov コンパクト化あるいは Higson コンパクト化とそれぞれ呼ぶことにする.

<sup>4</sup>単位元 1 を含む多元環を単位的という.

<sup>5</sup>Engelking [3] の演習問題にもある (Problem 3.12.22).

<sup>6</sup>証明は例えば Ball-Yokura [1] を見よ.

<sup>7</sup>有界閉集合とコンパクト部分集合が同値になる距離を固有 (proper) であるという.  $X$  が距離付け可能な可分局所コンパクト空間ならば固有距離は存在する (逆は定義より明らか).

$C^*(X)$  の部分集合  $D$  に対して,  $D$  を含む最小の単位的閉部分環を  $\langle D \rangle$  と書こう.<sup>8</sup> 定理 1.6 を示すにあたり, まず次の補題を認めたい.

**補題 2.2.** 任意の  $\gamma X \in \mathcal{K}(X)$  に対して  $A = S(\gamma X)$  とする. このとき, 任意の  $g \in C^*(X)$  に対して  $X$  のコンパクト化  $T(\langle A, g \rangle)$  は積空間  $\mathbf{I} \times \gamma X$  に埋め込める.

$T(\langle A, g \rangle)$  の定義には, 部分環  $\langle A, g \rangle$  の元の個数ぶんの座標を要するチコノフ立方体を用いていた. しかしながら,  $\langle A, g \rangle$  上の全ての関数の情報が必要なわけではなく,  $A$  と関数  $g$  のみで十分であることを補題 2.2 は意味している (実際, 補題 2.2 の証明はこれを示すことで得られる).

次の命題の証明は, 本稿で得られるすべての近似定理の鍵となる.

**命題 2.3.**  $\gamma X \leq \delta X$  を満たす二つの任意のコンパクト化  $\gamma X$  および  $\delta X$  において,  $\delta X$  は  $\mathbf{I} \times \gamma X$  に埋め込めるような  $X$  のコンパクト化たちで近似することができる.

**証明.** まず  $\langle D \rangle = S(\delta X)$  を満たすような集合  $D \subset S(\delta X)$  を一つ選ぼう ( $D = S(\delta X)$  でもよい). 更に  $A = S(\gamma X)$  とおこう.  $\gamma X \leq \delta X$  より  $S(\gamma X) \subset S(\delta X)$ , すなわち  $A \subset \langle D \rangle$  である.  $T$  は順序同型であるから  $\sup$  記号を外に出せることに注意して計算すると,

$$\begin{aligned} \delta X &= T(S(\delta X)) = T(\langle D \rangle) = T(\langle D \cup A \rangle) \\ &= T(\sup \{ \langle A, g \rangle \mid g \in D \setminus A \}) = \sup \{ T(\langle A, g \rangle) \mid g \in D \setminus A \}. \end{aligned}$$

補題 2.2 によれば各  $T(\langle A, g \rangle)$  は  $\mathbf{I} \times \gamma X$  に埋め込めるようなコンパクト化であった. ゆえに命題は示された.  $\square$

命題 2.3 により, ただちに定理 1.6 が得られる.

**定理 1.6 の証明.**  $\mathbb{R}$  の任意のコンパクト化  $\delta \mathbb{R}$  に対して,  $\gamma \mathbb{R} = \alpha \mathbb{R}$  (1点コンパクト化) とすれば  $\gamma \mathbb{R} \leq \delta \mathbb{R}$  である. 命題 2.3 より  $\delta \mathbb{R}$  は  $\mathbf{I} \times \gamma \mathbb{R}$  に埋め込めるコンパクト化で近似できる.  $\mathbf{I} \times \gamma \mathbb{R} \approx \mathbf{I} \times \mathbb{S}^1$  は  $\mathbb{R}^2$  に埋め込むことができるので, 結局  $\delta \mathbb{R}$  は  $\mathbb{R}^2$  に埋め込めるコンパクト化で近似できることになる.  $\square$

次元を一般化すると次が成り立つ. 証明は定理 1.6 とほとんど同じである.

