

複数ユニットシステムの点検しきい値  
(2 ユニット直列システムを例に)

鳥取大学大学院・工学研究科社会基盤工学専攻

高田 正彦 (Masahiko Takada)

佐藤 毅 (Takashi Satow)

河合 一 (Hajime Kawai)

Department of Management of Social Systems and Civil Engineering,  
Graduate School of Engineering,  
Tottori University

## 1 はじめに

コンピュータシステムに代表される社会基盤を支えるシステムは、大規模かつ複雑化している。システム運用者はシステム要求性能を維持し、安全に運用しなければならない。そこで点検を行い、システムを維持管理していくことが必要不可欠となる。点検の必要性としては、システムの状態把握、点検結果に基づいた保全計画の策定、および保全実施などがあげられる。従来の点検問題に関する研究では、*Christer* と *Wang* の論文 (文献 [1]) で用いられている、点検時にシステム状態を完全に把握できると仮定する研究が多い。しかし、人為的なミスや点検機械のエラーなどにより点検結果が真の状態を表していない、つまり誤る可能性がまったくない点検は考えにくい。点検結果が正確でない点検を不完全点検と呼ぶ。大西と河合の論文 (文献 [2]) は、点検結果が正確ではなく点検時のシステム状態と点検結果に確率相関性を仮定し、無限計画期間における単位時間当たりの総期待費用を最小にする点検・取替方策を提案している。不完全点検下では、誤った判断を犯す可能性があることから、効率的な保全計画の策定が困難となる可能性がある。

本稿では、点検結果に誤りの可能性が存在する不完全点検を対象とし、意思決定に無影響な点検を実施しない点検モデルを提案する。点検ではシステム状態を正常、もしくは故障の 2 状態を結果として出力する。点検は不完全であり、2 種類の誤りを犯す可能性がある。1 つは正常状態のシステムを故障と判断する誤り。他方は故障状態のシステムを正常と判断する誤りである。点検により得られた情報は正確ではないため、点検結果よりシステムの真の状態を推定する 2 つの予測値を用いる。1 つは点検で故障と判断した条件下において、システムが故障状態である確率を表す故障予測値、他方は点検で正常と判断した条件下において、システムが正常状態である確率を表す正常予測値である。2 つの予測値を用い、システム取替を行う取替しきい値を任意に設定し、取替しきい値との大小関係より、点検を行う故障確率の範囲を設定する。この故障確率の上下限値を点検しきい値とよぶ。点検しきい値を用いることにより、システム取替の意思決定に影響を与えない点検を削除し、有意な点検のみ実施する。導出した点検しきい値を定期点検モデルに適用し、無限計画期間における単位時間当たりの総期待保全費用の導出について一部記述する。最後に点検しきい値の数値例を与える。

## 2 点検しきい値

2 ユニット直列システムにおいて、確率変数  $X_j(t)$  を時刻  $\forall t(> 0)$  におけるユニット  $j(= 1, 2)$  の状態を表す 2 値確率変数として以下に定義する。

$$X_j(t) = \begin{cases} 0: \text{時刻 } t \text{ において正常状態,} \\ 1: \text{時刻 } t \text{ において故障状態.} \end{cases} \quad (j = 1, 2) \quad (1)$$

時刻  $\forall t(> 0)$  におけるユニット  $j$  の故障分布関数を  $F_j(t)$  とし以下に定義する。

$$P\{X_j(t) = 1\} = F_j(t). \quad (j = 1, 2) \quad (2)$$

各ユニットはそれぞれ点検され、点検結果は独立である。ユニット  $j$  の点検結果を示す 2 値確率変数を以下に定義する。

$$Y_j = \begin{cases} 0: \text{点検結果が正常,} \\ 1: \text{点検結果が故障.} \end{cases} \quad (j = 1, 2) \quad (3)$$

