数理解析研究所講究録
第 1681 巻 2010 年 56-64

THE COLORINGS FOR MAPS ON CONNECTED FINITE GRAPHS

知念直紹 (NAOTSUGU CHINEN)
広島工業大学 (HIROSHIMA INSTITUTE OF TECHNOLOGY)

1. Introduction and Definitition

本稿はすべて Hausdorff 空間とし，不動点を持たない連続写像を対象とする。まず，本稿を通して以下の表記を使う。

Notation 1.1. Denote

$$\mathrm{FPF}(X) = \{f : X \to X : f \text{ is a fixed-point free continuous map}\}$$

(i.e., $f \in \mathrm{FPF}(X)$ if and only if $f(x) \neq x$ for all $x \in X$.) and

$$\mathcal{H}(X) = \{f : X \to X : f \text{ is a homeomorphism}\}.$$

写像の coloring と coloring number の定義は 1990 年代に出現するが，概念は 1951 年の [8] が最初だと思われる。

Definition 1.2 (Hartskamp(1995), Aarts-Fokkink-Vermeer(1996)).
Let $f \in \mathrm{FPF}(X)$, let $\mathcal{U}$ be an open (or closed) cover of X, and, let $p = |\mathcal{U}|$.

(1) Let A be an open (or closed) subset of X. A is said to be a *color* of (X, f) if $A \cap f(A) = \emptyset$.
(2) $\mathcal{U}$ is said to be a *coloring* (*p-coloring*) of (X, f) if p is finite and all $U \in \mathcal{U}$ are colors of (X, f).
(3) Define the *color number* $\mathrm{col}(X, f)$ of (X, f) by

$$\mathrm{col}(X,f) = \begin{cases} \min\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \text{ is a coloring of } (X,f)\} \\ \infty \qquad\qquad (\text{otherwise}) \end{cases}$$

Remark 1.3.
写像 f の coloring $\mathcal{U}$ に対して，各 $U \in \mathcal{U}$ を膨らましたり減らしたりして，開 (閉) 被覆 $\mathcal{U}$ を次の性質を持つ閉 (開) 被覆 $\mathcal{V}$ に変えることが出来る。

$$\{\mathrm{Int}_X V : V \in \mathcal{V}\} \text{ は写像 } f \text{ の coloring}$$

$$(\{\mathrm{Cl}_X V : V \in \mathcal{V}\} \text{ は写像 } f \text{ の coloring})$$

よって，写像 f の coloring $\mathcal{U}$ は開被覆か閉被覆かどうかは気にしないことにする。
まず，簡単な例を挙げる。

Example 1.4.

Let $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ be a discrete space and let us define $s_p : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ by $s_p(i) \equiv i+1 \pmod{p}$. Then

$$\operatorname{col}(\mathbb{Z}_p, s_p) = \begin{cases} 2 & \text{if } p \text{ is even} \\ 3 & \text{if } p \text{ is odd} \end{cases}$$

単純なことだが，次のことからコンパクトな空間の場合は必ず coloring を持つことが分かる。

Remark 1.5.

Let $f \in \mathrm{FPF}(X)$.

(1) For every $x \in X$ there exists a closed neighborhood N_x of x in X such that N_x is a color of (X, f).
(2) If X is compact, then we can take a coloring of (X, f).

細かい歴史的な背景は [4] に詳しく書かれているが，写像の coloring の根本的な問題として以下のことが脈々と流れている。

Question 1.6.

(1) *Let X be a space and $f \in \mathrm{FPF}(X)$ (or $f \in \mathrm{FPF}(X) \cap \mathcal{H}(X)$). Decide* $\operatorname{col}(X, f)$*!*
(2) *What does (X, f) satisfy* $\operatorname{col}(X, f) < \infty$*?*

次の章から暫くは歴史的な結果から未解決問題あるいはそれから考えられる問題などを述べる。

2. Case 1 : 0-dimensinal spaces

次の定理は，写像の coloring の概念の導入のきっかけとなる最初の結果である。

Theorem 2.1 (Bruijn-Erdös (1951), Katětov (1967)).

