数理解析研究所講究録
第 1685 巻 2010 年 159-166

収縮射影法に関する最近の成果
Recent development in the shrinking projection methods

東京工業大学・大学院情報理工学研究科
木村泰紀 (Yasunori Kimura)

1 はじめに

非線形解析の研究対象となる非線形問題には, 非線形写像の不動点問題として定式化することができるものが多くあり, この問題は様々な側面から研究が進められている. とくにバナッハ空間上で定義された非拡大写像およびそれに類する写像の不動点問題は, その存在定理や近似定理等の研究が近年急速な発展を遂げている. 中でも, 不動点に収束する近似列の生成アルゴリズムについては多くの研究成果があり, その方法も多岐にわたっている.

本稿ではとくに写像族の共通不動点の近似法として, 2008 年に Takahashi-Takeuchi-Kubota によって強収束性が証明された次の方法を取り扱う.

定理 1.1 (Takahashi-Takeuchi-Kubota [13]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, $\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を C からそれ自身への非拡大写像の族とする. また, $\{S_n\}$ を C 上の非拡大写像列で $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n) \supset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F(T_\lambda) \neq \emptyset$ をみたすものとし, さらに $\{S_n\}$ は $\{T_\lambda\}$ に関する NST 条件 (I) をみたすものと仮定する. a を $0 < a < 1$ をみたす実数とし, $\{\alpha_n\}$ を $[0, a]$ の数列とする. 点 $x \in H$ に対し, 次の手順によって点列 $\{x_n\}$ を構成する: $x_1 \in C$, $C_1 = C$ とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
y_n &= \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) S_n x_n,\\
C_{n+1} &= \{z \in C_n : \|z - y_n\| \leq \|z - x_n\|\},\\
x_{n+1} &= P_{C_{n+1}} x
\end{aligned}$$

Key words and phrases. Relatively nonexpansive mapping, approximation, hybrid method, shrinking projection method, maximal monotone operator, resolvent, metric projection, generalized projection
2000 *Mathematics Subject Classification.* 47H09, 47J25

とする．このとき $\{x_n\}$ は $P_F x \in C$ へと強収束する．ただし P_K は閉凸集合 K への距離射影であり，$F=\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F(T_\lambda)$ である．

この近似法は収縮射影法と呼ばれ，その後多くの研究者によって同様の手法を用いた近似定理が証明されている．なお，本定理の仮定に現れる NST 条件 (I) とは次の条件である: C を E の空でない閉凸集合とし，$\{T_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ を C からそれ自身への relatively nonexpansive 写像の族とする．また，$\{S_n\}$ を C 上の relatively nonexpansive 写像列で $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n) \supset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F(T_\lambda) \neq \emptyset$ をみたすものとする．$\{S_n\}$ が $\{T_\lambda\}$ に関する NST 条件 (I) [9] をみたすとは，C の有界点列 $\{w_n\}$ で $\lim_{n\to\infty}\|w_n - S_n w_n\| = 0$ ものに対してつねに $\lim_{n\to\infty}\|w_n - T_\lambda w_n\| = 0$ がすべての $\lambda\in\Lambda$ に対して成り立つことをいう．

この定理に対して，Kimura-Takahashi [7] は集合列の Mosco 収束を用いる新しい証明法によってより一般的なバナッハ空間上の relatively nonexpansive 写像族の共通不動点近似法の結果を得た．また，最近の研究によってこの証明法は収縮射影法を用いた多くの定理の証明に適用可能であることが明らかになってきている．本稿では，この新しい証明法によって得られた収縮射影法に関する最近の主な成果を紹介する．

2 最近の成果

Takahashi-Takeuchi-Kubota による収縮射影法を用いた不動点近似列の強収束定理の証明は，Nakajo-Takahashi [10] によって証明されたいわゆるハイブリッド法による強収束定理の証明をもとにしている．これに対して Kimura-Takahashi [7] は集合列の Mosco 収束を用いる方法によって次の定理を証明した．