点検結果は、システム状態にのみ依存すると仮定する。つまり、ユニット  $j$  が故障であるという条件下において、点検結果が故障という確率である感度を以下に定義する。

$$p_j = Pr\{Y_j = 1 | X_j(t) = 1\}. \quad (j = 1, 2) \quad (4)$$

ユニット  $j$  が正常であるという条件下において、点検結果が正常という確率である特異度を以下に定義する。

$$q_j = Pr\{Y_j = 0 | X_j(t) = 0\}. \quad (j = 1, 2) \quad (5)$$

これより予測値を導出する。故障予測値は、点検結果が故障である条件下において、システム故障である確率であり、故障予測値を  $P\{X_j(t) = 1 | Y_j = 1\}$  と定義する。時刻  $\forall t(> 0)$  における故障予測値は次式として求まる。

$$FPV(t) = \frac{(p_1 + \bar{p}_1 p_2) F_1(t) F_2(t) + (1 - \bar{p}_1 q_2) F_1(t) \bar{F}_2(t) + (1 - q_1 \bar{p}_2) \bar{F}_1(t) F_2(t)}{1 - \prod_{j=1}^2 NS_j(t)}. \quad (6)$$

ここで  $NS_j(t)$  は時刻  $\forall t(> 0)$  においてユニット  $j$  の点検結果が正常である確率である。

$$NS_j(t) \equiv q_j \bar{F}_j(t) + (1 - p_j) F_j(t). \quad (j = 1, 2) \quad (7)$$

正常予測値は、点検結果が正常である条件下において、システムが正常である確率となり、正常予測値を  $P\{X_j(t) = 0 | Y_j = 0\}$  と定義する、時刻  $\forall t(> 0)$  における正常予測値は次式として求まる。

$$NPV(t) = \frac{p_1 q_2 \bar{F}_1(t) \bar{F}_2(t)}{\prod_{j=1}^2 NS_j(t)}. \quad (8)$$

点検しきい値とは、点検結果によりシステム取替の意思決定に変更が生じる故障確率の上下限として定義する。システム取替を行うか否かを定める値として取替えしきい値  $R(0 < R < 1)$  を設定する。時刻  $\forall t(> 0)$  において点検で故障と判断されたとしても点検は不完全であり、システムの真の状態を表しているとは限らない。そこで、時刻  $\forall t(> 0)$  において事後確率である  $FPV(t)$  を求め、取替しきい値と比較し  $FPV(t)$  が  $R$  以上であればシステム取替を点検結果通り実施する。つまり、 $FPV(t) = R$  となる時刻  $t$  におけるシステム故障確率を点検が有効となる下限、いわば点検下限値 ( $LIT$ : Lower Inspection Threshold) として定義する。これより、2 ユニット直列システムの点検下限値は以下の式で与えられる。

$$LIT = \frac{\bar{R}(\bar{q}_1 \bar{F}_1(t) + \bar{q}_2 \bar{F}_2(t) - p_2 s_1 - p_1(s_2 + p_2 k))}{R + \bar{q}_1 + \bar{q}_2 - 2Rq_2 + Rq_1 q_2} \cdot \frac{R + \bar{R}p_2 \bar{q}_1 + \bar{R}q_1 + q_2 - R\bar{q}_1 q_2 + \bar{R}p_1 d_2 - 2}{R + \bar{R}p_2 \bar{q}_1 + \bar{R}q_1 + q_2 - R\bar{q}_1 q_2 + \bar{R}p_1 d_2 - 2} \quad (9)$$