Let X be a discrete space and $f \in \mathrm{FPF}(X)$. Then, $\operatorname{col}(X, f) \leq 3$.

(*Then there exist disjoint subsets $\{X_0, X_1, X_2\}$ of X such that $X = X_0 \cup X_1 \cup X_2$ and $X_i \cap f(X_i) = \emptyset$ for each $i = 0, 1, 2$.*)

離散空間は 0 次元であることから，上述の結果より以下の問題が考えられる。

Question 2.2.

Let X be a 0-dimensional space and $f \in \mathrm{FPF}(X)$. Then does it hold that $\operatorname{col}(X, f) \leq 3$*?*

上述の問題に対して，最初の肯定的な結果として以下がある。

Theorem 2.3 (Blaszczyk-Kim (1988)).
Let X be a 0-dimensional paracompact space and $f \in \mathrm{FPF}(X) \cap \mathcal{H}(X)$. Then, $\mathrm{col}(X, f) \leq 3$.

(*Then there exists a disjoint clopen cover $\{X_0, X_1, X_2\}$ of X such that $X_i \cap f(X_i) = \emptyset$ for each $i = 0, 1, 2$.*)

また，否定的な結果として以下がある。

Example 2.4 (Blaszczyk-Kim (1988)).
There exist a 0-dimensional locally compact space X and $f \in \mathrm{FPF}(X) \cap \mathcal{H}(X)$ such that $\mathrm{col}(X, f) = \infty$

上述の空間は $X = \{-1, 0, 1\}^{\omega_1} \setminus \{0\}^{\omega_1}$ で，写像はすべての $x \in X$ に対して $f(x) = -x$ を満たすものである。このような反例は数例しか見つかっていないのを考えれば，以下のような問題が考えられる。

Question 2.5.
(1) *Let X be a 0-dimensional space and $f \in \mathrm{FPF}(X) \cap \mathcal{H}(X)$. What space holds that $col(X, f) \leq 3$?*
(2) *Let X be a 0-dimensional paracompact space and $f \in \mathrm{FPF}(X)$. Then does it hold that $col(X, f) \leq 3$?*
(3) *For each $k \geq 4$ do there exist a 0-dimensional space X and $f \in \mathrm{FPF}(X) \cap \mathcal{H}(X)$ such that $\mathrm{col}(X, f) = k$?*

ただし，コンパクト空間の場合は肯定的であることに注意する。

Remark 2.6.
Let X be a 0-dimensional compact space and $f \in \mathrm{FPF}(X)$. Then $\mathrm{col}(X, f) \leq 3$.

3. Case 2 : n-dimensinal spaces

次に一般的な次元に関して，述べてたいと思う。まず，0 次元以上の次元と coloring との最初の結果は以下となる。

Theorem 3.1 (van Douwen (1993)).
Let X be an n-dimensional paracompact space and $f \in \mathrm{FPF}(X) \cap \mathcal{H}(X)$. Then,

$$\mathrm{col}(X, f) \leq 2n + 3.$$

無限次元の場合は簡単な反例（有限な coloring を持たない例）があることが知られている。

Example 3.2 (van Douwen (1993)).
Let $X = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{S}^n$, let $f : X \to X \in \mathrm{FPF}(X) \cap \mathcal{H}(X)$, and, let us define $f(x) = -x$ for each $x \in \mathbb{S}^n \subset X$. Then $\mathrm{col}(X, f) = \infty$.