**系 2.4.**  $n$ 次元ユークリッド空間の任意のコンパクト化は  $n+1$ 次元ユークリッド空間に埋め込めるようなコンパクト化で近似できる.  $\square$

<sup>8</sup>閉集合に限っている点に注意.  $\overline{\langle D \rangle}$  と書くべきかもしれないが, 本稿では閉部分環のみしか考えないのでこのように略記する.

## 3. 連続関数環の生成元

さて、最初の目標である定理 1.6 は証明されたわけだが、ここで近似に必要なコンパクト化の個数はどれくらいあれば十分なのか考えてみよう。そのためには命題 2.3 の証明を振り返ってみればよい。κ を命題 2.3 における近似に必要なコンパクト化の数の最小濃度とすれば  $\kappa \leq \text{card}(D \setminus A) \leq \text{card } D$  であるから、大雑把に見積もれば

$$\kappa \leq \min\{\text{card } D \mid \langle D \rangle = S(\delta X)\}$$

である。上式の右辺を  $\text{gen } S(\delta X)$  とおこう。正確には、バナッハ環  $A$  に対して、 $A$  を生成するために必要な集合の最小濃度

$$\text{gen } A := \min\{\text{card } D \mid D \subset A, \langle D \rangle = A\}$$

と定義する。  $S(\delta X)$  と  $C^*(\delta X)$  はバナッハ環として同型であったから  $\text{gen } S(\delta X) = \text{gen } C^*(\delta X)$  である。実は、これは  $\delta X$  を埋め込めるチコノフ立方体の最小次元に一致する。つまり、チコノフ空間  $Y$  に対して  $\text{emb } Y$  を以下で定義される濃度:

$$\text{emb } Y := \min\{\text{card } D \mid \exists \text{埋蔵写像 } : Y \hookrightarrow \mathbf{I}^D\}$$

とすれば、次の命題から  $\kappa \leq \text{emb } \delta X$  が得られる。

**命題 3.1.** 任意のコンパクト・ハウスドルフ空間  $X$  について  $\text{emb } Y = \text{gen } C^*(Y)$ .

命題 3.1 の証明には良く知られたの次の定理を用いる。

**定理 3.2** (Stone-Weierstrass の近似定理). 任意のコンパクト・ハウスドルフ空間  $Y$  および  $D \subset C^*(Y)$  について、 $D$  が  $Y$  の各点を分離すれば  $\langle D \rangle = C^*(Y)$ .

ここで、 $D \subset C^*(Y)$  が  $Y$  の各点を分離するとは、 $f(x) \neq f(y)$  なる  $f \in D$  の存在が任意の異なる 2 点  $x, y \in Y$  に対していえることである。

命題 3.1 の証明. ( $\geq$ ) 埋蔵写像  $e : Y \rightarrow \mathbf{I}^{\text{emb } Y}$  を取り、 $D = \{\text{pr}_\lambda \circ e \in C^*(Y) \mid \lambda \in \text{emb } Y\}$  とすれば  $e$  の単射性から  $D$  は  $Y$  の各点を分離する。したがって定理 3.2 により  $\langle D \rangle = C^*(Y)$  となる。ゆえに  $\text{emb } Y \geq \text{card } D \geq \text{gen } C^*(Y)$ .

