数理解析研究所講究録
第 1681 巻 2010 年 38-41

各点収束位相をもつ関数空間の Ramsey property

神奈川大学・工学部
(Faculty of Engineering, Kanagawa University)
酒井 政美 (Masami Sakai)

1 はじめに

位相空間はすべて Tychonoff 空間とする。空間 X 上の実数値連続関数全体に各点収束位相をいれた空間を $C_p(X)$ で表す。Gerlits, Nagy [3] 以来、$C_p(X)$ の局所的性質と、その局所的性質を特徴づける X の covering property に関する多くの結果が知られている。そのような結果の概要は [7] を参照されたい。本稿では $C_p(X)$ の α_i-properties に関する Shakhmatov の問題を解決した論文 [8] の概要を与える。

2 性質 (α_i) と the Ramsey property

定義 1 (Arhangel'skii, 1972 [1]) 空間 X の任意の点 $x \in X$ と x への任意の収束点列の族 $\{S_n : n \in \omega\}$ に対して、次の条件 (α_i) を満たす x への収束点列 S が存在するとき、X は α_i-空間 $(i \in \{1, 2, 3, 4\})$ とよばれる。

(α_1) すべての $n \in \omega$ に対して、$S_n \setminus S$ は有限集合、
(α_2) すべての $n \in \omega$ に対して、$S_n \cap S$ は無限集合、
(α_3) 無限個の $n \in \omega$ に対して、$S_n \cap S$ は無限集合、
(α_4) 無限個の $n \in \omega$ に対して、$S_n \cap S \neq \emptyset$。

定義 2 (Nyikos, 1992 [6]) 空間 X の任意の点 $x \in X$ と x への任意の収束点列の族 $\{S_n : n \in \omega\}$ で $S_n \cap S_m = \emptyset\,(n \neq m)$ を満たすものに対して、次の条件 $(\alpha_{3/2})$ を満たす x への収束点列 S が存在するとき、X は $\alpha_{3/2}$-空間 とよばれる。

$(\alpha_{3/2})$ 無限個の $n \in \omega$ に対して、$S_n \setminus S$ は有限集合。

これらの性質の関係は次の図式のようになる。第 1 可算公理を満たす空間は、α_1-空間である。$(\alpha_{3/2}) \to (\alpha_2)$ の証明は Nyikos [6] による。

$$\alpha_1 \to \alpha_{3/2} \to \alpha_2 \to \alpha_3 \to \alpha_4$$

定理１ (Dow, 1990 [2]) Laver's model では (α_1)=(α_2) が成り立つ。

定義３ (Nogura, Shakhmatov, 1995 [5]) 空間 X の任意の点 $x \in X$ と $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} x_{n,m} = x$ を満たす X の点列 $\{x_{n,m} : n, m \in \omega\}$ に対して、次の条件 (*) を満たす ω の無限部分集合 M が存在するとき、X は **Ramsey property** をもつといわれる。

(*) x の任意の近傍 U に対して、ある $k \in \omega$ が存在して $\{x_{n,m} : n, m \in M, k \leq n < m\} \subset U$ を満たす。

上の図式に Ramsey property を加えると次のようになる。Arens の空間 S_2 は α_1-空間であるが Ramsey property はもたない。

$$\begin{tikzcd}
\alpha_1 \arrow[r] & \alpha_{3/2} \arrow[r] & \alpha_2 \arrow[r] & \alpha_3 \arrow[r] & \alpha_4 \\
 & & \text{Ramsey} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

位相群の Ramsey property について、Nogura、Shakhmatov は次の結果を与えた。

定理２ (Nogura, Shakhmatov, 1995 [5])

(1) 局所コンパクトな位相群において、(α_1)、(α_2)、(α_3)、(α_4)、そして Ramsey property はすべて同値である。

(2) 一般の位相群においては、次の図式が成り立つ。

$$\begin{tikzcd}
\alpha_1 \arrow[r] \arrow[drr] & \alpha_{3/2} \arrow[r] & \alpha_2 \arrow[r] & \alpha_3 \arrow[r] & \alpha_4. \\
 & & \text{Ramsey} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

位相群における (α_2) と Ramsey property の関係については何も知られていない。

未解決問題(Shakhmatov, 2002 [10, Question 3.15])

(1) 位相群において (α_2) から Ramsey property がでるか？

(2) 位相群において Ramsey property から (α_2) がでるか？

定理１と定理２ (2) から、Laver's model では位相群において (α_2) から Ramsey property がでる。しかし、ZFC において成立する可能性は残っている。

各点収束位相を入れた関数空間 $C_p(X)$ は位相群であるが、この種の空間では次の2つの定理が知られている。

定理3 (Gerlits, Nagy 1988 [4]/ Scheepers 1998 [9]) $C_p(X)$ において、(α_2), (α_3), (α_4) はすべて同値である。

定理4 (Sakai, 2009 [8]) $C_p(X)$ において、(α_1) と $(\alpha_{3/2})$ は同値である。

定理3と定理4から、$C_p(X)$ においては次の図式が得られる。

$$\alpha_1 = \alpha_{3/2} \to \text{Ramsey} \to \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$$

Shakhmatov は上の未解決問題の特別な場合として次の問題を出した。

問題 (Shakhmatov, 2002 [10, Question 5.9])
(1) $C_p(X)$ において (α_2) と Ramsey property は同値か?
(2) $C_p(X)$ において Ramsey property と $(\alpha_{3/2})$ は同値か?

この問題に対して、(1) は肯定的であり、(2) には反例が存在する。

定理5 (Sakai, 2009 [8]) $C_p(X)$ において、(α_2) と Ramsey property は同値である。

反例 Scheepers [9] は $\mathfrak{t} = \mathfrak{b}$ のもとで、実数の部分集合 X で、$C_p(X)$ は (α_2) を満たすが (α_1) は満たさない例を構成した。定理4と定理5から、この $C_p(X)$ が問題 (2) の反例になる。

参考文献

[1] A.V. Arhangel'skii, The frequency spectrum of a topological space and the classification of spaces, Soviet Math. Dokl. **13** (1972), 1185–1189.

[2] A. Dow, Two classes of Fréchet-Urysohn spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 241–247.

[3] J. Gerlits and Zs. Nagy, Some properties of $C(X)$. I, Topology Appl. **14** (1982), 151–161.

[4] J. Gerlits and Zs. Nagy, On Frechet spaces, Rend. Circ. Mat. Palermo(2)Suppl. No. 18 (1988), 51–71.

[5] T. Nogura and D. Shakhmatov, Amalgamation of convergent sequences in locally compact groups, C. R. Acad. Sci. Paris, **320** (1995), 1349–1354.

[6] P. J. Nyikos, Subsets of ${}^{\omega}\omega$ and the Fréchet-Urysohn and α_i-properties, Topology Appl. **48** (1992), 91–116.

[7] M. Sakai, Special subsets of reals characterizing local properties of function spaces, in: Lj.D.R. Kocinac (Ed.), Selection Principles and Covering Properties in Topology, in: Quad. Mat., **18**(2007), 195–225.

[8] M. Sakai, The Ramsey property for $C_p(X)$, to appear in Acta Math. Hungar..

[9] M. Scheepers, $C_p(X)$ and Arhangel'skiǐ's α_i-spaces, Topology Appl. **89** (1998), 265–275.

[10] D. Shakhmatov, Convergence in the presence of algebraic structure, In Recent Progress in General Topology, II, (M. Hušek and J. van Mill eds.), North-Holland, Amsterdam, 2002, 463–484.