ここで以下を定義する。

$$\bar{p}_j = 1 - p_j, \quad (j = 1, 2) \quad (10)$$

$$\bar{q}_j = 1 - q_j, \quad (j = 1, 2) \quad (11)$$

$$\bar{F}_j(t) = 1 - F_j(t), \quad (j = 1, 2) \quad (12)$$

$$k = F_1(t) + F_2(t), \quad (13)$$

$$s_j = \bar{F}_i(t) - 1 - \bar{q}_j F_j(t), \quad (j = 1, 2, i = 1, 2 (\neq j)) \quad (14)$$

$$d_j = 1 - p_j - q_j. \quad (j = 1, 2) \quad (15)$$

次に点検しきい値の上限を求める。時刻  $\forall t(> 0)$  において点検で正常と判断されたとしても点検は不完全であり、システムの真の状態を表しているとは限らない。そこで、時刻  $\forall t(> 0)$  において、事後確率である  $NPV(t)$  を求め、正常状態ではない確率が取替しきい値と比較し、 $R$  以下であればシステム取替は点検結果通り実施しない。つまり、 $1 - NPV(t) = R$  となる時刻  $t$  におけるシステム故障確率を、点検が有効となる上限、いわば点検上限値 ( $UIT$ : Upper Inspection Threshold) とする。これより、2 ユニット直列システムの点検上限値は以下の式で与えられる。

$$UIT_s(t) = \frac{\bar{R}(q_1 + \bar{q}_1 \bar{F}_1(t) + \bar{q}_1 \bar{F}_2(t) - p_2 s_1 - p_1(s_2 - p_2 k)) + q_2 + Rq_1 q_2 - 2R}{\bar{R}\bar{p}_2 d_1 + (\bar{R}\bar{p}_2 + Rq_1)q_2} \quad (16)$$

### 3 点検しきい値を用いた定期点検モデル

#### 3.1 点検可能域

点検しきい値を用いた定期点検モデルを提案する。正常状態を故障状態と判断し、取替えを実施した場合、システムが残りの寿命をまっとうできなかったと考え、取替えを実施した時点から本来の寿命までの期間に損失が発生する。同様に、故障状態を正常状態と判断し取替えを実施しない場合、システム故障が発生した時点から取替えを実施するまでの期間に損失が発生す

る。点検，取替えに要する時間は無視できるものとし，取替えによってのみ新品同様へと回復する。また，システム状態は点検によってのみ知ることができるものとする。点検は点検しきい値の上下限の範囲でのみ実施する。ここでシステム故障分布を  $FS(t)$  と定義する。システム故障分布  $FS(t)$  は  $t$  の単調増加関数であることより，点検実施が有効となる時刻の下限 ( $TL$ ) および上限 ( $TU$ ) は唯一存在し，次式として求まる。

$$TL = \min\{t; FS(t) \leq LIT\}, \quad (17)$$

$$TU = \max\{t; FS(t) \geq UIT\}. \quad (18)$$

点検可能域  $[TL, TU]$  (以後点検領域) においては  $n$  等分された分点においてシステム点検を行う。よって点検間隔は以下の式となる。

$$T(n) = \frac{TU - TL}{n}. \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (19)$$

再生報酬定理 (文献 [3]) を用いることにより，無限計画期間における単位時間当たりの総期待保全費用は次式として求まる。

$$C(n) = \frac{c_l V(n) + c_i N(n) + c_r}{L(n)}. \quad (20)$$

ここで， $c_l$  は単位期間当たりの損失費用， $c_i$  は一回あたりの点検費用， $c_r$  は取替費用とする。 $V(n)$  は1サイクル当たりの期待損失期間， $N(n)$  は1サイクル当たりの期待点検回数， $L(n)$  は期待再生期間とする。ここでの1サイクルとは，システム運用開始からシステム取替を行うまでの期間である。点検によってどちらか一方のユニットが故障と判断されるとシステムは故障となり，システム取替を実施する。不完全点検下においてシステム取替の実施には，正常状態のシステムを誤って故障と判断する場合，故障状態のシステムを誤って正常と判断したのち，点検によって故障と判断されシステム取替を行う場合，すべての点検結果が正常で時刻  $TU + \alpha$  でシステム取替が実施される場合が存在する。ここで  $\alpha (> 0)$  とは， $TU$  後無条件で取替を実施するまでの時間である。次に，正常状態のシステムを故障と判断し，システム取替が実施される場合について定式化を行う。