上述の例は，$\mathrm{col}(\mathbb{S}^n, f|_{\mathbb{S}^n}) \geq n+2$ という事実を使って $\mathrm{col}(X,f) = \infty$ を示している。定理 3.1 をさらに精確にした定理が以下である。

Theorem 3.3 (van Hartskamp-Vermeer (1996), van Mill (1999)).
Let X be an n-dimensional paracompact space and $f \in \mathrm{FPF}(X) \cap \mathcal{H}(X)$. Then,

$$\mathrm{col}(X,f) \leq n+3.$$

この定理は，$n=1$ とすると，1 次元空間の不動点を持たない同相写像は四色以下で色が塗れることがわかる。このことは後にも述べるが極めて興味深い結果と思える。

また，空間がコンパクトの場合は定理 3.3 の条件 $\mathcal{H}(X)$ を削除できる（同相写像でなくてもよい）。

Theorem 3.4 (van Hartskamp-Vermeer (1996)).
Let X be an n-dimensional compact space and $f \in \mathrm{FPF}(X)$. Then,

$$\mathrm{col}(X,f) \leq n+3.$$

上述の定理の証明は，定理 3.3 と以下の結果から分かる。

$$\mathrm{col}(X,f) \leq \mathrm{col}(\varprojlim\{X,f\}, \varprojlim f) \leq n+3.$$

$\varprojlim\{X,f\}$ は $f: X \to X$ から生成される inverse limit で，$\varprojlim f$ はその空間どうしの同相写像に注意する。

4. Case 3 : Particular spaces and maps

この章では，よく知られた空間あるいは特別な写像に関しての coloring について述べる。まず，空間の連結性について述べる。

$X_i = [0,1]^n$ $(i = 0,1)$，$X = X_0 \bigoplus X_1$，$f(X_i) = X_j$ $(i \neq j)$ を満たす同相写像 $f: X \to X$ とすると，$\mathrm{col}(X,f) = 2$ であることがすぐに分かるから，一般論的にいえば，X が連結でなければ，coloring の定義から鑑みると coloring number の下限を決定するのは意味がないと考えられる。そこで，最初に簡単な注意から空間が連結であるときの荒い評価ではあるが coloring number の下限がわかる。

Remark 4.1 ([5]).
Let X be a connected space and $f \in \mathrm{FPF}(X)$. Then $\mathrm{col}(X,f) \geq 3$.

特に，さらにもし $\dim X = 1$ ならば，定理 3.3 から $\mathrm{col}(X,f)$ は 3 か 4 のいづれかになることが分かる。

さて，特殊な同相写像として involution map あるいは $\mathbb{Z}_p$-action などがある。involution map については以下の結果が知られている。

Theorem 4.2 (Aarts -Fokkink-Vermeer (1996)).
Let X be an n-dimensional paracompact space and $f \in \mathrm{FPF}(X) \cap \mathcal{H}(X)$. If $f^2(x) = x$ for all $x \in X$, then $\mathrm{col}(X,f) \leq n+2$.

簡単な具体的な例として，$\mathbb{S}^1$ をサークル， $r_\pi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ を π-回転写像とすると，注意4.1 と定理4.2 から $\mathrm{col}(\mathbb{S}^1, r_\pi) = 3$ となる。もっと一般に $\mathbb{S}^n$ を n 次元球面として，以下のような結果が得られている。

Corollary 4.3 (Lusternik-Schnirelmann).
If $\iota : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ is the antipodal map, then $\mathrm{col}(\mathbb{S}^n, \iota) = n + 2$.

involution map 以外 (p が 3 以上) の結果はあまり知られていないが，$p = 3$ に関しては [1] に見つけられるが証明はついていない。証明は [5] にある。

Remark 4.4 ([1],[5]).
Let X be a connected space and $f \in \mathrm{FPF}(X) \cap \mathcal{H}(X)$. If $f^3(x) = x$ for all $x \in X$, then $\mathrm{col}(X, f) \geq 4$.

