数理解析研究所講究録
第 1687 巻 2010 年 1-13

Vertex Operator Algebras Related to Parafermion Algebras

山田 裕理 (Hiromichi YAMADA)
一橋大学 (Hitotsubashi University)

1 序

パラフェルミオン代数 (parafermion algebra) は、Zamolodchikov-Fateev[13] により共形場理論において研究が始められた. 一方、Dong-Lepowsky[4] は、レベルが 2 以上の整数 k の $A_1^{(1)}$ 型アフィンリー代数の最高ウエイト 0 の既約最高ウエイト加群 $L(k,0)$ における Z-代数が [13] のパラフェルミオン代数と同型であることを示し、これにより数学においてもパラフェルミオン代数を研究する基礎ができた. Dong-Lepowsky はこの目的のために、[4] において Z-代数の概念を拡張した一般化された頂点代数 (generalized vertex algebra) を導入した. なお、Z-代数は Lepowsky-Primc および Lepowsky-Wilson がアフィンリー代数の表現論の研究のために導入したものである. パラフェルミオン代数の先行研究としては、このほかにも物理の論文 Gepner-Qiu[8], Gepner[7], Blumenhagen et.al[1] などがある. 数学のほうでは、Li[12] において [4, Chapter 14] のさらなる一般化が論じられている.

$L(k,0)$ におけるハイゼンベルグ頂点作用素代数の交換団 (commutant) を K_0 で表す. これは単純な頂点作用素代数 (vertex operator algebra, VOA) である. K_0 は Lam-Yamada[10] により最初に考察され、その後 Dong-Lam-Yamada[3] により研究が進められた. [3] における予想のいくつかは、最近 Dong-Lam-Wang-Yamada[2] により証明された. Dong-Wang[5] では、[2] の結果を拡張して、$A_1^{(1)}$ 型アフィンリー代数の $L(k,0)$ に限らず、任意の有限次元単純リー代数 $\mathfrak{g}$ のアフィンリー代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ に関する最高ウエイト 0 の既約最高ウエイト加群 $L_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ の場合について同様の結果を得ている.

本稿では、主として [2] および [5] の結果を紹介する. 第 2 節で $A_1^{(1)}$ 型アフィンリー代数の場合 [2] を説明し、第 3 節で $\widehat{\mathfrak{g}}$ の場合 [5] を説明する. 詳細につては、これらの論文を参照してください.

2 Parafermion VOA: sl_2-case

$k \geq 2$ を整数とする. $A_1^{(1)}$ 型アフィンリー代数 $\widehat{sl}_2$ のレベル k の一般 Verma 加群 $V(k,0) = V_{\widehat{sl}_2}(k,0)$ を考える. $\{h,e,f\}$ を sl_2 の標準的な基底とする. すなわち、$[h,e]=2e$, $[h,f]=-2f$, $[e,f]=h$ である. また、非退化不変対称形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ について、$\langle h,h\rangle = 2$, $\langle e,f\rangle = 1$, $\langle h,e\rangle = \langle h,f\rangle = \langle e,e\rangle = \langle f,f\rangle = 0$ である. $A_1^{(1)}$ 型アフィンリー代数

$$\widehat{sl}_2 = sl_2 \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}] \oplus \mathbb{C}C$$

における括弧積は、

$$\begin{aligned} [a\otimes t^m, b\otimes t^n] &= [a,b]\otimes t^{m+n} + m\langle a,b\rangle \delta_{m+n,0}C, \\ [C,\widehat{sl}_2] &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

で与えられる．$\widehat{sl}_2$ の部分リー代数

$$\widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}} = (\oplus_{n\neq 0}\mathbb{C}h \otimes t^n) \oplus \mathbb{C}C \tag{2.2}$$

は、ハイゼンベルグ代数である．$\widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}$ に $\mathbb{C}h \otimes t^0$ を付け加えたものを $\widehat{\mathfrak{h}}$ で表す．

$$\widehat{\mathfrak{h}} = h \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}C. \tag{2.3}$$

これも $\widehat{sl}_2$ の部分リー代数である．

$\widehat{sl}_2$ の部分リー代数 $sl_2 \otimes \mathbb{C}[t] \oplus \mathbb{C}C$ の 1 次元加群であって、$sl_2 \otimes \mathbb{C}[t]$ は 0 として作用し、C は k として作用するものを $\mathbb{C}_k$ で表す．$\widehat{sl}_2$ のレベル k の一般 Verma 加群 $V(k,0) = V_{\widehat{sl}_2}(k,0)$ は、これを $\widehat{sl}_2$-加群に誘導したものである．

$$V_{\widehat{sl}_2}(k,0) = U(\widehat{sl}_2) \otimes_{U(sl_2 \otimes \mathbb{C}[t] \oplus \mathbb{C}C)} \mathbb{C}_k. \tag{2.4}$$

$\mathbf{1} = 1 \otimes 1$ とおく．$a \otimes t^n$ の $V(k,0)$ への作用により引き起こされる $V(k,0)$ の線型作用素を $a(n)$ で表す．$a(n)$; $a \in \{h, e, f\}$, $n \in \mathbb{Z}$ は次の条件をみたす．

$$\begin{aligned} a(n)\mathbf{1} &= 0 \quad \text{for } n \geq 0, \\ [a(m), b(n)] &= [a,b](m+n) + m\langle a, b\rangle \delta_{m+n,0} k. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Poincaré-Birkhoff-Witt により、

$$h(-i_1)\cdots h(-i_p)e(-m_1)\cdots e(-m_q)f(-n_1)\cdots f(-n_r)\mathbf{1}, \tag{2.6}$$

$i_1 \geq \cdots \geq i_p \geq 1,\ m_1 \geq \cdots \geq m_q \geq 1,\ n_1 \geq \cdots \geq n_r \geq 1,\ p, q, r \geq 0$ は $V(k,0)$ の基底になる．$v \in V(k,0)$ をひとつとると、$a \in \{h, e, f\}$ について

$$a(n)v = 0 \quad \text{for } n >> 0 \tag{2.7}$$

が成り立つことが (2.5) よりわかる．

$u \in V(k,0)$ に対して、頂点作用素 $Y(u,x) \in (\mathrm{End}\, V(k,0))[[x, x^{-1}]]$ を次のように定義する．まず最初に、$a \in \{h, e, f\}$ に対して

$$a(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) x^{-n-1}$$

とおく．$v \in V(k,0)$ を任意にひとつとる．(2.7) により $a(x)v \in V(k,0)((x))$ である．

次に、$a, b \in \{h, e, f\}$, $n \in \mathbb{Z}$ について、$a(x)_n b(x) \in (\mathrm{End}\, V(k,0))[[x, x^{-1}]]$ を

$$a(x)_n b(x) = \mathrm{Res}_{x_1}\Big((x_1 - x)^n a(x_1) b(x) - (-x + x_1)^n b(x) a(x_1)\Big) \tag{2.8}$$