定理 2.1 (Kimura-Takahashi [7]). *E を回帰的で狭義凸なバナッハ空間とし，Kadec-Klee 条件とノルムの Fréchet 微分可能性を仮定する．C を E の閉凸集合で，$\{S_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ を C 上で定義された共通不動点をもつ relatively nonexpansive 写像の族とする．$\{\alpha_n\}$ を閉区間 $[0,1]$ の数列で $\liminf_{n\to\infty}\alpha_n < 1$ をみたすものとする．$x\in E$ を任意にとり，点列 $\{x_n\}$ を以下のように定義する．$x_1\in C$, $C_1 = C$ とし，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して*

$$\begin{aligned}
y_n(\lambda) &= J^*(\alpha_n J x_n + (1-\alpha_n) J S_\lambda x_n) \quad (\lambda\in\Lambda),\\
C_{n+1} &= \left\{ z\in C_n : \sup_{\lambda\in\Lambda} \phi(z, y_n(\lambda)) \le \phi(z, x_n) \right\},\\
x_{n+1} &= P_{C_{n+1}} x
\end{aligned}$$

とする．このとき，$\{x_n\}$ は $P_F x\in C$ に強収束する．ただし $F=\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F(S_\lambda)$ であり，

P_K は E の空でない閉凸集合 K への距離射影である.

ここで用いられた証明法には主に次のような利点がある.

(i) 空間に仮定する条件が従来のものに比べて緩和されている;

(ii) 係数列 $\{\alpha_n\}$ の条件が緩和されている;

(iii) 点列生成時に用いる射影を, 不動点を考える写像とは独立に取ることができる.

(i) については次節で詳しく述べる. (ii) の利点をうまく利用した結果として, 次の定理が挙げられる.

定理 2.2 (Kimura-Nakajo-Takahashi [6]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸部分集合とする. $T : C \to C$ を係数 $k > 0$ に関する quasi-pseudocontractive 型の Lipschitz 写像で, Lipschitz 係数を $L > 0$ とするとき

$$k < \frac{(1+2L)^2 + \sqrt{5+4L^2}}{2(1+L^2)}$$

をみたすと仮定する. また, 不動点集合 $F(T)$ は空でないと仮定する. $\{\alpha_n\}$ を閉区間 $[0,1]$ の稠密な数列とし, 点列 $\{x_n\}$ を以下のように定義する. $x_1 = x \in C$, $C_1 = C$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned}
y_n &= \alpha_n T x_n + (1-\alpha_n) x_n, \\
C_{n+1} &= \{z \in C_n : \\
&\qquad \|Ty_n - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 + \beta_n \|x_n - Tx_n\|^2 + \gamma_n \|x_n - Ty_n\|^2\}, \\
x_{n+1} &= P_{C_{n+1}} x,
\end{aligned}$$

とする. ただし, $n \in \mathbb{N}$ に対し $\beta_n = \alpha_n(kL^2\alpha_n^2 + (k+1)\alpha_n - 1)$, $\gamma_n = k(1-\alpha_n)$ である. このとき $F(T)$ は閉凸集合であり, $\{x_n\}$ は $P_{F(T)}x \in C$ に強収束する.

新しい証明法で $\{\alpha_n\}$ の条件が緩和されたことにより, この定理では $\{\alpha_n\}$ を係数 k および L に依存せずに決定することができる. 大まかにいって, 従来の方法では $\{\alpha_n\}$ の任意の部分列の極限 α_0 が不等式

$$\frac{k-1}{k} \le \alpha_0 < \frac{\sqrt{(k+1)^2 + 4kL^2} - (k+1)}{2kL^2}$$

をみたす必要があり, そのためには k や L の値にあわせて $\{\alpha_n\}$ を設定する必要があった. 一方, 緩和された条件のもとではそのような極限をもつ部分列が少なくとも一つ存在

