数理解析研究所講究録
第 1687 巻 2010 年 131-138

クラス正則対称横断デザイン $\mathrm{STD}_5[20;4]$ についてと直交配列 $\mathrm{OA}(80,12,4,2)$ の存在

秋山献之 (akiyama@sm.fukuoka-u.ac.jp)
末竹千博 (suetake@csis.oita-u.ac.jp)
田中正紀 (mtanaka@ed.sojo-u.ac.jp)

§1. 導入

位数 2^t $(t \geq 2)$ の基本可換群上の一般アダマール行列についてはほとんど知られていない。そのようなもので一番小さいものは $EA(4)$ 上位数 20 の一般アダマール行列 $\mathrm{GH}(20, EA(4))$ である。(W. de Launey [2] V 章 §5) この講演では $\mathrm{GH}(20, EA(4))$ に対応するクラス正則対称横断デザイン $\mathrm{STD}_5[20;4]$ の自己同型群の可能性について報告する。

また, 副産物として得られた直交配列 $\mathrm{OA}(80,12,4,2)$ の存在について紹介する。(このパラメータでは, 今まで直交配列の存在が知られていなかった。) 一般アダマール行列を調べるのに, 対応する幾何, すなわちクラス正則対称横断デザインの自己同型群を調べて一般アダマール行列の構成に役立てたい。

定義 1　対称横断デザイン (symmetric transversal design) $\mathrm{STD}_\lambda[k;u]$ とは, 次の 3 つの条件を満たす結合構造 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ のことである。

(i) 各ブロック $B(\in \mathcal{B})$ は丁度 k 個の点を含む。
(ii) $\mathcal{P}$ は, 次の条件を満たす, サイズがすべて u である k 個の部分集合 $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \cdots, \mathcal{P}_{k-1}$ に分割される。($\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \cdots, \mathcal{P}_{k-1}$ は $\mathcal{D}$ の**点クラス (point classes)** と呼ばれる。) 相異なる 2 点 p, q に対して, p, q が異なる point classes に属するならば, p, q を含むブロックは丁度 λ 個あり, p, q が同じ point class に属するならば p, q を含むブロックは存在しない。
(iii) $\mathcal{D}$ の双対構造も上の条件 (i),(ii) を満たす。$\mathcal{D}$ の双対構造の点クラスを $\mathcal{D}$ の**ブロッククラス (block classes)** と呼ぶ。

注意　上の定義で $k = u\lambda$ が成り立つ。

§2. 準備

命題 1 ([4])　$\mathrm{STD}_\lambda[k;u]$ $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ の点クラスからなる集合を $\Omega = \{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \cdots, \mathcal{P}_{k-1}\}$ ブロッククラスからなる集合を $\Delta = \{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_{k-1}\}$ とする。φ を $\mathcal{D}$ の任意の自己同型とする。このとき φ は Ω と Δ 上の置換を引き起こす。

命題 2 $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B},I)$ を点クラス $\mathcal{P}_0,\mathcal{P}_1,\cdots,\mathcal{P}_{k-1}$ ブロッククラス $\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1,\cdots,\mathcal{B}_{k-1}$ を持つ $\mathrm{STD}_\lambda[k;u]$ とする。G を $\mathcal{D}$ の自己同型群で, G は任意の点クラスと任意のブロッククラスを不変にするとする。このとき, G は各点クラスと各ブロッククラス上半正則に作用する。$\therefore |G||u$

命題 2 において

- G を $\mathcal{D}$ の **elation group**, G の元を **elation** という。
- もし $|G|=u$ ならば, $\mathcal{D}$ は G に関して**クラス正則**と呼ばれる。

定義 2 $k,u,\lambda\in\mathbb{N},\quad u\geq 2,\ k=\lambda u$ とする。G を位数 u の有限群とする。$\varphi_{ij}\in G\quad(0\leq i,j\leq k-1)$ とし,

$$H=\begin{pmatrix}\varphi_{0\ 0} & \varphi_{0\ 1} & \cdots & \varphi_{0\ k-1}\\ \varphi_{1\ 0} & \varphi_{1\ 1} & \cdots & \varphi_{1\ k-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varphi_{k-1\ 0} & \varphi_{k-1\ 1} & \cdots & \varphi_{k-1\ k-1}\end{pmatrix}$$