簡単な具体的な例として，$r_{\frac{2}{3}\pi} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ を $\frac{2}{3}\pi$-回転写像とすると，定理3.3 と注意4.4 から，$\mathrm{col}(\mathbb{S}^1, r_{\frac{2}{3}\pi}) = 4$ が得られる。

注意4.4 の一般化として次の結果が得られた。

Proposition 4.5 (Akaike-Chinen-Tomoyasu[5]).
Let X be an arcwise-connected space and $f \in \mathrm{FPF}(X) \cap \mathcal{H}(X)$ with $f^n = \mathrm{id}_X$ for some $n \in \mathbb{N}$. If there exists an $x \in X$ such that $f^3(x) = x$, then $\mathrm{col}(X, f) \geq 4$.

上述の 2 つの結果から以下の問題が考えられる。

Question 4.6.
Let X be a connected space and let $f \in \mathrm{FPF}(X)$ satisfying that $f^3(x) = x$ for some $x \in X$. Does it hold that $\mathrm{col}(X, f) \geq 4$?

また簡単な具体例を挙げておく。

Example 4.7.
Let $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ be a discrete space, let us define $s_p : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ by $s_p(i) \equiv i + 1 \pmod p$, let $\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$ be the join of $\mathbb{Z}_p$ and $\mathbb{Z}_q$, and, let $s_{p,q} = s_p * s_q : \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q \to \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$. Then $\mathrm{col}(\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_q, s_{3,q}) = 4$.

5. Case 4 : 1-dimensional connected spaces

定理3.3 と注意4.1 から以下の問題が考えられる。

Question 5.1 (Akaike-Chinen-Tomoyasu[5]).
Let X be a 1-dimensional connected space and $f \in \mathrm{FPF}(X) \cap \mathcal{H}(X)$. Which is true, $\mathrm{col}(X, f) = 3$ or $\mathrm{col}(X, f) = 4$?

1次元空間の代表といえばグラフだが，定理3.3はグラフ写像の coloring number は4以下ということを示している。よく知られている四色問題との関連があるのではないかと予想されるが，これらのことからグラフ写像の coloring number を詳しく調べることは意味があると思われる。よって以下のような問題が考えられる。

Question 5.2 (Akaike-Chinen-Tomoyasu[5]).
Let X *be a finite connected graph and* $f \in \mathrm{FPF}(X) \cap \mathcal{H}(X)$. *Which is true,* $\mathrm{col}(X, f) = 3$ *or* $\mathrm{col}(X, f) = 4$*?*

まず，最初に表記を決める。

Notation 5.3.
Let $x \in X$ and $f : X \to X$ a map. Write $\mathrm{orb}(x, f) = \{f^n(x) : n \geq 0\}$, $\mathrm{P}(f) = \{x \in X : f^n(x) = x \text{ for some } n \in \mathbb{N}\}$, and, $\mathrm{Per}(f) = \{|\mathrm{orb}(x, f)| : x \in \mathrm{P}(f)\}$. Let $A \subset \mathbb{N}$. Write the greatest common divisor of A by $\gcd(A)$.

各分岐点の周期軌道を $\gcd(\mathrm{Per}(f))$ の単位に分割して色を塗り，その分岐点の色を全体に拡張することにより，以下の定理が得られる。

Theorem 5.4 (Akaike-Chinen-Tomoyasu[5]).
Let X *be a connected finite graph and* $f \in \mathrm{FPF}(X) \cap \mathcal{H}(X)$ *with* $\mathrm{Per}(f) \neq \emptyset$. *If* $\gcd(\mathrm{Per}(f)) \neq 1, 3$, *then*

$$\mathrm{col}(X, f) = 3.$$

上述の定理を使って簡単な例を挙げる。

Example 5.5.
Recall $s = s_p * s_q : \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q \to \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$ as in Example 4.7. If $\gcd(p, q) \neq 1, 3$, then $\mathrm{col}(\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q, s) = 3$. In particular, $\mathrm{col}(\mathbb{Z}_{2^k p} * \mathbb{Z}_{2^k q}, s) = \mathrm{col}(\mathbb{Z}_{5^k p} * \mathbb{Z}_{5^k q}, s) = \cdots = 3$ for all $k \in \mathbb{N}$.