するだけでよい．係数 k および L の仮定を用いると

$$[0,1]\cap\left[\frac{k-1}{k},\frac{\sqrt{(k+1)^2+4kL^2}-(k+1)}{2kL^2}\right[\neq\emptyset$$

が証明できるので，$\{\alpha_n\}$ は $[0,1]$ で稠密という条件だけでそのような部分列の存在が保証されるのである．

(iii) については，同じく Kimura-Takahashi [7] で示された次の結果を挙げる．

定理 2.3 (Kimura-Takahashi [7])**.** E, C を，$\{S_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$, $\{\alpha_n\}$ は定理 2.1 のものと同様とする．$x\in E$ を任意にとり，点列 $\{x_n\}$ を以下のように定義する．$x_1\in C$, $C_1=C$ とし，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} y_n(\lambda) &= J^*(\alpha_n Jx_n+(1-\alpha_n)JS_\lambda x_n)\quad(\lambda\in\Lambda),\\ C_{n+1} &= \left\{z\in C_n:\sup_{\lambda\in\Lambda}\phi(z,y_n(\lambda))\le\phi(z,x_n)\right\},\\ x_{n+1} &= \Pi_{C_{n+1}}x \end{aligned}$$

とする．このとき，$\{x_n\}$ は $\Pi_F x\in C$ に強収束する．ただし $F=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}$ であり，Π_K は E の空でない閉凸集合 K への generalized projection である．

従来は写像族 $\{S_\lambda\}$ のもつ性質に対応して射影 P_K あるいは Π_K のいずれかを選択する必要があると考えられてきたが，新しい証明法では点列の生成時に用いる写像と射影を分離して扱うことができるため，このような命題が成り立つことが示された．

なお，定理 1.1 をバナッハ空間へ拡張した直接の結果は次の通りである．

定理 2.4 (Kimura [5])**.** E を狭義凸で回帰的なバナッハ空間とし，Kadec-Klee 条件およびノルムの Fréchet 微分可能性を仮定する．C を E の空でない閉凸集合とし，$\{T_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ を C からそれ自身への relatively nonexpansive 写像の族とする．また，$\{S_n\}$ を C 上の relatively nonexpansive 写像列で $\bigcap_{n=1}^\infty F(S_n)\supset\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F(T_\lambda)\neq\emptyset$ をみたすものとし，さらに $\{S_n\}$ は $\{T_\lambda\}$ に関する NST 条件 (I) をみたすものと仮定する．$\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ の数列で，$\liminf_{n\to\infty}\alpha_n<1$ をみたすものとする．点 $x\in E$ に対し，点列 $\{x_n\}$ を以下のように定義する．$x_1\in C$, $C_1=C$ とし，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} y_n &= J^*(\alpha_n Jx_n+(1-\alpha_n)JS_n x_n),\\ C_{n+1} &= \{z\in C_n:\phi(z,y_n)\le\phi(z,x_n)\},\\ x_{n+1} &= P_{C_{n+1}}x \end{aligned}$$

とする．このとき $\{x_n\}$ は $P_F x \in C$ へと強収束する．ただし P_K は閉凸集合 K への距離射影であり，$F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F(T_\lambda)$ である．

3 空間条件の緩和

定理 1.1 はヒルベルト空間で証明されているが，その後の研究において同様の証明手法はバナッハ空間へも応用可能であることが明らかになった．派生した定理としては Plubtieng-Ungchittrakool [11], Takahashi-Zembayashi [14], Qin-Cho-Kang [12], Wattanawitoon-Kumam [16, 15] 等が例として挙げられるが，これらの定理はいずれも，バナッハ空間に一様凸かつ一様に滑らかであることを仮定している．

これに対し，新しい証明法では空間の条件として回帰的，狭義凸, Kadec-Klee 条件およびノルムの Fréchet 微分可能性だけを仮定しておけばよく，上記の結果も新しい証明法を用いることによってなんらかの形で拡張できる可能性があると考えられる．本節では次の Takahashi-Zembayashi による結果を拡張した定理を紹介する．