により定義する．この右辺の $v \in V(k,0)$ への作用は

$$\Big(\sum_{i \geq 0} \binom{n}{i} (-x)^i a(n-i)\Big) b(x)v - b(x)\Big(\sum_{i \geq 0} \binom{n}{i} (-x)^{n-i} a(i)v\Big)$$

であるが、各 $m \in \mathbb{Z}$ について、これの x^m の係数は (2.7) により $V(k,0)$ の元の有限個の和として定まる．この意味で、$a(x)_n b(x)$ は $(\mathrm{End}\,V(k,0))[[x,x^{-1}]]$ の元として定まっている．また、$a(x)_n b(x)v$ には x の負ベキの項は有限個しか現れないこと、すなわち $a(x)_n b(x)v \in V(k,0)((x))$ であることに注意する．

$a^i \in \{h,e,f\}$, $n_i \in \mathbb{Z}$ について、

$$Y(a^1(n_1)\cdots a^r(n_r)\mathbf{1},x) = a^1(x)_{n_1}\cdots a^r(x)_{n_r}1 \tag{2.9}$$

とおく．上で述べたことにより、これが $(\mathrm{End}\,V(k,0))[[x,x^{-1}]]$ の元として定まること、また $v \in V(k,0)$ に対して $Y(a^1(n_1)\cdots a^r(n_r)\mathbf{1},x)v \in V(k,0)((x))$ であることがわかる．一般の $u \in V(k,0)$ については、u を (2.6) の形の元の線型結合で表し、$Y(u,x)$ が u に関して線型になるように $Y(u,x)$ を定義する．

$Y(u,x)$ の x^{-n-1} の係数を u_n で表す．$u_n \in \mathrm{End}\,V(k,0)$ で、$Y(u,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n x^{-n-1}$ である．(2.9) の特別な場合として $Y(\mathbf{1},x) = 1$、すなわち $\mathbf{1}_n = \delta_{n,-1}1$ (1 は $V(k,0)$ の恒等写像)、および $a \in \{h,e,f\}$ について $(a(-1)\mathbf{1})_n = a(n)$ であることに注意する．(2.5), (2.8), (2.9) により、任意に与えられた $u, v \in V(k,0)$ について、原理的には $u_n v$ を (2.6) の形の元の線型結合として表すことができる．

$$\begin{aligned}\omega_{\mathrm{aff}} &= \frac{1}{2(k+2)}\Big(\frac{1}{2}h(-1)^2\mathbf{1} + e(-1)f(-1)\mathbf{1} + f(-1)e(-1)\mathbf{1}\Big)\\ &= \frac{1}{2(k+2)}\Big(-h(-2)\mathbf{1} + \frac{1}{2}h(-1)^2\mathbf{1} + 2e(-1)f(-1)\mathbf{1}\Big)\end{aligned} \tag{2.10}$$

とおく．$(V(k,0), Y, \mathbf{1}, \omega_{\mathrm{aff}})$ は $\mathbf{1}$ を真空ベクトル、ω_{aff} を共形ベクトルとする頂点作用素代数である (cf. [6, 11])．これは $A_1^{(1)}$ 型の (あるいは $\widehat{sl}_2$ に付随する) アフィン頂点作用素代数と呼ばれ、その中心電荷は $3k/(k+2)$ である．

$Y(\omega_{\mathrm{aff}},x)$ の x^{-2} の係数 $(\omega_{\mathrm{aff}})_1$ は、$V(k,0)$ に半単純に作用する．v が $(\omega_{\mathrm{aff}})_1$ の固有ベクトルのとき、その固有値を v のウエイトと呼び、 $\mathrm{wt}\,v$ で表す．(2.6) の形の元は $(\omega_{\mathrm{aff}})_1$ の固有ベクトルで、そのウエイトは

$$i_1 + \cdots + i_p + m_1 + \cdots + m_q + n_1 + \cdots + n_r \tag{2.11}$$

である．零ベクトルのウエイトは任意と考えると、ウエイトが m のベクトル全部の集合 $V(k,0)_{(m)}$ は部分空間になる．(2.11) からわかるように、$m<0$ のとき $V(k,0)_{(m)} = 0$ で、$V(k,0)_{(0)} = \mathbb{C}\mathbf{1}$ は 1 次元、$V(k,0)_{(1)}$ は $h(-1)\mathbf{1}$, $e(-1)\mathbf{1}$, $f(-1)\mathbf{1}$ で張られる 3 次元の部分空間である．

ここでは k を 2 以上の整数としたが、一般 Verma 加群 $V(k,0)$ および頂点作用素 $Y(u,x)$ は k が任意の複素数の場合に定義できる．また、$k \neq -2$ であれば (2.10) の ω_{aff} も定義できて、$(V(k,0), Y, \mathbf{1}, \omega_{\mathrm{aff}})$ は頂点作用素代数になる．k が正の整数のとき $V(k,0)$ は単純な頂点作用素代数ではなく、唯一つの極大イデアル $\mathcal{J}$ を持つこと、および $\mathcal{J}$ がひとつの元 $e(-1)^{k+1}\mathbf{1}$ で生成されることが知られている (cf. [9])．$L(k,0) = V(k,0)/\mathcal{J}$ とおく．これは、$A_1^{(1)}$ 型の単純アフィン頂点作用素代数と呼ばれ、中心電荷は同じく $3k/(k+2)$ である．$L(k,0)$ の頂点作用素、真空ベクトル、共形ベクトルは、$V(k,0)$ のものと同じ記号

を用いてそれぞれ Y, $\mathbf{1}$, ω_{aff} で表す．この記法によれば、$u \in L(k,0)$ に対して $Y(u,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n x^{-n-1} \in (\mathrm{End}\, L(k,0))[[x,x^{-1}]]$ である．

リー代数 sl_2 の位数 2 の自己同型

$$h \mapsto -h, \quad e \mapsto f, \quad f \mapsto e$$

から引き起こされる頂点作用素代数 $V(k,0)$ の位数 2 の自己同型を σ で表す．極大イデアル $\mathcal{J}$ は σ で不変だから、σ は $L(k,0)$ の位数 2 の自己同型を引き起こすが、この自己同型も同じ σ で表すことにする．

