

縮小写像の離散不動点定理とその応用

九州大学・大学院数理学研究院 川崎英文 (Hidefumi Kawasaki)
Faculty of Mathematics, Kyushu University

1 はじめに

Brouwer の不動点定理や角谷の不動点定理は Nash 均衡の存在を示す際に極めて強力である。これらの不動点定理が連続変数の世界の定理であることから、離散不動点定理を用いれば離散的な（純戦略）Nash 均衡の存在を保証できると期待できる。

離散不動点定理には次の 3 タイプがあるが、

1. 縮小写像の不動点定理 Robert(86), Shih-Dong(05), Richard(08)
2. Brouwer の定理を利用するもの 飯村 (03), Yang(04), 飯村-室田-田村 (05)
3. 単調写像の不動点定理 Tarski(55), Topkis(79), 佐藤-川崎 (09).

本発表では縮小写像の離散不動点定理を紹介し、そのゲーム論的意味を述べる。さらに、Brouwer の不動点定理に基づく離散不動点定理にも触れる。

2 ブール代数上の離散不動点定理

本節では Robert[3] による古典的な結果を紹介する。

まず、ブール代数 $\{0, 1\}$ の順序と計算規則は以下の通りである。

$$\begin{aligned} 0 + 0 = 0, 1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1, \\ 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1, 0 \leq 0 \leq 1 \leq 1, \bar{1} = 0, \bar{0} = 1. \end{aligned}$$

$x, y \in \{0, 1\}^n$ と $\lambda \in \{0, 1\}$ に対して、 $x + y$ と λx を成分ごとの和と積で定義する。ブール代数 $\{0, 1\}$ 上の行列をブール行列とよぶ。ただし、行列の和や積は通常の数値計算規則と同じで、それらの成分の和や積はブール代数に従うものとする。また、固有値 ($\in \{0, 1\}$) や固有ベクトルも通常と同様に定義する。ブール行列 B の最大固有値をスペクトル半径とよび $\rho(B)$ と書く。

補題 1 ブール行列が $A \leq B$ ならば $\rho(A) \leq \rho(B)$ 。

定理 1 ブール行列 B に関して、以下の条件は互いに同値である。

- (1) $\rho(B) = 0$.
- (2) どの主小行列も零行をもつ。
- (3) 置換行列 $\exists P$ s.t. $P^T B P$ は強下三角行列。
- (4) $\exists k \leq n$ s.t. $B^k = 0$.

写像 $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ は、 $\rho(B) = 0$ なるブール行列が存在して不等式 (1) を満たすとき、縮小写像とよばれる。

$$d(f(x), f(y)) \leq Bd(x, y) \quad \forall x, y \in \{0, 1\}^n \quad (1)$$

ただし、 $d(x, y) := (|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|)$ 。また、 n 変数 n 次元ベクトル値関数 $f = (f_1, \dots, f_n)$ に対して、関係行列 $B(f) := (b_{ij})$ を次で定義する。

$$b_{ij} := \begin{cases} 0, & f_i \text{ は } x_j \text{ に依存しない.} \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

補題 2 写像 $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ が縮小写像であるための必要十分条件は $\rho(B(f)) = 0$ である。

定理 2 縮小写像 $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ は唯一の不動点 a をもつ。また、 $\exists k \leq n$ s.t. $f^k(x) \equiv a$ 。

3 Shih-Dong の離散不動点定理

Robert の不動点定理は、「縮小写像」という大域的な性質から「唯一の不動点の存在」という大域的な性質が導かれることを示したものである。それに対して、Shih-Dong(05) は写像の微分という局所的な情報から、「唯一の不動点の存在」という大域的な性質を導いた。本節ではそれを紹介する。

$x \in \{0, 1\}^n$ に対して $\bar{x}^i := (x_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n)$ として、写像 $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ の離散微分 $f'(x) := (f'_{ij}(x))$ を次式で定義する。

$$f'_{ij}(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } f_i(x) = f_i(\bar{x}^j) \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定理 3 (Shih-Dong の不動点定理) $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ が任意の $x \in \{0, 1\}^n$ で $\rho(f'(x)) = 0$ を満たすならば、唯一の不動点をもつ。

この定理は局所的な条件 $\rho(f'(x)) = 0$ が「唯一の不動点をもつ」という大域的な結論を導くという意味で深い定理である。事実、Shih-Dong は彼らの不動点定理を Jacobian 予想の組合せ版と主張している。

4 整数区間上の離散不動点定理

Shih-Dong の結果をゲーム理論に適用しようとするとき、ひとつの問題に出会う。ブール代数 $\{0, 1\}^n$ では n 人のプレイヤーのそれぞれが 2 つの選択肢を持つ場合にしか対応できな