定理 3.1 (Takahashi-Zembayashi [14])**.** E を一様凸かつ一様に滑らかなバナッハ空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．f を $C \times C$ 上の関数とし，次の条件をみたすと仮定する．

(A1) 任意の $x \in C$ に対して $f(x, x) = 0$;

(A2) 任意の $x, y \in C$ に対して $f(x, y) + f(y, x) \leq 0$;

(A3) 任意の $x, y, z \in C$ に対して $\limsup_{t \downarrow 0} f(tz + (1-t)x, y) \leq f(x, y)$;

(A4) 任意の $x \in C$ に対して $f(x, \cdot)$ は下半連続凸関数である．

S を C 上の relatively nonexpansive 写像とし，$F(S) \cap EP(f)$ は空でないとする．ただし

$$F(S) = \{z \in C : z = Sz\},$$
$$EP(f) = \{z \in C : \inf_{y \in C} f(z, y) \geq 0\}$$

である．点列 $\{x_n\}$ を次のように定義する．$x_1 = x \in C$, $C_1 = C$ とし，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
&y_n = J^{-1}(\alpha_n J x_n + (1-\alpha_n) S x_n),\\
&u_n \in C \text{ such that } f(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, J u_n - J y_n \rangle \geq 0 \ \forall y \in C,\\
&C_{n+1} = \{z \in C_n : \phi(z, u_n) \leq \phi(z, x_n)\},\\
&x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}} x
\end{aligned}$$

とする. ただし $\{a_n\}$, $\{r_n\}$ はそれぞれ $[0,1]$, $]0,\infty[$ の数列で $\liminf_{n\to\infty}\alpha_n(1-\alpha_n)>0$ および $\inf_{n\in\mathbb{N}} r_n>0$ をみたすものとする. このとき $\{x_n\}$ は $\Pi_{F(S)\cap EP(f)}x$ に強収束する. ただし, Π_K は E の空でない閉凸集合 K への generalized projection である.

定理で用いられているいくつかの写像の定義を以下に述べる. E を回帰的で狭義凸かつ滑らかなバナッハ空間とし, $E\times E$ 上の関数 ϕ を, $x,y\in E$ に対して

$$\phi(x,y)=\|x\|^2-2\langle x,Jy\rangle+\|y\|^2$$

で定義する. C を E の空でない閉凸集合とするとき, 写像 $S:C\to C$ が relatively nonexpansive [2, 3, 4, 8] であるとは,

$$F(S)=\hat{F}(S)\neq\emptyset$$

であり, さらに任意の $z\in F(S)$ と $x\in C$ に対して

$$\phi(z,Sx)\leq\phi(z,x)$$

が成り立つことをいう. ただし, $F(S)$, $\hat{F}(S)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}F(S)&=\{z\in C:z=Sz\},\\ \hat{F}(S)&=\{u\in C:\exists\{u_n\}\subset C,u_n\rightharpoonup u,\|u_n-Su_n\|\to 0\ (n\to\infty)\}\end{aligned}$$

で定義される C の部分集合である. ここで $u_n\rightharpoonup u$ は $\{u_n\}$ が u に弱収束することをあらわしている.

K を E の空でない閉凸集合とするとき, 任意の $y\in E$ に対して

$$\phi(x_y,y)=\min_{x\in K}\phi(x,y)$$

をみたす $x_y\in C$ が唯一存在する. x_y にこの点を対応させる写像は generalized projection [1] と呼ばれ, $x_y=\Pi_K y$ とあらわされる. とくに E が Hilbert 空間のときには, 任意の $x,y\in E$ に対して $\phi(x,y)=\|x-y\|^2$ となるので, Π_K は K 上への距離射影と一致する.

新しい証明法を用いると, 定理 3.1 を拡張した次の定理が得られる.