( $\leq$ )  $\text{card } D = \text{gen } C^*(Y)$  かつ  $\langle D \rangle = C^*(Y)$  を満たす  $D \subset C^*(Y)$  を一つ固定する。 $\langle D \rangle = C^*(Y)$  より  $D$  は  $Y$  の各点を分離する。したがって、

$$e : Y \rightarrow \mathbf{I}^D, \quad e(x) = (f(x)/\|f\|)_{f \in D}$$

は連続単射であり、 $Y$  はコンパクト空間であるから埋蔵写像となる。ゆえに  $\text{emb } Y \leq \text{card } D = \text{gen } C^*(Y)$ . □

**系 3.3.** 命題 2.3 において、近似に必要なコンパクト化の数の最小濃度を  $\kappa$  とする。このとき  $\kappa \leq \text{emb } \delta X$ . □

ところで、バナッハ環  $A$  が  $\text{gen } A < \aleph_0$  を満たすとき有限生成,  $\text{gen } A \leq \aleph_0$  を満たすとき可算生成であると呼ぶことにすれば, 命題 3.1 の証明から次が分かる.

系 3.4. 任意のコンパクト・ハウスドルフ空間  $Y$  について  $Y$  が可分距離付け可能な空間 (かつ有限次元) であるための必要十分条件は  $C^*(Y)$  が可算生成 (有限生成) となることである.  $\square$

一般のチコノフ空間  $X$  に関しては次が言える. とくに  $X$  が局所コンパクトである場合は,  $\gamma X$  として 1 点コンパクト化のみを考えればよい.

定理 3.5. 任意のチコノフ空間  $X$  について  $X$  が可分距離付け可能な空間 (かつ有限次元) であるための必要十分条件は, ある  $X$  のコンパクト化  $\gamma X$  について  $C^*(\gamma X)$  が可算生成 (有限生成) となることである.

#### 4. コンパクト化の近似定理

それでは最後に 1 節で述べた近似定理の一般化について述べよう. まずは次を示す.

補題 4.1. 任意の  $\gamma X \in \mathcal{K}(X)$  および  $g \in C^*(X)$  に対して,  $A = S(\langle \gamma X, g \rangle)$  とすれば次が成立する.

- (1)  $\gamma X$  が距離付け可能ならば  $T(\langle A, g \rangle)$  も距離付け可能である.
- (2)  $\gamma X$  が Smirnov コンパクト化ならば  $T(\langle A, g \rangle)$  も Smirnov コンパクト化である.

証明の概略. (1) は補題 2.2 から直ちに導かれる.  $\gamma X$  が Smirnov コンパクト化であるとすれば,  $X$  のある許容可能な距離  $d$  について  $\gamma X \sim u_d X$  となる.  $d'(x, y) = d(x, y) + |g(x) - g(y)|$  とすればこれも  $X$  の許容可能な距離であり, 更に  $T(\langle A, g \rangle) \sim u_{d'} X$  となることが示せる. ゆえに  $T(\langle A, g \rangle)$  も Smirnov コンパクト化である.  $\square$

定理 1.2 および事実 1.5 の一般化として次が得られる.

定理 4.2. 距離付け可能な空間  $X$  のコンパクト化  $\delta X$  に対して次が成立する.

- (1)  $\delta X$  が距離付け可能なコンパクト化で近似できるための必要十分条件は  $\gamma X \leq \delta X$  なる距離付け可能なコンパクト化  $\gamma X$  が存在することである.
- (2)  $\delta X$  が Smirnov コンパクト化で近似できるための必要十分条件は  $\gamma X \leq \delta X$  なる Smirnov コンパクト化  $\gamma X$  が存在することである.

証明. 必要性は明らか. 十分性は, 補題 4.1 を用いて命題 2.3 の証明と同様に  $T(\langle A, g \rangle)$  たちで近似する.  $\square$

特異コンパクト化に関して次が成立する. 証明は省略するが詳しくは Mine [7] を見よ.

**補題 4.3.** 局所コンパクト空間  $X$  の 1 点コンパクト化を  $\alpha X$  とし  $A = S(\alpha X)$  とする.<sup>9</sup> もし  $X$  が 2 点コンパクト化を持たないならば, 任意の  $g \in C^*(X)$  に対してコンパクト化  $\alpha_g X = T(\langle A, g \rangle)$  は特異コンパクト化であり, その剰余  $\alpha_g X \setminus X$  は閉区間  $\mathbf{I}$  または 1 点集合と同相である.