### 3.2 期待損失期間

点検によって先にユニット  $k$  が正常状態を故障状態と判断され，システム取替が行われる。しかし実際のシステムは正常であり，真の故障が先行してユニット  $k$  により  $TU$  以前に起こる場合，期待損失期間は次式で表される。

$$V_{1-1}(n, k) = \sum_{j=0}^{n-1} q_k^j (1 - q_k) q_k^{j+1} \int_{TL+jT(n)}^{TU} [t - \{TL + jT(n)\}] \bar{F}_k(t) dF_k(t). \quad (21)$$

点検によって先にユニット  $k$  が正常状態を故障状態と判断され，システム取替が行われる。しかし実際のシステムは正常であり，真の故障が先行してユニット  $k$  により  $TU$  以後に起こる場

合、期待損失期間は次式で表される。

$$V_{1-2}(n, k) = \sum_{j=0}^n q_k^j (1 - q_k) q_k^{j+1} \int_{TU}^{\infty} [TU + \alpha - \{TL + jT(n)\}] \bar{F}_k(t) dF_k(t). \quad (22)$$

点検によって先にユニット  $k$  が正常状態を故障状態と判断され、システム取替が行われる。しかし実際のシステムは正常であり、真の故障が先行して他ユニットにより  $TU$  以前に起こる場合、期待損失期間は次式で表される。

$$V_{1-3}(n, k) = \sum_{j=0}^{n-1} q_k^j (1 - q_k) q_k^{j+1} \int_{TL+jT(n)}^{TU} [t - \{TL + jT(n)\}] \bar{F}_k(t) dF_k(t). \quad (23)$$

点検によって先にユニット  $k$  が正常状態を故障状態と判断され、システム取替が行われる。しかし実際のシステムは正常であり、真の故障が先行して他ユニットにより  $TU$  以後に起こる場合、期待損失期間は次式で表される。

$$V_{1-4}(n, k) = \sum_{j=0}^n q_k^j (1 - q_k) q_k^{j+1} \int_{TU}^{\infty} [TU + \alpha - \{TL + jT(n)\}] \bar{F}_k(t) dF_k(t). \quad (24)$$

以上より、正常状態のシステムを故障と判断する場合の期待損失期間は以下の式となる。

$$V_1(n) = \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^4 V_{1-j}(n, k). \quad (25)$$

故障状態のシステムを正常と判断したのち、点検によって故障と判断されシステム取替が行われる場合も同様に求め  $V_2(n)$ 、全ての点検結果が正常で  $TU + \alpha$  でシステム取替が行われる場合も同様に求め  $V_3(n)$  とする。以上より、1 サイクル当たりの期待損失期間は以下の式となる。

$$V(n) = \sum_{j=1}^3 V_j(n). \quad (26)$$

### 3.3 期待点検回数

点検によって先にユニット  $k$  が正常状態を故障状態と判断され、システム取替が行われる。しかし実際のシステムは正常であり、真の故障が先行してユニット  $k$  により  $TU$  以前に起こる場合、期待点検回数は次式で表される。

$$N_{1-1}(n, k) = \sum_{j=0}^{n-1} q_k^j (1 - q_k) q_k^{j+1} (j + 1) \int_{TL+jT(n)}^{TU} \bar{F}_k(t) dF_k(t). \quad (27)$$

点検によって先にユニット  $k$  が正常状態を故障状態と判断され、システム取替が行われる。しかし実際のシステムは正常であり、真の故障が先行してユニット  $k$  により  $TU$  以後に起こる場合、期待点検回数は次式で表される。

$$N_{1-2}(n, k) = \sum_{j=0}^n q_k^j (1 - q_k) q_k^{j+1} (j + 1) \int_{TU}^{\infty} \bar{F}_k(t) dF_k(t). \quad (28)$$