不動点を持たない同相写像 $f : \mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_4$ は $\mathrm{Per}(f) \subset \{2, 4, 8\}$ を満たすことを示せれば，上述の定理を使って以下の系が得られる。

Corollary 5.6 (Akaike-Chinen-Tomoyasu[5]).

$$\mathrm{col}(\mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_4, f) = 3 \text{ for any } f \in \mathrm{FH}_{4,4},$$

where let $\mathrm{FH}_{p,q} = \mathrm{FPF}(\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q) \cap \mathcal{H}(\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q)$.

6. Main results

本稿の主定理を述べる。

Theorem 6.1.
Let $f \in \mathrm{FPF}(X) \cap \mathcal{H}(X)$ *satisfying either that*
(1) X *is a connected finite graph, or that*
(2) X *is a connected infinite graph and* $\mathrm{Per}(f) \neq \emptyset$.
Then $\gcd(\mathrm{Per}(f)) \in \{1,3\}$ *if and only if* $\mathrm{col}(X,f) = 4$.

上述の定理から，連結有限グラフの同相写像の coloring number に関して，すなわち問題 5.2 の完全解答を得た。つまり，連結有限グラフに関しては

$$\gcd(\mathrm{Per}(f)) \in \{1,3\} \text{ if and only if } \mathrm{col}(X,f) = 4$$

が成立する。
上述の (1) の証明は，定理 5.5 より，$\gcd(\mathrm{Per}(f)) \in \{1,3\}$ ならば三色に塗れないことを証明すればよい。そのために，周期軌道が三色に塗れたときその周期軌道の保存量を定義し，矛盾を導きだす。証明に関しては [10] をみてほしい。
次の結果は問題 4.6 のグラフに関しての肯定的な答えとなる。

Corollary 6.2.
Let X *be a connected graph and* $f \in \mathrm{FPF}(X) \cap \mathcal{H}(X)$. *If* $f^3(x) = x$ *for some* $x \in X$, *then* $\mathrm{col}(X,f) = 4$.

次の結果は，サークルに関して完全に coloring number を決定した。

Corollary 6.3.
Let $f \in \mathrm{FPF}(\mathbb{S}^1) \cap \mathcal{H}(\mathbb{S}^1)$. *Then,* $f^3(x) = x$ *for some* $x \in X$ *if and only if* $\mathrm{col}(\mathbb{S}^1, f) = 4$.

グラフの中の分岐点の配置によっては写像ではなく空間によって coloring number が決定されることを示している。

Corollary 6.4.
Let $A_0 = \{(2,4),(4,4)\}$, $A_1 = \{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : p,q \geq 2$ *and* $\gcd(p,q) \in \{1,3\}\}$, *and,* $A_2 = \{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : p,q \geq 2$ *and* $(p,q) \notin A_0 \cup A_1\}$. *Then,*
(1) $(p,q) \in A_0$ *if and only if* $\{\mathrm{col}(\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q, f) : f \in \mathrm{FH}_{p,q}\} = \{3\}$.
(2) $(p,q) \in A_1$ *if and only if* $\{\mathrm{col}(\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q, f) : f \in \mathrm{FH}_{p,q}\} = \{4\}$.
(3) $(p,q) \in A_2$ *if and only if* $\{\mathrm{col}(\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q, f) : f \in \mathrm{FH}_{p,q}\} = \{3,4\}$.

Notation 6.5.
Let X be a finite graph and $x \in X$. There exist a connected neighborhood U_x of x in X such that for every connected neighborhood V of x in U_x, the number of the components of $U_x \setminus \{x\}$ is equal to the number of the components of $V \setminus \{x\}$. Denote the number of the components of $U_x \setminus \{x\}$ by $\mathrm{Ord}(x,X)$, $b_k(X) = |\{x \in X : \mathrm{Ord}(x,X) = k\}|$, and, $b(X) = |\{b_k(X) : k \neq 2\}| \setminus \{0\}$.