(2.5) により、(2.6) の形の元は $h(0)$ の固有値 $2(q-r)$ の固有ベクトルである．したがって、$h(0)$ の固有値 λ に属する固有空間を

$$V(k,0)(\lambda) = \{v \in V(k,0) \,|\, h(0)v = \lambda v\} \tag{2.12}$$

とおくと、$V(k,0)$ の $h(0)$ に関する固有空間分解

$$V(k,0) = \oplus_{\lambda\in 2\mathbb{Z}} V(k,0)(\lambda) \tag{2.13}$$

が得られる．$\lambda = 0$ のときの $V(k,0)(0)$ は部分頂点作用素代数で、

$$h(-i_1)\cdots h(-i_p)e(-m_1)\cdots e(-m_q)f(-n_1)\cdots f(-n_q)\mathbf{1}, \tag{2.14}$$

$i_1 \geq \cdots \geq i_p \geq 1,\ m_1 \geq \cdots \geq m_q \geq 1,\ n_1 \geq \cdots \geq n_q \geq 1,\ p,\ q \geq 0$ はその基底になる．任意の $\lambda \in 2\mathbb{Z}$ について、$V(k,0)(\lambda)$ は $V(k,0)(0)$-加群である．

$V(k,0)(0)$ の生成系について、次のことが成り立つ (cf. [2, Theorem 2.1])．

定理 2.1 頂点作用素代数 $V(k,0)(0)$ は $h(-)\mathbf{1}$ と $f(-2)e(-1)\mathbf{1}$ で生成される．

この定理の証明の詳細は [2] を参照していただくことにして、ここでは証明の方針を説明する．(2.14) の形の元全体は $V(k,0)(0)$ の基底であるが、これを少し変形した

$$h(-i_1)\cdots h(-i_p)f(-m_1)e(-n_1)\cdots f(-m_q)e(-n_q)\mathbf{1}, \tag{2.15}$$

$i_1 \geq \cdots \geq i_p \geq 1,\ m_1 \geq \cdots \geq m_q \geq 1,\ n_1 \geq \cdots \geq n_q \geq 1,\ p,\ q \geq 0$ の全体により $V(k,0)(0)$ が張られることに注意する．$h(-)\mathbf{1}$ と $f(-2)e(-1)\mathbf{1}$ で生成される部分頂点作用素代数を U とおく．U が (2.15) の形の元をすべて含むことを示せばよい．

$(h(-1)\mathbf{1})_n = h(n)$ だから、$v \in U$ ならば $h(-i_1)\cdots h(-i_p)v \in U$ である．したがって、(2.15) の形の元が U に含まれることを示すためには、$f(-m_1)e(-n_1)\cdots f(-m_q)e(-n_q)\mathbf{1}$ の部分が U に含まれることを示せば十分である．次の 2 つのステップに分けて証明する．

Step 1. すべての $m, n > 0$ について $f(-m)e(-n)\mathbf{1} \in U$ であることを証明する．

すべての $n \geq 2$ とすべての $1 \leq i \leq n-1$ について $f(-n+i)e(-i)\mathbf{1} \in U$ であることを n に関する帰納法で示せばよい．(2.5) により、

$$h(1)f(-2)e(-1)\mathbf{1} = -2f(-1)e(-1)\mathbf{1}$$

となるので、$f(-1)e(-1)\mathbf{1} \in U$ がわかる．よって、$n=2$ のときは主張は成り立つ．このことと $e(-1)f(-1)\mathbf{1} = h(-2)\mathbf{1} + f(-1)e(-1)\mathbf{1}$ より、$\omega_{\mathrm{aff}} \in U$ もわかる．

$L_{\mathrm{aff}}(n) = (\omega_{\mathrm{aff}})_{n+1}$ とおく．すなわち、$Y(\omega_{\mathrm{aff}}, x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_{\mathrm{aff}}(n)x^{-n-2}$ である．頂点作用素代数における公式

$$[L_{\mathrm{aff}}(m), a(n)] = -na(m+n) \quad \text{for } a \in \{h, e, f\},\ m, n \in \mathbb{Z}$$

および $L_{\mathrm{aff}}(-1)\mathbf{1} = 0$ により、任意の $m, i \in Z$ について

$$L_{\mathrm{aff}}(-1)f(-m+i)e(-i)\mathbf{1} = (m-i)f(-m-1+i)e(-i)\mathbf{1} + if(-m+i)e(-i-1)\mathbf{1} \quad (2.16)$$

が成り立つ．特に、

$$L_{\mathrm{aff}}(-1)f(-1)e(-1)\mathbf{1} = f(-2)e(-1)\mathbf{1} + f(-1)e(-2)\mathbf{1} \quad (2.17)$$

である．よって $f(-1)e(-2)\mathbf{1} \in U$ がわかる．以上により、$n=3$, $1 \le i \le n-1$ について $f(-n+i)e(-i)\mathbf{1} \in U$ であることがわかった．

$n \ge 3$ とし、$2 \le m \le n$ と $1 \le i \le m-1$ については $f(-m+i)e(-i)\mathbf{1} \in U$ がわかっていると仮定する．$1 \le i \le n$ について $f(-n-1-i)e(-i) \in U$ であることを示す．頂点作用素代数の公式

$$(u_l v)_m = \sum_{j\ge 0}(-1)^j \binom{l}{j} u_{l-j}v_{m+j} - \sum_{j\ge 0}(-1)^{l+j}\binom{l}{j} v_{m+l-j}u_j \quad (2.18)$$

を $(f(-2)e(-1)\mathbf{1})_1 = ((f(-1)\mathbf{1})_{-2}e(-1)\mathbf{1})_1$ に適用すると、

$$(f(-2)e(-1)\mathbf{1})_1 = \sum_{j\ge 0}(j+1)f(-2-j)e(1+j) - \sum_{j\ge 0}(j+1)e(-1-j)f(j)$$

となる．これを用いると、帰納法の仮定から

$$\begin{aligned}
&(f(-2)e(-1)\mathbf{1})_1 f(-n+1)e(-1)\mathbf{1} \\
&\quad = \big((n-1)(nk+n+k+2)+2\big)f(-n)e(-1)\mathbf{1} \\
&\qquad - 2(k+1)L_{\mathrm{aff}}(-1)f(-n+1)e(-1)\mathbf{1} + u.
\end{aligned}$$

