

## 各点収束位相をもつ関数空間の Ramsey property

神奈川大学・工学部

(Faculty of Engineering, Kanagawa University)

酒井 政美 (Masami Sakai)

### 1 はじめに

位相空間はすべて Tychonoff 空間とする。空間  $X$  上の実数値連続関数全体に各点収束位相をいれた空間を  $C_p(X)$  で表す。Gerlits, Nagy [3] 以来、 $C_p(X)$  の局所的性質と、その局所的性質を特徴づける  $X$  の covering property に関する多くの結果が知られている。そのような結果の概要は [7] を参照されたい。本稿では  $C_p(X)$  の  $\alpha_i$ -properties に関する Shakhmatov の問題を解決した論文 [8] の概要を与える。

### 2 性質 $(\alpha_i)$ と the Ramsey property

定義 1 (Arhangel'skii, 1972 [1]) 空間  $X$  の任意の点  $x \in X$  と  $x$  への任意の収束点列の族  $\{S_n : n \in \omega\}$  に対して、次の条件  $(\alpha_i)$  を満たす  $x$  への収束点列  $S$  が存在するとき、 $X$  は  $\alpha_i$ -空間 ( $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) とよばれる。

- ( $\alpha_1$ ) すべての  $n \in \omega$  に対して、 $S_n \setminus S$  は有限集合、
- ( $\alpha_2$ ) すべての  $n \in \omega$  に対して、 $S_n \cap S$  は無限集合、
- ( $\alpha_3$ ) 無限個の  $n \in \omega$  に対して、 $S_n \cap S$  は無限集合、
- ( $\alpha_4$ ) 無限個の  $n \in \omega$  に対して、 $S_n \cap S \neq \emptyset$ 。

定義 2 (Nyikos, 1992 [6]) 空間  $X$  の任意の点  $x \in X$  と  $x$  への任意の収束点列の族  $\{S_n : n \in \omega\}$  で  $S_n \cap S_m = \emptyset (n \neq m)$  を満たすものに対して、次の条件  $(\alpha_{3/2})$  を満たす  $x$  への収束点列  $S$  が存在するとき、 $X$  は  $\alpha_{3/2}$ -空間 とよばれる。

- ( $\alpha_{3/2}$ ) 無限個の  $n \in \omega$  に対して、 $S_n \setminus S$  は有限集合。

これらの性質の関係は次の図式のようになる。第 1 可算公理を満たす空間は、 $\alpha_1$ -空間である。 $(\alpha_{3/2}) \rightarrow (\alpha_2)$  の証明は Nyikos [6] による。

$$\alpha_1 \rightarrow \alpha_{3/2} \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \alpha_3 \rightarrow \alpha_4$$

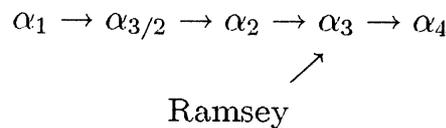
定理 1 (Dow, 1990 [2]) Laver's model では  $(\alpha_1) = (\alpha_2)$  が成り立つ。

定義 3 (Nogura, Shakhmatov, 1995 [5]) 空間  $X$  の任意の点  $x \in X$  と  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n,m} = x$  を満たす  $X$  の点列  $\{x_{n,m} : n, m \in \omega\}$  に対して、次の条件 (\*) を満たす  $\omega$  の無限部分集合  $M$  が存在するとき、 $X$  は **Ramsey property** をもつといわれる。

(\*)  $x$  の任意の近傍  $U$  に対して、ある  $k \in \omega$  が存在して  $\{x_{n,m} : n, m \in M, k \leq n < m\} \subset U$  を満たす。

上の図式に Ramsey property を加えると次のようになる。Arens の空間  $S_2$  は  $\alpha_1$ -空間であるが Ramsey property はもたない。

$$\alpha_1 \rightarrow \alpha_{3/2} \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \alpha_3 \rightarrow \alpha_4$$

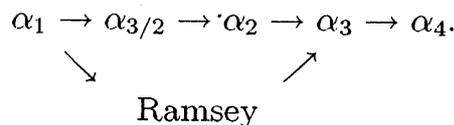

  
 $\nearrow$   
 Ramsey

位相群の Ramsey property について、Nogura, Shakhmatov は次の結果を与えた。

定理 2 (Nogura, Shakhmatov, 1995 [5])