定理 3.2. E を回帰的で狭義凸なバナッハ空間とし, Kadec-Klee 条件が成り立ち, Fréchet 微分可能なノルムをもつとする. C を E の空でない閉凸集合とする. f を $C\times C$ 上の関数とし, 定理 3.1 の条件 (A1)–(A4) をみたすと仮定する. S を C 上の relatively nonexpansive 写像とし，$F(S) \cap EP(f)$ は空でないとする．点列 $\{x_n\}$ を以下のように定義する．$x_1 = x \in C$, $C_1 = C$ とし，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
y_n &= J^{-1}(\alpha_n J x_n + (1-\alpha_n) S x_n), \\
u_n &\in C \text{ such that } f(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, J u_n - J y_n \rangle \geq 0 \ \forall y \in C, \\
C_{n+1} &= \{z \in C_n : \phi(z, u_n) \leq \phi(z, x_n)\}, \\
x_{n+1} &= \Pi_{C_{n+1}} x
\end{aligned}
$$

とする．ただし $\{a_n\}$, $\{r_n\}$ はそれぞれ $[0,1]$, $]0,\infty[$ の数列で $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ および $\inf_{n\in\mathbb{N}} r_n > 0$ をみたすものとする．このとき $\{x_n\}$ は $\Pi_{F(S)\cap EP(f)} x$ に強収束する．

証明は省略するが，Kimura-Takahashi [7] 等の方法と本質的に同様の議論で証明できる．

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Dekker, New York, 1996, pp. 15–50.

[2] D. Butnariu, S. Reich, and A. J. Zaslavski, *Asymptotic behavior of relatively nonexpansive operators in Banach spaces*, J. Appl. Anal. **7** (2001), 151–174.

[3] D. Butnariu, S. Reich, and A. J. Zaslavski, *Weak convergence of orbits of nonlinear operators in reflexive Banach spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim. **24** (2003), 489–508.

[4] Y. Censor and S. Reich, *Iterations of paracontractions and firmly nonexpansive operators with applications to feasibility and optimization*, Optimization **37** (1996), 323–339.

[5] Y. Kimura, *Strong convergence theorems by a hybrid method for families of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proceedings of Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (Okinawa, Japan) (S. Akashi, W. Takahashi, and T. Tanaka, eds.), Yokohama Publishers, Yokohama, 2009, pp. 163–172.

[6] Y. Kimura, K. Nakajo, and W. Takahashi, *Convexity of the set of fixed points of a quasi-pseudocontractive type Lipschitz mapping and the shrinking projection method*, Sci. Math. Jpn. **70** (2009), 213–220.

[7] Y. Kimura and W. Takahashi, *On a hybrid method for a family of relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **357** (2009), 356–363.

[8] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[9] K. Nakajo, K. Shimoji, and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 11–34.

[10] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003), 372–379.

[11] S. Plubtieng and K. Ungchittrakool, *Hybrid iterative methods for convex feasibility problems and fixed point problems of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2008), Art. ID 583082, 19.

[12] X. Qin, Y. J. Cho, and S. M. Kang, *Convergence theorems of common elements for equilibrium problems and fixed point problems in Banach spaces*, J. Comput. Appl. Math. **225** (2009), 20–30.

[13] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.

[14] W. Takahashi and K. Zembayashi, *Strong convergence theorem by a new hybrid method for equilibrium problems and relatively nonexpansive mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2008), Art. ID 528476, 11.

[15] K. Wattanawitoon and P. Kumam, *Corrigendum to: "Strong convergence theorems by a new hybrid projection algorithm for fixed point problems and equilibrium problems of two relatively quasi-nonexpansive mappings" [Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 3 (2009) 11–20 [mr2487980]*, Nonlinear Anal. Hybrid Syst. **3** (2009), 176.

[16] ———, *Strong convergence theorems by a new hybrid projection algorithm for fixed point problems and equilibrium problems of two relatively quasi-nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. Hybrid Syst. **3** (2009), 11–20.