をみたす $u \in U$ が存在することがわかり、$f(-n)e(-1)\mathbf{1} \in U$ が得られる．(2.16) を適用すると n に関する帰納法が完了し、すべての $m, n > 0$ について $f(-m)e(-n)\mathbf{1} \in U$ であることがわかる．

Step 2. (2.15) の形の元のうち $q \le r$ をみたすもの全体で張られる $V(k,0)(0)$ の部分空間を $V(r)$ で表す．すべての $r \ge 1$ について $V(r) \subset U$ であることを r に関する帰納法で証明する．

Step 1 により、$V(1) \subset U$ である．$V(r) \subset U$ と仮定して $V(r+1) \subset U$ を示すことにする．(2.18) により、与えられた $m, n \ge 0$ について適当な定数 c_i, d_i を用いて

$$\begin{aligned}
&(f(-m-1)e(-n-1)\mathbf{1})_{-1} \\
&\quad = f(-m-1)e(-n-1) \\
&\qquad + \sum_{i\ge 0} c_i f(-m-n-2-i)e(i) + \sum_{i\ge 0} d_i e(-m-n-2-i)f(i)
\end{aligned} \quad (2.19)$$

と表すことができる．$w = f(-m_1)e(-n_1)\cdots f(-m_r)e(-n_r)\mathbf{1} \in V(r)$ とおく．(2.5) より、$i \geq 0$ ならば $f(-m-n-2-i)e(i)w$ および $e(-m-n-2-i)f(i)w$ は $V(r)$ に含まれることがわかる．$f(-m-1)e(-n-1)\mathbf{1}$ も w も $V(r)$ に含まれるので、(2.19) と帰納法の仮定より $f(-m-1)e(-n-1)w \in U$ が得られる．$m, n \geq 0$ は任意だから、これより $V(r+1) \subset U$ となり r に関する帰納法が完了する．以上で定理 2.1 が証明された．

注意 2.2 上記の定理において、$f(-2)e(-1)\mathbf{1}$ は $e(-2)f(-1)\mathbf{1} - e(-1)f(-2)\mathbf{1}$ で置き換えてもよい．すなわち、頂点作用素代数 $V(k,0)(0)$ は $h(-1)\mathbf{1}$ と $e(-2)f(-1)\mathbf{1}-e(-1)f(-2)\mathbf{1}$ でも生成される．位数 2 の自己同型 σ により、$h(-)\mathbf{1}$ も $e(-2)f(-1)\mathbf{1} - e(-1)f(-2)\mathbf{1}$ もともに -1 倍されるので、自己同型 σ との関係でいえば $h(-1)\mathbf{1}$ と $e(-2)f(-1)\mathbf{1} - e(-1)f(-2)\mathbf{1}$ を生成系として考えるのが適切である (cf. [2, Remark 2.2])．

$h(-1)\mathbf{1}$ で生成される $V(k,0)$ の部分頂点作用素代数を $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)$ で表す．

$$M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0) = \mathrm{span}\{h(-i_1)\cdots h(-i_p)\mathbf{1};\, i_1 \geq \cdots \geq i_p \geq 1,\, p \geq 0\}$$

である．

$$\omega_\gamma = \frac{1}{4k}h(-1)^2\mathbf{1} \tag{2.20}$$

とおくと、$(M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0),\, Y,\, \mathbf{1},\, \omega_\gamma)$ は $\mathbf{1}$ を真空ベクトル、ω_γ を共形ベクトルとする中心電荷 1 の頂点作用素代数になる．これはレベル k のハイゼンベルグ頂点作用素代数である．

λ を最高ウエイトとする $\widehat{\mathfrak{h}}$ の既約最高ウエイト加群 $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,\lambda)$ は、既約な $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)$-加群でもある．$V(k,0)(\lambda)$ は $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)$-加群として完全可約で、$M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,\lambda)$ の直和に分解される．より詳しく、

$$N_\lambda = \{v \in V(k,0) \,|\, h(m)v = \lambda\delta_{m,0}v,\, m \geq 0\}$$

とおくと、$M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)$-加群として

$$V(k,0)(\lambda) = M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,\lambda) \otimes N_\lambda \tag{2.21}$$

である．これと (2.13) を合わせると、

$$V(k,0) = \oplus_{\lambda \in 2\mathbb{Z}} M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,\lambda) \otimes N_\lambda \tag{2.22}$$

という $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)$-加群としての直和分解が得られる．

$\lambda = 0$ のときは $V(k,0)(0) = M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0) \otimes N_0$ で、$N_0 = \{v \in V(k,0) \,|\, h(m)v = 0,\ m \geq 0\}$ は $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)$ の $V(k,0)$ における交換団 (commutant) に他ならない．$(N_0,\, Y,\, \mathbf{1},\, \omega)$ は $\mathbf{1}$ を真空ベクトル、

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_{\mathrm{aff}} - \omega_\gamma \\ &= \frac{1}{2k(k+2)}\Big(- kh(-2)\mathbf{1} - h(-1)^2\mathbf{1} + 2ke(-1)f(-1)\mathbf{1}\Big) \end{aligned} \tag{2.23}$$

を共形ベクトルとする中心電荷 $3k/(k+2) - 1 = 2(k-1)/(k+2)$ の頂点作用素代数である．任意の $\lambda \in 2\mathbb{Z}$ について、N_λ は N_0-加群である．

N_0 におけるウエイトについて、一言注意する. N_0 の共形ベクトルは ω だから、作用素 ω_1 に関する固有値が N_0 の元のウエイトである. 一方、$v \in N_0$ については $(\omega_\gamma)_1 v = 0$ だから、$\omega_1 v = (\omega_{\mathrm{aff}})_1 v$ となる. よって、v を $V(k,0)$ の元として考えたウエイトと N_0 の元としてのウエイトは一致する.

これまでに出てきた部分頂点作用素代数 $V(k,0)(0)$, $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)$, N_0 はいずれも $V(k,0)$ の位数 2 の自己同型 σ により不変であり、σ をこれらに制限したものは部分頂点作用素代数の位数 2 の自己同型である.

$V(k,0)$ におけるハイゼンベルグ代数 $\widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}$ の真空空間 (vacuum space) を $\Omega_{V(k,0)}$ とおく.

$$\Omega_{V(k,0)} = \{v \in V(k,0) \mid h(n)v = 0, n \geq 1\} \tag{2.24}$$

である. $\widehat{\mathfrak{h}}$ の既約最高ウエイト加群 $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,\lambda)$ の最高ウエイトベクトルを v_λ で表すと、N_0-加群として

$$\Omega_{V(k,0)} = \oplus_{\lambda \in 2\mathbb{Z}} v_\lambda \otimes N_\lambda$$

と直和分解される. また、

$$v_\lambda \otimes N_\lambda = \{v \in \Omega_{V(k,0)} \mid h(0)v = \lambda v\}$$

は、$\Omega_{V(k,0)}$ における $h(0)$ の固有値 λ の固有空間である.