次の定理は定理 1.1 および 1.4 の一般化である. 証明から (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) および (i)  $\Rightarrow$  (iii) は  $X$  の連結性がなくても成立することがわかる.

**定理 4.4.** 連結な局所コンパクト空間  $X$  について次は同値.

- (i)  $X$  は 2 点コンパクト化を持たない.
- (ii)  $X$  の任意のコンパクト化は剰余が閉区間  $\mathbf{I}$  または 1 点集合と同相なコンパクト化で近似できる.
- (iii)  $X$  の任意のコンパクト化は特異コンパクト化で近似できる.

証明. (i)  $\Rightarrow$  (ii) および (i)  $\Rightarrow$  (iii) は, 補題 4.3 を用いて命題 2.3 の証明と同様の手法で近似する. (ii)  $\Rightarrow$  (i) については対偶  $\neg$ (i)  $\Rightarrow \neg$ (ii) を示すのが容易である. (iii)  $\Rightarrow$  (i) を背理法で示そう. もし  $X$  が 2 点コンパクト化  $\gamma X$  を持つとすれば (iii) より  $\gamma X$  は特異コンパクト化で近似できるが,  $\gamma X$  より真に小さいコンパクト化は 1 点コンパクト化しかないので  $\gamma X$  自身も特異コンパクト化である. ゆえにレトラクション  $r: \gamma X \rightarrow \gamma X \setminus X$  が存在し, とくに  $X$  への制限  $r|_X$  は 2 点空間  $\gamma X \setminus X$  への全射である. これは  $X$  の連結性に矛盾する.  $\square$

なお, 定理 1.3 の一般化は得られていない. 今回の議論の流れに沿った別証明があるので, その概略のみ最後に紹介したい.

**定理 1.3** の証明の概略.  $X$  の許容可能な固有距離  $d$  を一つ固定する. 基点  $* \in X$  をとり  $d_g(x, y) = d(x, y) + |d(*, x)g(x) - d(*, y)g(y)|$  とすれば  $d_g$  も  $X$  の許容可能な固有距離であり,  $g \in H_{d_g}(X)$  となる. ゆえに  $C^*(X) = \sup\{H_{d_g}(X) \mid g \in C^*(X)\}$  であり, これに対応  $T$  をかませると  $\beta X = \sup\{h_{d_g}X \mid g \in C^*(X)\}$  を得る.  $\square$

<sup>9</sup>実は  $S(\alpha X) = \{f \in C^*(X) \mid \exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)\} \simeq C_0(X) \oplus \mathbb{R}$  である.

## REFERENCES

- [1] B.J. Ball and S. Yokura *Compactifications determined by subsets of  $C^*(X)$* , *Topology Appl.* **13** (1982), 1–13.
- [2] R.E. Chandler and G.D. Faulkner *Singular compactifications: the order structure*, *Proc. Amer. Soc.* **100** (1987), 377–382.
- [3] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann, Berlin, 1989.
- [4] G.D. Faulkner, *Compactifications whose remainders are retracts*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **103** (1988), 984–988.
- [5] G.D. Faulkner *Minimal compactifications and their associated function space*, *Proc. Amer. Soc.* **108** (1990), 541–546.
- [6] K. Kawamura and K. Tomoyasu, *Approximations of Stone-Čech compactifications by Higson compactifications*, *Colloq. Math.* **88** (2001), 75–92.
- [7] K. Mine, *Approximation theorems for compactifications*, preprint.
- [8] R.G. Woods, *The minimum uniform compactification of a metric space*, *Fund. Math.* **147** (1995), 39–59.

Institute of Mathematics,  
University of Tsukuba, Tsukuba, 305-8571, Japan  
pen@math.tsukuba.ac.jp