い。これを克服するためには、 $\{0, 1\}$ を整数区間に拡張する必要がある。Richard(08)はその問題を解決した。

X_i ($i = 1, \dots, n$) を整数の有限区間で $|X_i| \geq 2$ なるものとし、 $X := X_1 \times \dots \times X_n$ とおく。 $x + v \in X$ なる $v \in \{\pm 1\}^n$ に対して離散微分 $f'(x, v) := (f_{ij}(x, v))_{1 \leq i, j \leq n}$ を $f_{ij}(x, v) = 0$ if $(f_i(x) - x_i - \frac{v_i}{2})(f_i(x + v_j e_j) - x_i - \frac{v_i}{2}) \geq 0$, $f_{ij}(x, v) = 1$ otherwise で定義する。特に、 $X = \{0, 1\}^n$ の場合は $x + v \in \{0, 1\}^n$ なる v は x に対して一意に定まり、 $f'(x, v) = f'(x)$ が成り立つ。

定理 4 (Richard-Shih-Dong の不動点定理) 写像 $f : X \rightarrow X$ が $x + v \in X$ なる任意の $x \in X, v \in \{\pm 1\}^n$ に対して $\rho(f'(x, v)) = 0$ を満たすならば、 f は唯一の不動点をもつ。

定理 4 は Richard [6] が X のサイズに関する帰納法により証明した。 $|X_i| = 2$ ($\forall i$) の場合が Shih-Dong の不動点定理であるから、Richard の証明は Shih-Dong の不動点定理を抛り所とする。この理由により、ここでは定理 4 を Richard-Shih-Dong の不動点定理とよぶ。

この定理は数学的には興味深い、 $\rho(f'(x, v))$ の計算はかなり面倒である。従って、定理 4 を不動点の計算に利用するのは難しい。ここでは簡単な代替物を与える。

定理 5 (川崎) $f = (f_1, \dots, f_n) : X \rightarrow X$ が番号を適当につけかえることにより任意の $i = 1, \dots, n$ について f_i が x_j ($j \geq i$) に依存しないならば、 f は唯一の不動点をもつ。

証明：関係行列と離散微分の間 $f'(x, v) \leq B(f)$ という関係があること。定理の仮定から $\rho(B(f)) = 0$ が導かれること。スペクトル半径の単調性 $\rho(f'(x, v)) \leq \rho(B(f))$ により、Richard-Shih-Dong の不動点定理が適用できる。

この定理を n 人非協力ゲームに適用すると次の結果が得られる。

定理 6 (川崎) 適当にプレイヤーの番号をつけかえて、どのプレイヤー i の最適応答もプレイヤー $i + 1, \dots, n$ の選択肢に依存せず一意ならば、唯一の純戦略 Nash 均衡が存在する。また、最適応答が複数個ある場合も純戦略 Nash 均衡は存在する。

証明：最適応答 f が一点集合の場合は、プレイヤーの番号を適当につけかえることにより、 $B(f)$ は強下三角行列になる。よって、定理 1 により $\rho(B(f)) = 0$ となる。故に、Richard-Shih-Dong の不動点定理により、 f は唯一の不動点を持ち、それが純戦略 Nash 均衡になる。また、最適応答が複数個ある場合は、そのうちの任意のひとつを選び上述の議論をすれば純戦略 Nash 均衡の存在が言える。ただし、選択の任意性があるため、一意性は言えない。

5 Brouwer の定理に基づく不動点定理

本節では、Brouwer の定理に基づく不動点定理の若干の拡張を与える。

\mathcal{C} を $X \subset \mathbb{R}^n$ の単体分割とする。どの単体の頂点も整数点であるような単体分割を整単体分割とよぶ。 $y \in \mathbb{R}^n$ に対して $N(y) = \{x \in \mathcal{Z}^n \mid \|x - y\|_\infty < 1\}$ を整近傍といい、 y を含む最小

の単体を $S(y)$ で表す. 集合 $X \subset \mathbb{Z}^n$ は $\text{co}X \cap \mathbb{Z}^n = X$ となるとき **hole-free** であるという. ただし, $\text{co}X$ は X の凸包を表す. hole-free な集合 X は 「 $y \in \text{co}X \Rightarrow y \in \text{co}(X \cap N(y))$ 」 を満たすとき **整凸** であるという.

飯村らの離散不動点定理は集合値写像に対するものであるが, 簡単のため, ここでは写像に制限したものを紹介する.