ウエイト 3 の N_0 の元 W^3 を導入する.

$$\begin{aligned} W^3 = {} & k^2 h(-3)\mathbf{1} + 3kh(-2)h(-1)\mathbf{1} + 2h(-1)^3\mathbf{1} - 6kh(-1)e(-1)f(-1)\mathbf{1} \\ & + 3k^2 e(-2)f(-1)\mathbf{1} - 3k^2 e(-1)f(-2)\mathbf{1}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

定理 2.1 を用いると、N_0 の生成系が次のようにわかる (cf. [2, Theorem 3.1]).

定理 2.3 頂点作用素代数 N_0 は ω と W^3 で生成される.

この定理の証明のポイントは、$V(k,0)(0)$ が $h(-1)\mathbf{1}$, ω, W^3 で頂点作用素代数として生成されることである. このこと自体は、定理 2.1 から容易に証明できる. これに注意すると、$V(k,0)(0) = M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0) \otimes N_0$ であること、および $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)$ が $h(-1)\mathbf{1}$ で生成されること、ω と W^3 が N_0 に含まれることから定理 3.1 が証明できる.

N_0 は ω と W^3 で生成される頂点作用素代数であるが、N_0 の元を適切に表示するには ω と W^3 のほかにウエイト 4 の元 W^4 とウエイト 5 の元 W^5 を用いる必要がある. 実際、N_0 の任意の元は、

$$\omega_{-i_1} \cdots \omega_{-i_p} W^3_{-j_1} \cdots W^3_{-j_q} W^4_{-m_1} \cdots W^4_{-m_r} W^5_{-n_1} \cdots W^5_{-n_s} \mathbf{1}, \tag{2.26}$$

$i_1 \geq \cdots \geq i_p \geq 1$, $j_1 \geq \cdots \geq j_q \geq 1$, $m_1 \geq \cdots \geq m_r \geq 1$, $n_1 \geq \cdots \geq n_s \geq 1$ の線型結合として表すことができる (cf. [3, Lemma 2.4]). すなわち、ω, W^3, W^4, W^5 は N_0 の strong generators である.

$\omega_2 v = \omega_3 v = 0$ をみたす元 v は共形ベクトル ω に関するプライマリーと呼ばれるが、W^3, W^4, W^5 はそれぞれ N_0 におけるウエイト 3, 4, 5 の ω に関するプライマリーであり、この性質を持つベクトルとして定数倍を除いて一意的に定まる (cf. [1, 3]).

群の生成系と基本関係に対応するものは、頂点作用素代数では生成系と作用素積展開 (operator product expansion, OPE) である．ω, W^3, W^4, W^5 に関する作用素積展開は [1, 3] で計算されている．(2.26) はこの作用素積展開からわかる．

定理 2.2 により、N_0 は [1] において $W(2,3,4,5)$ と表される頂点作用素代数に一致することがわかる．N_0 の指標は

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}\, N_0 &= \frac{\phi_0(q) - q\phi_1(q)}{\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^2} \\ &= 1 + q^2 + 2q^3 + 4q^4 + 6q^5 + 11q^6 + 16q^7 + 27q^8 + 40q^9 + \cdots\end{aligned}$$

である．ここで

$$\phi_m(q) = \sum_{r\geq 0}(-1)^r q^{\frac{r(r+1)}{2}+mr}$$

である (cf. [1, (2.1.8)])．

ここまでは $V(k,0)$ の中で議論してきた．次に、$V(k,0)$ の唯一つの極大イデアル $\mathcal{J}$ および $\mathcal{J}$ による剰余代数 $L(k,0) = V(k,0)/\mathcal{J}$ を考える．$\mathcal{J}$ はハイゼンベルグ頂点作用素代数 $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)$ の加群として完全可約で、(2.22) により $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)$-加群として

$$\mathcal{J} = \oplus_{\lambda\in 2\mathbb{Z}} M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,\lambda) \otimes (\mathcal{J} \cap N_\lambda)$$

という直和分解が得られる．$M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0) \cap \mathcal{J} = 0$ だから、$M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0) \hookrightarrow L(k,0)$ である．これにより $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)$ を $L(k,0)$ の部分代数と見なすことができる．

$$K_\lambda = \{v \in L(k,0) \mid h(m)v = \lambda\delta_{m,0}v,\ m \geq 0\}$$

とおくと、$M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)$-加群として

$$L(k,0) = \oplus_{\lambda\in 2\mathbb{Z}} M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,\lambda) \otimes K_\lambda \tag{2.27}$$

となる．$\mathcal{I} = \mathcal{J} \cap N_0$ とおく．[3, Lemma 3.1] により $\mathcal{I}$ は N_0 の唯一つの極大イデアルで、$K_0 \cong N_0/\mathcal{I}$ である．K_0 は、パラフェルミオン頂点作用素代数 (parafermion VOA) と呼ばれる単純な頂点作用素代数である．任意の $\lambda \in 2\mathbb{Z}$ について、K_λ は既約 K_0-加群である．

$V(k,0)$ のときの (2.24) と同様に

$$\Omega_{L(k,0)} = \{v \in L(k,0) \mid h(n)v = 0, n \geq 1\} \tag{2.28}$$

とおく．これは $L(k,0)$ におけるハイゼンベルグ代数 $\widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}$ の真空空間で、K_0-加群として

$$\Omega_{L(k,0)} = \oplus_{\lambda\in 2\mathbb{Z}} v_\lambda \otimes K_\lambda$$

と直和分解される．

ω_{aff}, ω_γ, ω, $W^3 \in V(k,0)$ の $L(k,0) = V(k,0)/\mathcal{J}$ における像を、同じ記号で表すことにする．定理 2.3 により、次の定理が得られる (cf. [2, Theorem 4.1])．

定理 2.4 パラフェルミオン頂点作用素代数 K_0 は ω と W^3 で生成される．

$K_0 \cong N_0/\mathcal{I}$ だから、K_0 の性質を知るには $\mathcal{I}$ を調べる必要がある．$\mathcal{I}$ の基本的な性質に関して次の定理がある (cf. [2, Theorem 4.2]).