が次の条件を満たすとき, H を群 G 上の k 次の**一般アダマール行列** $\mathrm{GH}(k;G)$ という。
$0\leq i_1\neq i_2\leq k-1$ に対して

$$\varphi_{i_1\ 0}\varphi_{i_2\ 0}{}^{-1},\ \varphi_{i_1\ 1}\varphi_{i_2\ 1}{}^{-1},\cdots\varphi_{i_1\ k-1}\varphi_{i_2\ k-1}{}^{-1}$$

は G の各元を λ 個ふくむ。

注意 $\mathrm{GH}(2\lambda,GF(2))$ は位数 2λ のアダマール行列である。

命題 3 $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B},I)$ を $\mathrm{STD}_\lambda[k;u]$ とする。$\Omega=\{\mathcal{P}_0,\mathcal{P}_1,\cdots,\mathcal{P}_{k-1}\}$ を点クラスからなる集合, $\Delta=\{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1,\cdots,\mathcal{B}_{k-1}\}$ をブロッククラスからなる集合とする。G を $\mathrm{Aut}\ \mathcal{D}$ の部分群で, $\mathcal{D}$ が G に関してクラス正則とする。各 $0\leq i\leq k-1$ に対して, $\mathcal{P}_i$ から 1 点 p_i をとり固定しておく。各 $0\leq j\leq k-1$ に対して, $\mathcal{B}_j$ から 1 ブロック B_j をとり固定しておく。$0\leq i,j\leq k-1$ に対して

$$D_{ij}=\{\varphi|\ p_i{}^{\varphi}IB_j\}$$

とおく。条件より, $D_{ij}\quad(0\leq i,j\leq k-1)$ は G の唯一つの元からなる。$D_{ij}=\{\varphi_{ij}\}\quad(0\leq i,j\leq k-1)$ とする。このとき

$$H=\begin{pmatrix}\varphi_{0\ 0} & \varphi_{0\ 1} & \cdots & \varphi_{0\ k-1}\\ \varphi_{1\ 0} & \varphi_{1\ 1} & \cdots & \varphi_{1\ k-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varphi_{k-1\ 0} & \varphi_{k-1\ 1} & \cdots & \varphi_{k-1\ k-1}\end{pmatrix}$$

は $GH(k,G)$ になる。

命題 4 $k,u,\lambda\in\mathbb{N},\ \ u\geq 2,\ k=\lambda u$ とする。G を位数 u の有限群とする。$H=(\varphi_{ij})_{0\leq i,j\leq k-1}$ を $GH(k,G)$ とする。$\mathcal{P}=\{(i,\alpha)|\ 0\leq i\leq k-1,\ \alpha\in G\}$, $\mathcal{B}=\{[j,\alpha]|\ 0\leq j\leq k-1,\ \alpha\in G\}$ とおく。各 $0\leq i\leq k-1$ に対して $\mathcal{P}_i=\{(i,\alpha)|\ \alpha\in G\}$, 各 $0\leq j\leq k-1$ に対して $\mathcal{B}_j=\{[j,\alpha]|\ \alpha\in G\}$ とおく。このとき, $\mathcal{P}$ と $\mathcal{B}$ の結合関係 I を

$$(i,\alpha)I[j,\beta]\Longleftrightarrow \alpha\beta^{-1}=\varphi_{ij}$$

と定義すると $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B},I)$ は点クラス $\mathcal{P}_0,\cdots,\mathcal{P}_{k-1}$ ブロッククラス $\mathcal{B}_0,\cdots,\mathcal{B}_{k-1}$ を持つ $\mathrm{STD}_\lambda[k;u]$ になる。更に, $\forall\alpha\in G$ に対して $\mathcal{P}\cup\mathcal{B}$ 上の置換 f_α を $(i,\beta)^{f_\alpha}=(i,\beta\alpha),\ \ [j,\gamma]^{f_\alpha}=[j,\gamma\alpha]$ と定義すると, f_α は $\mathcal{D}$ の自己同型写像になる。G の $\mathcal{P}\cup\mathcal{B}$ 上のこの作用は忠実になるので f_α を単に α と書くことにする。$\mathcal{D}$ は G に関してクラス正則になる。$\mathcal{D}$ を $\mathcal{D}(H)$ と書く。