次の結果は，グラフの頂点の分岐の数の総数に関して coloring number を決定されることを示した。

Corollary 6.6.
Let X be a connected finite graph. If $\gcd(b(X)) \in \{1,3\}$*, then* $\mathrm{col}(X,f) = 4$ *for each* $f \in \mathrm{FPF}(X) \cap \mathcal{H}(X)$.

定理6.1より，グラフ写像で残っているのは無限グラフで写像が周期点を持たないもののcoloring numberを決定することである。

Question 6.7. *Let X be a connected infinite graph and* $f \in \mathrm{FPF}(X) \cap \mathcal{H}(X)$ *with* $\mathrm{Per}(f) = \emptyset$*. Does it hold that* $\mathrm{col}(X,f) = 3$*?*

もっと一般的に1次元連続体のcoloring numberに関して以下の問題が考えられる。

Question 6.8. *Let X be a 1-dimensional continuum and* $f \in \mathrm{FPF}(X) \cap \mathcal{H}(X)$.

(1) *If* $3 \in \mathrm{Per}(f)$*, does it hold that* $\mathrm{col}(X,f) = 4$*?*
(2) *If* $\mathrm{Per}(f) = \emptyset$*, does it hold that* $\mathrm{col}(X,f) = 3$*?*

複雑な連続体のcoloring numberに関しては空間によって決定されるのではないかと予想される。

Question 6.9. *Let X be a 1-dimensional (hereditary) indecomposable continuum. Does there exists* $k(X) \in \{3,4\}$ *such that* $\mathrm{col}(X,f) = k(X)$ *for each* $f : X \to X$ *a fixed-point free homeomorphism from X into itself?*

References

[1] J. M. Aarts and R . J. Fokkink, *An addition theorem for the color number*, Proc. AMS. 129 (2001) no. 9, 2803–2807.
[2] J. M. Aarts, R . J. Fokkink and H. Vermeer, *Variations on a theorem of Lusternik and Schnirelmann*, Topology 35 (1996) no. 4, 1051–1056.
[3] J. M. Aarts, R . J. Fokkink and H. Vermeer, *Coloring maps of period three*, Pacific J. Math. 202 (2002) no. 2, 257–266.
[4] Y. Akaike, N. Chinen and K. Tomoyasu, *Colorings of fixed-point free homeomorphisms on finite connected graphs*, 数理解析研究所講究録 1634, (2009) , 13–19.
[5] Y. Akaike, N. Chinen and K. Tomoyasu, *Colorings of periodic homeomorphisms*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., 57 (2009), 63–74.
[6] J. Auslander and Y. Katznelson, *Continuous maps of the circle without periodic points*, Israel J. Math. 32 (1979) no. 4, 375–381.
[7] L. S. Block and W. A. Coppel, *Dynamics in one dimension*, Lecture Notes in Mathematics, 1513. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
[8] N. G. de Bruijn and P. Erdös, *A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations*, ndagationes Math. 13 (1951) 369–373.
[9] R. Z. Buzyakova, *Fixed-point free maps on the reals and more*, Topology Appl. 156 (2008), no. 2, 465–472.
[10] N. Chinen, *The colorings of homeomorphisms on connected graphs*, preprint.
[11] M. A. van Hartskamp and J. Vermeer, *On colorings of maps*, Topology Appl. 73 (1996) no. 2, 181–190.

[12] M. Katětov, *A theorem on mappings*, Comment. Math. Univ. Carolinae 8 (1967) 431–433.
[13] A. Krawczyk and J. Steprnās, *Continuous colourings of closed graphs*, Topology Appl. 51 (1993) no. 1, 13–26.
[14] J. van Mill, *Easier proofs of coloring theorems*, Topology Appl. 97 (1999) no. 1-2, 155–163.

HIROSHIMA INSTITUTE OF TECHNOLOGY 2-1-1 MIYAKE, SAEKI-KU, HIROSHIMA 731-5193, JAPAN
E-mail address: naochin@cc.it-hiroshima.ac.jp