定理 2.5 (1) N_0 の唯一つの極大イデアル $\mathcal{I}$ は $f(0)^{k+1}e(-1)^{k+1}\mathbf{1}$ で生成される．
(2) $\sigma(f(0)^{k+1}e(-1)^{k+1}\mathbf{1}) = (-1)^{k+1}f(0)^{k+1}e(-1)^{k+1}\mathbf{1}$.

この定理はリー代数 sl_2 の有限次元表現の理論を用いて証明する．詳細は [2] に譲るが、概略は以下のとおりである．$a \in \{h, e, f\}$ について、$a(0)$ は $V(k,0)$ および N_0 の各ウエイト空間の線型変換を引き起こし、それにより各ウエイト空間は有限次元の半単純な sl_2-加群になる．$f(0)^{k+1}e(-1)^{k+1}\mathbf{1} \in N_0$ であること、$V(k,0)$ の極大イデアル $\mathcal{J}$ が $f(0)^{k+1}e(-1)^{k+1}\mathbf{1}$ でも生成されること、さらに (2.22) において $u \in M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,\lambda) \otimes N_\lambda$, $v \in M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0) \otimes N_0$ であればすべての $n \in \mathbb{Z}$ について $u_n v \in M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,\lambda) \otimes N_\lambda$ であることから、(1) が証明できる．

任意の正の整数 i について、$e(-1)^i\mathbf{1}$ は sl_2 の作用に関して最高ウエイト $2i$ の最高ウエイトベクトルであること、同様に $f(-1)^i\mathbf{1}$ は 最低ウエイト $-2i$ の最低ウエイトベクトルであることに注意すると、sl_2 の有限次元表現の理論により

$$e(0)^i f(-1)^i = (-1)^i f(0)^i e(-1)^i \mathbf{1}$$

がわかる．$i = k+1$ の場合が (2) の主張である．

3 Parafermion VOA: general case

$\mathfrak{g}$ をランク l の有限次元単純リー代数とする．この節では、前節の sl_2 の場合の議論を $\mathfrak{g}$ に置き換えて考える．この節でも整数 $k \geq 2$ を固定しておく．

$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数、Δ を $\mathfrak{h}$ に関するルート系、Δ_+ を正ルートの集合、Q をルート格子とする．$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は非退化不変対称形式で、長ルート α に対して $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2$ となるように正規化しておく．$\alpha \in \mathfrak{h}^*$, $h \in \mathfrak{h}$ に対して、$\alpha(h) = \langle t_\alpha, h \rangle$ となるように $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ を定める．$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ を単純ルートの集合、θ を最高ルートとする．$\alpha \in \Delta$ のルート空間を $\mathfrak{g}_\alpha$ とおく．$\alpha \in \Delta_+$ に対して、$h_\alpha = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} t_\alpha$ とおく．$x_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ を、$[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$, $[h_\alpha, x_{\pm\alpha}] = \pm 2x_{\pm\alpha}$ をみたすように選ぶ．$\langle \cdot, \cdot \rangle$ について、$\langle h_\alpha, h_\alpha \rangle = 2\frac{\langle \theta, \theta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$, $\langle x_\alpha, x_{-\alpha} \rangle = \frac{\langle \theta, \theta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ が成り立つ．$\mathfrak{g}^\alpha = \mathbb{C}x_\alpha + \mathbb{C}h_\alpha + \mathbb{C}x_{-\alpha}$ とおく．$\mathfrak{g}^\alpha$ は sl_2 と同型な $\mathfrak{g}$ の部分リー代数である．

$\mathfrak{g}$ のアフィンリー代数

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}C$$

における括弧積は (2.1) と同じである．$\widehat{\mathfrak{g}}$ の部分リー代数

$$\widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}} = (\oplus_{n \neq 0} \mathfrak{h} \otimes t^n) \oplus \mathbb{C}C, \tag{3.1}$$

$$\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}C \tag{3.2}$$

を sl_2 のときの (2.2) および (2.3) と同様に定める．

$\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t]\oplus\mathbb{C}C$ の 1 次元加群で、$\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t]$ は 0 として作用し C は k として作用するものを $\mathbb{C}_k$ で表す．これを $\widehat{\mathfrak{g}}$-加群に誘導したものを $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ で表す．

$$V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)=U(\widehat{\mathfrak{g}})\otimes_{U(\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t]\oplus\mathbb{C}C)}\mathbb{C}_k. \tag{3.3}$$

第 2 節と同様に、$\mathbf{1}=1\otimes 1$ とおき、$a\otimes t^n$ の $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ への作用により引き起こされる $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ の線型作用素を $a(n)$ で表す．$u\in V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ に対して、頂点作用素 $Y(u,x)$ を (2.8) および (2.9) と同じ式で定義する．また、(2.10) に替えて

$$\omega_{\text{aff}}=\frac{1}{2(k+h^\vee)}\Big(\sum_{i=1}^{l}h_i(-1)^2\mathbf{1}+\sum_{\alpha\in\Delta}\frac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{\langle\theta,\theta\rangle}x_\alpha(-1)x_{-\alpha}(-1)\mathbf{1}\Big) \tag{3.4}$$

とおくと、$(V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0), Y, \mathbf{1}, \omega_{\text{aff}})$ は $\mathbf{1}$ を真空ベクトル、ω_{aff} を共形ベクトルとする中心電荷 $k\dim\mathfrak{g}/(k+h^\vee)$ の頂点作用素代数になる (cf. [6, 11])．ただし $h^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の双対コクセタ数を表し、$\{h_1,\ldots,h_l\}$ は $\mathfrak{h}$ の $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関する正規直交基底である．

$\lambda\in\mathfrak{h}^*$ について

$$V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)(\lambda)=\{v\in V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)\,|\,h(0)v=\lambda(h)v,\ h\in\mathfrak{h}\} \tag{3.5}$$

とおくと、

$$V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)=\oplus_{\lambda\in Q}V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)(\lambda) \tag{3.6}$$

という直和分解が得られる．これらは sl_2 のときの (2.12) および (2.13) に対応するものである．$\lambda=0$ のときの $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)(0)$ は部分頂点作用素代数で、$V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)(\lambda)$ は $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)(0)$-加群である．

リー代数 $\mathfrak{g}$ の任意の自己同型 σ は、$\mathbf{1}$ を固定し $x(n)$ (ただし $x\in\mathfrak{g}$, $n\in Z$) を $(\sigma x)(n)$ に移すという頂点作用素代数 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ の自己同型を引き起こす．この $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ の自己同型を、同じ σ で表す．$\sigma(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$ であれば、σ を $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)(0)$ に制限したものは部分頂点作用素代数 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)(0)$ の自己同型である．特に、$\mathfrak{g}$ のワイル群の元は $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ および $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)(0)$ の自己同型を引き起こす．