点検によって先にユニット  $k$  が正常状態を故障状態と判断され、システム取替が行われる。しかし実際のシステムは正常であり、真の故障が先行して他ユニットにより  $TU$  以前に起こる場合、期待点検回数は次式で表される。

$$N_{1-3}(n, k) = \sum_{j=0}^{n-1} q_k^j (1 - q_k) q_k^{j+1} (j+1) \int_{TL+jT(n)}^{TU} \bar{F}_k(t) dF_k(t). \quad (29)$$

点検によって先にユニット  $k$  が正常状態を故障状態と判断され、システム取替が行われる。しかし実際のシステムは正常であり、真の故障が先行して他ユニットにより  $TU$  以後に起こる場合、期待点検回数は次式で表される。

$$N_{1-4}(n, k) = \sum_{j=0}^n q_k^j (1 - q_k) q_k^{j+1} (j+1) \int_{TU}^{\infty} \bar{F}_k(t) dF_k(t). \quad (30)$$

以上より、正常状態のシステムを故障と判断する場合の期待点検回数は以下の式となる。

$$N_1(n) = \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^4 N_{1-j}(n, k). \quad (31)$$

故障状態のシステムを正常と判断したのち、点検によって故障と判断されシステム取替が行われる場合も同様に求め  $V_2(n)$ 、全ての点検結果が正常で  $TU + \alpha$  でシステム取替が行われる場合も同様に求め  $V_3(n)$  とする。以上より、1 サイクル当たりの期待点検回数は以下の式となる。

$$N(n) = \sum_{j=1}^3 N_j(n). \quad (32)$$

### 3.4 期待再生期間

点検によって先にユニット  $k$  が正常状態を故障状態と判断され、システム取替が行われる。しかし実際のシステムは正常であり、真の故障が先行してユニット  $k$  により  $TU$  以前に起こる場合、期待再生期間は次式で表される。

$$L_{1-1}(n, k) = \sum_{j=0}^{n-1} q_k^j (1 - q_k) q_k^{j+1} \int_{TL+jT(n)}^{TU} [TL + jT(n)] \bar{F}_k(t) dF_k(t). \quad (33)$$

点検によって先にユニット  $k$  が正常状態を故障状態と判断され、システム取替が行われる。しかし実際のシステムは正常であり、真の故障が先行してユニット  $k$  により  $TU$  以後に起こる場合、期待再生期間は次式で表される。

$$L_{1-2}(n, k) = \sum_{j=0}^n q_k^j (1 - q_k) q_k^{j+1} \int_{TU}^{\infty} [TL + jT(n)] \bar{F}_k(t) dF_k(t). \quad (34)$$

点検によって先にユニット  $k$  が正常状態を故障状態と判断され、システム取替が行われる。しかし実際のシステムは正常であり、真の故障が先行して他ユニットにより  $TU$  以前に起こる場合、期待再生期間は次式で表される。

$$L_{1-3}(n, k) = \sum_{j=0}^{n-1} q_k^j (1 - q_k) q_k^{j+1} \int_{TL+jT(n)}^{TU} [TL + jT(n)] \bar{F}_k(t) dF_k(t). \quad (35)$$

点検によって先にユニット  $k$  が正常状態を故障状態と判断され、システム取替が行われる。しかし実際のシステムは正常であり、真の故障が先行して他ユニットにより  $TU$  以後に起こる場合、期待再生期間は次式で表される。

$$L_{1-4}(n, k) = \sum_{j=0}^n q_k^j (1 - q_k) q_k^{j+1} \int_{TU}^{\infty} [TL + jT(n)] \bar{F}_k(t) dF_k(t). \quad (36)$$

以上より、正常状態のシステムを故障と判断する場合、期待再生期間は以下の式となる。

$$L_1(n) = \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^4 L_{1-j}(n, k). \quad (37)$$