- (1) 局所コンパクトな位相群において、 $(\alpha_1)$ 、 $(\alpha_2)$ 、 $(\alpha_3)$ 、 $(\alpha_4)$ 、そして Ramsey property はすべて同値である。
- (2) 一般の位相群においては、次の図式が成り立つ。

$$\alpha_1 \rightarrow \alpha_{3/2} \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \alpha_3 \rightarrow \alpha_4$$


  
 $\searrow$        $\nearrow$   
 Ramsey

位相群における  $(\alpha_2)$  と Ramsey property の関係については何も知られていない。

未解決問題(Shakhmatov, 2002 [10, Question 3.15])

- (1) 位相群において  $(\alpha_2)$  から Ramsey property ができるか?
- (2) 位相群において Ramsey property から  $(\alpha_2)$  ができるか?

定理 1 と定理 2 (2) から、Laver's model では位相群において  $(\alpha_2)$  から Ramsey property ができる。しかし、ZFC において成立する可能性は残っている。

各点収束位相を入れた関数空間  $C_p(X)$  は位相群であるが、この種の空間では次の2つの定理が知られている。

定理3 (Gerlits, Nagy 1988 [4]/ Scheepers 1998 [9])  $C_p(X)$  において、 $(\alpha_2)$ ,  $(\alpha_3)$ ,  $(\alpha_4)$  はすべて同値である。

定理4 (Sakai, 2009 [8])  $C_p(X)$  において、 $(\alpha_1)$  と  $(\alpha_{3/2})$  は同値である。

定理3と定理4から、 $C_p(X)$  においては次の図式が得られる。

$$\alpha_1 = \alpha_{3/2} \rightarrow \text{Ramsey} \rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$$

Shakhmatov は上の未解決問題の特別な場合として次の問題を出した。

問題 (Shakhmatov, 2002 [10, Question 5.9])

- (1)  $C_p(X)$  において  $(\alpha_2)$  と Ramsey property は同値か?
- (2)  $C_p(X)$  において Ramsey property と  $(\alpha_{3/2})$  は同値か?

この問題に対して、(1) は肯定的であり、(2) には反例が存在する。

定理5 (Sakai, 2009 [8])  $C_p(X)$  において、 $(\alpha_2)$  と Ramsey property は同値である。

反例 Scheepers [9] は  $\mathfrak{t} = \mathfrak{b}$  のもとで、実数の部分集合  $X$  で、 $C_p(X)$  は  $(\alpha_2)$  を満たすが  $(\alpha_1)$  は満たさない例を構成した。定理4と定理5から、この  $C_p(X)$  が問題(2)の反例になる。

## 参考文献

- [1] A.V. Arhangel'skii, The frequency spectrum of a topological space and the classification of spaces, Soviet Math. Dokl. **13** (1972), 1185–1189.
- [2] A. Dow, Two classes of Fréchet-Urysohn spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 241–247.
- [3] J. Gerlits and Zs. Nagy, Some properties of  $C(X)$ . I, Topology Appl. **14** (1982), 151–161.

- [4] J. Gerlits and Zs. Nagy, On Frechet spaces, *Rend. Circ. Mat. Palermo*(2)Suppl. No. 18 (1988), 51–71.
- [5] T. Nogura and D. Shakhmatov, Amalgamation of convergent sequences in locally compact groups, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **320** (1995), 1349–1354.
- [6] P. J. Nyikos, Subsets of  ${}^{\omega}\omega$  and the Fréchet-Urysohn and  $\alpha_i$ -properties, *Topology Appl.* **48** (1992), 91–116.
- [7] M. Sakai, Special subsets of reals characterizing local properties of function spaces, in: Lj.D.R. Kocinac (Ed.), *Selection Principles and Covering Properties in Topology*, in: *Quad. Mat.*, **18**(2007), 195–225.
- [8] M. Sakai, The Ramsey property for  $C_p(X)$ , to appear in *Acta Math. Hungar.*.
- [9] M. Scheepers,  $C_p(X)$  and Arhangel'skii's  $\alpha_i$ -spaces, *Topology Appl.* **89** (1998), 265–275.
- [10] D. Shakhmatov, Convergence in the presence of algebraic structure, In *Recent Progress in General Topology, II*, (M. Hušek and J. van Mill eds.), North-Holland, Amsterdam, 2002, 463–484.