定理 2.1 は次のように一般化される (cf [5, Theorem 2.1])．

定理 3.1 頂点作用素代数 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)(0)$ は $h_{\alpha_i}(-1)\mathbf{1}$, $1\le i\le l$ および $x_{-\alpha}(-2)x_\alpha(-1)\mathbf{1}$, $\alpha\in\Delta_+$ で生成される．

この定理は、$V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)(0)$ が

$$a_1(-m_1)\cdots a_s(-m_s)x_{\beta_1}(-n_1)\cdots x_{\beta_t}(-n_t)\mathbf{1}$$

$a_i\in\mathfrak{h}$, $\beta_j\in\Delta$, $m_i\ge 1$, $n_j\ge 1$ で $\beta_1+\cdots+\beta_t=0$ をみたすもの全体で張られることに注意して、定理 2.3 と同様の議論で証明することができる．

$h_i(-1)\mathbf{1}$, $1\le i\le l$ で生成される $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ の部分頂点作用素代数を $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)$ で表す．これは

$$\omega_{\mathfrak{h}}=\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{l}h_i(-1)^2\mathbf{1} \tag{3.7}$$

を共形ベクトルとする中心電荷 l の頂点作用素代数である.

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を最高ウエイトとする $\widehat{\mathfrak{h}}$ の既約最高ウエイト加群 $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,\lambda)$ を考える. これは既約な $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)$-加群でもある. $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,\lambda)$ の最高ウエイトベクトル v_λ は、$h \in \mathfrak{h}$ と $0 \le m \in \mathbb{Z}$ に対して $h(m)v_\lambda = \lambda(h)\delta_{m,0}v_\lambda$ という条件をみたす. $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)(\lambda)$ は $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)$-加群として完全可約で、

$$V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)(\lambda) = M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,\lambda) \otimes N_{\widehat{\mathfrak{g}},\lambda} \tag{3.8}$$

となる. ただし、

$$N_{\widehat{\mathfrak{g}},\lambda} = \{v \in V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0) \mid h(m)v = \lambda(h)\delta_{m,0}v,\ h \in \mathfrak{h},\ m \ge 0\}$$

である. (3.6) と合わせると、

$$V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0) = \oplus_{\lambda \in Q} M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,\lambda) \otimes N_{\widehat{\mathfrak{g}},\lambda} \tag{3.9}$$

という $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)$-加群としての直和分解が得られる.

$\lambda = 0$ のときの $N_{\widehat{\mathfrak{g}},0}$ を $N(\mathfrak{g},k)$ で表す. これは $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)$ の $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ における交換団 (commutant) で、$\omega = \omega_{\mathrm{aff}} - \omega_{\mathfrak{h}}$ を共形ベクトルとする中心電荷 $k\dim\mathfrak{g}/(k+h^\vee) - l$ の頂点作用素代数である. 任意の $\lambda \in Q$ について、$N_{\widehat{\mathfrak{g}},\lambda}$ は $N(\mathfrak{g},k)$-加群である.

$\langle h_\alpha, h_\alpha\rangle = 2\frac{\langle\theta,\theta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$, $\langle x_\alpha, x_{-\alpha}\rangle = \frac{\langle\theta,\theta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ および (2.5) を考慮して、$\alpha \in \Delta_+$ について $k_\alpha = \frac{\langle\theta,\theta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}k$ とおく. α が長ルートならば $k_\alpha = k$ で、短ルートならば $k_\alpha = 2k$ あるいは $k_\alpha = 3k$ である. $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ は $A_1^{(1)}$ 型アフィンリー代数 $\widehat{\mathfrak{g}^\alpha} = \mathfrak{g}^\alpha \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}] \oplus \mathbb{C}C$ のレベル k_α の加群であることに注意する.

$\alpha \in \Delta_+$ について、第2節の ω と W^3 に対応する

$$\omega_\alpha = \frac{1}{2k_\alpha(k_\alpha+2)}\Big(-k_\alpha h_\alpha(-2)\mathbf{1} - h_\alpha(-1)^2\mathbf{1} + 2k_\alpha x_\alpha(-1)x_{-\alpha}(-1)\mathbf{1}\Big) \tag{3.10}$$

および

$$\begin{aligned} W_\alpha^3 = {} & k_\alpha^2 h_\alpha(-3)\mathbf{1} + 3k_\alpha h_\alpha(-2)h_\alpha(-1)\mathbf{1} + 2h_\alpha(-1)^3\mathbf{1} - 6k_\alpha h_\alpha(-1)x_\alpha(-1)x_{-\alpha}(-1)\mathbf{1} \\ & + 3k_\alpha^2 x_\alpha(-2)x_{-\alpha}(-1)\mathbf{1} - 3k_\alpha^2 x_\alpha(-1)x_{-\alpha}(-2)\mathbf{1} \end{aligned} \tag{3.11}$$

という $N(\mathfrak{g},k)$ のウエイト2および3の元を導入する (cf. (2.23), (2.25)). ω_α と W_α^3 で生成される $N(\mathfrak{g},k)$ の部分頂点作用素代数を $\widehat{P}_\alpha$ で表す. $\widehat{P}_\alpha$ は $N(sl_2,k_\alpha)$ と同型である. ここで、$N(sl_2,k_\alpha)$ は第2節の N_0 において k を k_α に取り替えたものである.

定理2.1を用いて定理2.3を証明することと同様の議論で、定理3.1から次の定理3.2が証明できる (cf. [5, Theorem 3.1]).

定理 3.2 頂点作用素代数 $N(\mathfrak{g},k)$ は ω_α, W_α^3, $\alpha \in \Delta_+$ で生成される.