故障状態のシステムを正常と判断したのち、点検によって故障と判断されシステム取替が行われる場合も同様に求め  $V_2(n)$ 、全ての点検結果が正常で  $TU + \alpha$  でシステム取替が行われる場合も同様に求め  $V_3(n)$  とする。以上より、1 サイクル当たりの期待再生期間は以下の式となる。

$$L(n) = \sum_{j=1}^3 L_j(n). \quad (38)$$

以上より、単位時間当たりの総期待保全費用は式 (26), (32), (38) を式 (20) に代入することにより求まる。

#### 4 数値例とまとめ

ユニット  $j$  の故障分布は形状パラメータ  $m_j$ 、尺度パラメータ  $\eta_j$  をもつワイブル分布に従うと仮定する。つまり、

$$F_j(t) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t}{\eta_j} \right)^{m_j} \right]. \quad (j = 1, 2) \quad (39)$$

2つのユニットは同じ故障分布 ( $m_j = m, \eta_j = \eta$ ) をもち、点検精度も同じ ( $p_j = p, q_j = q$ ) であるとする。故障分布の形状パラメータを変化させたときの点検しきい値、または点検しきい値に達する時刻を示す。取替しきい値  $R=0.75$  とする。故障分布の尺度パラメータ  $\eta_j=1$  とする。初期故障期 ( $DFR$ ) の形状パラメータ  $m_j=0.9$ 、偶発故障期 ( $CFR$ ) の形状パラメータ  $m_j=1.0$ 、磨耗故障期 ( $IFR$ ) の形状パラメータ  $m_j=1.2$  とする。

表 1: 感度, 特異度の変化に伴う点検しきい値の時刻変化

ユニット $j$ ( $p_j, q_j$ )	DFR (下限, 上限)	CFR (下限, 上限)	IFR (下限, 上限)
0.85, 0.85	0.292, 2.037	0.330, 1.897	0.397, 1.705
0.9, 0.9	0.206, 2.526	0.241, 2.303	0.306, 2.004
0.95, 0.95	0.107, 3.384	0.134, 2.996	0.187, 2.495

表 2: 感度, 特異度の変化に伴う故障確率の上下限值

ユニット $j$ ( $p_j, q_j$ )	DFR (下限, 上限)	CFR (下限, 上限)	IFR (下限, 上限)
0.85, 0.85	0.483, 0.976	0.483, 0.976	0.483, 0.976
0.9, 0.9	0.383, 0.99	0.383, 0.99	0.383, 0.99
0.95, 0.95	0.234, 0.996	0.234, 0.996	0.234, 0.996

表 2 は, 表 1 の点検しきい値の時刻をシステム故障確率の時刻に代入し,  $LIT, UIT$  を示したものである. 表 2 より, 故障確率の上下限は故障分布の形状に依存しないことがわかる. 2 つの表より, 故障確率の上下限は故障分布の形状によって変化しないが, 点検しきい値の時刻には変化が見られる. つまり, 初期故障期は使い始めの時期は故障率が高いため早期の時期から点検が必要であり, 磨耗故障期は使うにつれて故障率が高くなるため初期故障より早い時期に点検を終えることになる. また, 感度・特異度が高くなると故障確率の範囲が広がることもわかる.

本研究では, 複数ユニットにおいて基本となる 2 ユニット直列システムにおける点検しきい値, および点検モデルの提案を行った.

## 参考文献

- [1] A.H. Christer and W. Wang, "A Simple Condition Monitoring Model for a Direct Monitoring Process", *European Journal of Operational Research*, vol.82, pp.258-269, 1995.
- [2] M. Ohnisi and H. Kawai, "An Optimal Inspection and Replacement Policy under Incomplete State Information", *European Journal of Operational Research*, vol.27, pp.117-128, 1986.
- [3] S.M. Ross, *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, San Francisco, 1991.