定義 3 $u,k\in\mathbb{Z},\ \ u\geq 2,k\geq 2$ とする。$S=\{0,1,\cdots,k-1\}$ とおく。S 上の対称群を $\mathrm{Sym}\ S$ と書く。Λ を u 次の置換行列全体からなる集合とする。$f=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&k-1\\ f(0)&f(1)&\cdots&f(k-1)\end{pmatrix}\in\mathrm{Sym}\ S$ とし, $X_0,X_1,\cdots,X_{k-1}\in\Lambda$ とする。このとき (i) $(f,(X_0,X_1,\cdots,X_{k-1}))=(X_{ij})_{0\leq i,j\leq k-1}$ を

$$X_{ij}=\begin{cases}X_i & \text{if } j=f(i),\\ O & \text{otherwise}\end{cases}$$

と定義する。ここで, O は $u\times u$ 型の零行列。
(ii) $(f,{}^t(X_0,X_1,\cdots,X_{k-1}))=(X_{ij})_{0\leq i,j\leq k-1}$ を

$$X_{ij}=\begin{cases}X_j & \text{if } i=f(j),\\ O & \text{otherwise}\end{cases}$$

と定義する。ここで, O は $u\times u$ 型の零行列。

補題 1 $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B},I),\ \mathcal{D}'=(\mathcal{P}',\mathcal{B}',I')$ を $\mathrm{STD}_\lambda[k;u]$ とする。$\Omega=\{\mathcal{P}_0,\mathcal{P}_1,\cdots,\mathcal{P}_{k-1}\}$, $\Delta=\{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1,\cdots,\mathcal{B}_{k-1}\}$ をそれぞれ $\mathcal{D}$ の point classes, block classes からなる集合とする。$\Omega'=\{\mathcal{P}_0{}',\mathcal{P}_1{}',\cdots,\mathcal{P}_{k-1}{}'\}$, $\Delta'=\{\mathcal{B}_0{}',\mathcal{B}_1{}',\cdots,\mathcal{B}_{k-1}{}'\}$ をそれぞれ $\mathcal{D}'$ の point classes, block classes からなる集合とする。$\mathcal{P}_i=\{p_{iu},p_{iu+1},\cdots,p_{iu+u-1}\}$, $\mathcal{B}_i=\{B_{iu},B_{iu+1},\cdots,B_{iu+u-1}\}$, $\mathcal{P}_i{}'=\{p_{iu}{}',p_{iu+1}{}',\cdots,p_{iu+u-1}{}'\}$, $\mathcal{B}_i{}'=\{B_{iu}{}',B_{iu+1}{}',\cdots,B_{iu+u-1}{}'\}$ $(0\leq i\leq k-1)$ とする。対応する $\mathcal{D}$ と $\mathcal{D}'$ の結合行列をそれぞれ $L=(L_{ij})_{0\leq i,j\leq k-1}$, $L'=(L_{ij}{}')_{0\leq i,j\leq k-1}$ とする。ここで, $L_{ij},\ L_{ij}{}'\in\Lambda\ \ (0\leq i,j\leq k-1)$ このとき $\mathcal{D}\cong\mathcal{D}'\Longleftrightarrow\exists f,g\in\mathrm{Sym}\ S,\ \exists X_0,X_1,\cdots X_{k-1},Y_0,Y_1,\cdots,Y_{k-1}\in\Lambda$ s.t

$$(f,(X_0,X_1,\cdots,X_{k-1}))L(g,{}^t(Y_0,Y_1,\cdots,Y_{k-1}))=L'$$

補題 2 補題 1 の記号を使う。2 つの $\mathrm{STD}_\lambda[k;u]$ $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ の各 point class, 各 block class でそれぞれ点とブロックの番号を適当に打ち変えて $L_{i\ 0} = L_{i\ 0}' = E \quad (0 \le i \le k-1)$, $L_{0\ j} = L_{0\ j}' = E \quad (0 \le j \le k-1)$ とする。このとき, $\mathcal{D}$ と $\mathcal{D}'$ が同型であるための必要十分条件は,

$$Y_0{}^{-1} L_{f(i)\ g(0)}{}^{-1} L_{f(i)\ g(j)} L_{f(0)\ g(j)}{}^{-1} L_{f(0)\ g(0)} Y_0 = L_{ij}'$$
$$(0 \le i \le k-1,\ 1 \le j \le k-1)$$