$V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ は唯一つの極大イデアル $\mathcal{J}_{\widehat{\mathfrak{g}}}$ をもち、それは $x_\theta(-1)^{k+1}\mathbf{1}$ で生成される (cf. [9]). 剰余代数 $L_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0) = V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)/\mathcal{J}$ を考える. これは、$\mathfrak{g}$ に付随する単純アフィン頂点作用

素代数と呼ばれる．$\mathcal{J}_{\hat{\mathfrak{g}}}$ は $M_{\hat{\mathfrak{h}}}(k,0)$-加群として完全可約で、(3.9) により $M_{\hat{\mathfrak{h}}}(k,0)$-加群として

$$\mathcal{J}_{\hat{\mathfrak{g}}} = \oplus_{\lambda\in Q} M_{\hat{\mathfrak{h}}}(k,\lambda) \otimes (\mathcal{J}_{\hat{\mathfrak{g}}} \cap N_{\hat{\mathfrak{g}},\lambda})$$

が成り立つ．

第 2 節の sl_2 の場合と同様に、$M_{\hat{\mathfrak{h}}}(k,0) \cap \mathcal{J}_{\hat{\mathfrak{g}}} = 0$ だから $M_{\hat{\mathfrak{h}}}(k,0) \hookrightarrow L_{\hat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ である．$M_{\hat{\mathfrak{h}}}(k,0)$-加群として $L_{\hat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ は完全可約で、

$$L_{\hat{\mathfrak{g}}}(k,0) = \oplus_{\lambda\in Q} M_{\hat{\mathfrak{h}}}(k,\lambda) \otimes K_{\hat{\mathfrak{g}},\lambda} \tag{3.12}$$

と直和分解される．ここで

$$K_{\hat{\mathfrak{g}},\lambda} = \{v \in L_{\hat{\mathfrak{g}}}(k,0) \,|\, h(m)v = \lambda(h)\delta_{m,0}v,\ h \in \mathfrak{h},\ m \geq 0\}$$

である．

$K(\mathfrak{g},k) = K_{\hat{\mathfrak{g}},0}$ とおく．これは $L_{\hat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ における $M_{\hat{\mathfrak{h}}}(k,0)$ の交換団である．sl_2 の場合の [3, Lemma 3.1] と同様の議論で、$\mathcal{I}_{\hat{\mathfrak{g}}} = \mathcal{J}_{\hat{\mathfrak{g}}} \cap N(\mathfrak{g},k)$ が $N(\mathfrak{g},k)$ の唯一つの極大イデアルであることがわかる．よって、$K(\mathfrak{g},k) \cong N(\mathfrak{g},k)/\mathcal{I}_{\hat{\mathfrak{g}}}$ は単純な頂点作用素代数である．$K(\mathfrak{g},k)$ を、$\mathfrak{g}$ に付随するパラフェルミオン頂点作用素代数という．任意の $\lambda \in Q$ について、$K_{\hat{\mathfrak{g}},\lambda}$ は既約 $K(\mathfrak{g},k)$-加群である．

ω_{aff}, $\omega_{\mathfrak{h}}$, ω, ω_α, $W^3_\alpha \in V_{\hat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ の $L_{\hat{\mathfrak{g}}}(k,0) = V_{\hat{\mathfrak{g}}}(k,0)/\mathcal{J}_{\hat{\mathfrak{g}}}$ における像を、同じ記号で表すことにする．定理 3.2 により、次の定理が得られる (cf. [5, Theorem 4.2])．

定理 3.3 パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(\mathfrak{g},k)$ は ω_α, W^3_α, $\alpha \in \Delta_+$ で生成される．

$\mathcal{I}_{\hat{\mathfrak{g}}}$ の基本的な性質として、次のことが知られている (cf. [5, Proposition 4.4])．

定理 3.4 $N(\mathfrak{g},k)$ の唯一つの極大イデアル $\mathcal{I}_{\hat{\mathfrak{g}}}$ は $x_{-\theta}(0)^{k+1}x_\theta(-1)^{k+1}\mathbf{1}$ で生成される．

この定理は、$V_{\hat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ を $\mathfrak{g}^\theta = \mathbb{C}x_\theta + \mathbb{C}h_\theta + \mathbb{C}x_{-\theta} \cong sl_2$ の加群と見て、定理 2.5 (1) と同様の議論により証明することができる．

$\alpha \in \Delta_+$ について、ω_α と W^3_α で生成される $K(\mathfrak{g},k)$ の部分頂点作用素代数を P_α とおく．P_α は $\widehat{P}_\alpha$ の準同型像である．P_α が単純な頂点作用素代数であるかどうかは自明ではないが、実際には次の定理が成り立つ (cf. [5, Propositions 4.5 and 4.6])．

定理 3.5 P_α, $\alpha \in \Delta_+$ は単純頂点作用素代数で、$K(sl_2,k_\alpha)$ と同型である．ここで、$K(sl_2,k_\alpha)$ は第 2 節の sl_2 に付随するパラフェルミオン頂点作用素代数 K_0 において k を k_α に取り替えたものである．

参考文献

[1] R. Blumenhagen, W. Eholzer, A. Honecker, K. Hornfeck and R. Hübel, Coset realization of unifying W-algebras, *Internat. J. Modern Phys.* **A10** (1995), 2367–2430.

[2] C. Dong, C.H. Lam, Q. Wang and H. Yamada, The structure of parafermion vertex operator algebras, *J. Algebra* **323** (2010), 371–381.

[3] C. Dong, C.H. Lam and H. Yamada, W-algebras related to parafermion algebras, *J. Algebra* **322** (2009), 2366–2403.

[4] C. Dong and J. Lepowsky, *Generalized Vertex Algebras and Relative Vertex Operators*, Progress in Math., Vol. **112**, Birkhäuser, Boston, 1993.

[5] C. Dong and Q. Wang, The structure of parafermion vertex operator algebras: general case, arXiv:0909.3872.

[6] I. B. Frenkel and Y. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, *Duke Math. J.* **66** (1992), 123–168.

[7] D. Gepner, New conformal field theories associated with Lie algebras and their partition functions, *Nucl. Phys.* **B290** (1987), 10–24.

[8] D. Gepner and Z. Qiu, Modular invariant partition functions for parafermionic field theories, *Nucl. Phys.* **B285** (1987), 423–453.

[9] V. G. Kac, *Infinite-dimensional Lie Algebras*, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[10] C.H. Lam and H. Yamada, Decomposition of the lattice vertex operator algebra $V_{\sqrt{2}A_l}$, *J. Algebra* **272** (2004), 614–624.

[11] J. Lepowsky and H.S. Li, *Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations*, Progress in Math., Vol. **227**, Birkhäuser, Boston, 2004.

[12] H.S. Li, On abelian coset generalized vertex algebras, *Commun. Contemp. Math.* **2** (2001), 287–340.

[13] A. B. Zamolodchikov and V. A. Fateev, Nonlocal (parafermion) currents in two-dimensional conformal quantum field theory and self-dual critical points in Z_N-symmetric statistical systems, *Sov. Phys. JETP* **62** (1985), 215–225.