定理 7 (飯村, 室田, 田村 [2]) 有限整凸集合 $X \subset \mathbb{Z}^n$ から $\text{co}X$ への写像 f が, $\|x - x'\|_\infty \leq 1$ なる任意の $x, x' \in X$ と任意の i について

$$f_i(x) > x_i \Rightarrow f_i(x') \geq x'_i \tag{2}$$

を満たすならば, f は不動点をもつ.

条件 (2) は飯村 [1] が最初に与え, Yang[8] がそれより弱い条件 (3) を与えた.

$$(f(x) - x)^T (f(x') - x') \geq 0 \tag{3}$$

定理 7 において整凸性は $S(y)$ が単位立方体に含まれることを示すのに使われる. もし単位立方体にこだわらなければ, 整凸性や hole-free の仮定を取り除くことができる.

定理 8 $X \subset \mathbb{Z}^n$ を有限集合とする. \mathcal{G} を $\text{co}X$ の単体分割で, 各単体の頂点は X に属するとする. このとき, $f : X \rightarrow \text{co}X$ が任意の $S \in \mathcal{G}$ と任意の $x, x' \in S$ に対して (3) を満たすならば, f は不動点をもつ. ($\text{co}X$ がコンパクトで, $f : X \rightarrow \text{co}X$ が連続ならば, X は無限集合でもかまわない.)

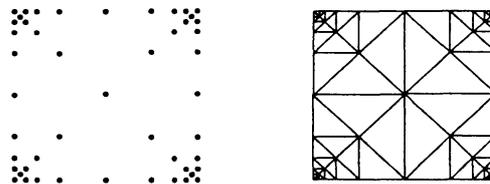


図 1: 無限集合 X と $\text{co}X$ の単体分割

証明: 単体内部の点は, 単体の頂点の凸結合として一意に表すことができる. 例えば, $a = \lambda_x x + \lambda_y y + \lambda_z z$ と凸結合で表される点 a に対して, $f(a) := \lambda_x f(x) + \lambda_y f(y) + \lambda_z f(z)$ と定義する (図 2). このとき, $f : \text{co}X \rightarrow \text{co}X$ は連続になる. この事実は, 凸結合の表現が一意であることから導かれる. そこで, Brouwer の不動点定理により, f は不動点 $a \in \text{co}X$ をもち,

$$\begin{aligned} 0 &= (f(a) - a)^T (f(a) - a) \\ &= \left\{ \sum_x \lambda_x (f(x) - x) \right\}^T \left\{ \sum_{x'} \lambda_{x'} (f(x') - x') \right\} \\ &= \sum_{x, x'} \lambda_x \lambda_{x'} (f(x) - x)^T (f(x') - x'). \end{aligned}$$

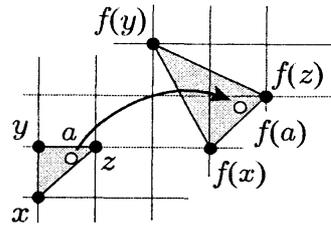


図 2: f の拡張方法

ただし, 和は a を含む最小の単体の頂点についてとるものとする. このとき, $\lambda_x \lambda_{x'} > 0$ なる任意の x, x' に対して, $(f(x) - x)^T (f(x') - x') = 0$. さらに, ある頂点 x で $\lambda_x > 0$ なので, $x' = x$ は f の不動点になる.

参考文献

- [1] T. IIMURA, A discrete fixed point theorem and its applications, *J. Math. Econom.*, **39** (2003), 725–742.
- [2] T. IIMURA, K. MUROTA AND A. TAMURA, Discrete fixed point theorem reconsidered, *J. Math. Econom.*, **41** (2005), 1030–1036.
- [3] F. ROBERT, *Discrete Iterations: A Metric Study*, Springer, Berlin, (1986).
- [4] J. SATO AND H. KAWASAKI, Discrete fixed point theorems and their application to Nash equilibrium, *Taiwanese J. Math.*, **13** (2009), 431–440.
- [5] M.-H. SHIH AND J.-L. DONG, A combinatorial analogue of the Jacobian problem in automata networks, *Advances in Appl. Math.*, **34** (2005), 30–46.
- [6] A. RICHARD, An extension of the Shih-Dong’s combinatorial fixed point theorem, *Advances in Appl. Math.*, **41** (2008), 620–627.
- [7] A. TARSKI, A lattice-theoretical fixpont theorem and its applications, *Pacific J. Math.*, **5** (1955), 285–309.
- [8] Z. YANG, Discrete fixed point analysis and its applications, FBA Working Paper No. 210, Yokohama National University, 2004.