を満たす $(f, g, Y_0) \in \mathrm{Sym}\ S \times \mathrm{Sym}\ S \times \Lambda$ が存在することである。

補題 3 $\mathcal{D}$ に関してのみ補題 1 の記号を使う。$\mathrm{STD}_\lambda[k;u]$ $\mathcal{D}$ の各 point class, 各 block class でそれぞれ点とブロックの番号を適当に打ち変えて $L_{i\ 0} = E \quad (0 \le i \le k-1)$, $L_{0\ j} = E \quad (0 \le j \le k-1)$ とする。このとき, $\mathcal{D}$ の任意の自己同型写像は

$$Y_0{}^{-1} L_{f(i)\ g(0)}{}^{-1} L_{f(i)\ g(j)} L_{f(0)\ g(j)}{}^{-1} L_{f(0)\ g(0)} Y_0 = L_{ij}$$
$$(0 \le i \le k-1,\ 1 \le j \le k-1)$$

を満たす $(f, g, Y_0) \in \mathrm{Sym}\ S \times \mathrm{Sym}\ S \times \Lambda$ で与えられる。ここで, $X_i = Y_0{}^{-1} L_{f(i)\ g(0)}{}^{-1} \quad (0 \le i \le k-1)$, $Y_j = L_{f(0)\ g(j)}{}^{-1} L_{f(0)\ g(0)} Y_0 \quad (1 \le j \le k-1)$

補題 4 $u = 2$ とする。$\mathcal{D}$ に関してのみ補題 1 の記号を使う。$\mathrm{STD}_\lambda[k;2]$ $\mathcal{D}$ の各 point class, 各 block class でそれぞれ点とブロックの番号を適当に打ち変えて $L_{i\ 0} = E \quad (0 \le i \le k-1)$, $L_{0\ j} = E \quad (0 \le j \le k-1)$ とする。このとき, $\mathcal{D}$ の任意の自己同型写像は

$$L_{f(i)\ g(0)}{}^{-1} L_{f(i)\ g(j)} L_{f(0)\ g(j)}{}^{-1} L_{f(0)\ g(0)} = L_{ij}$$
$$(0 \le i \le k-1,\ 1 \le j \le k-1)$$

を満たす $(f, g, Y_0) \in \mathrm{Sym}\ S \times \mathrm{Sym}\ S \times \Lambda$ で与えられる。ここで, $X_i = Y_0{}^{-1} L_{f(i)\ g(0)}{}^{-1} \quad (0 \le i \le k-1)$, $Y_j = L_{f(0)\ g(j)}{}^{-1} L_{f(0)\ g(0)} Y_0 \quad (1 \le j \le k-1)$

記号 1 G を有限集合 Λ 上の置換群とする。$\varphi \in G$ とする。このとき $F_\Lambda(\varphi) = \{x \in \Lambda | x^\varphi = x\}$, $\theta_\Lambda(\varphi) = |F_\Lambda(\varphi)|$ とおく。

補題 5 ([1], [6]) $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ を STD とする。Ω を $\mathcal{D}$ の point classes からなる集合とし, Δ を $\mathcal{D}$ の block classes からなる集合とする。$\varphi \in \mathrm{Aut}\ \mathcal{D}$ とする。このとき, 次が成り立つ。
(i) $\theta_\Omega(\varphi) \neq 0$, $\theta_\Delta(\varphi) \neq 0$,

$\exists \mathcal{Q}_0 \in F_\Omega(\varphi)$ s.t $\theta_{\mathcal{Q}_0}(\varphi) = 1$ または $\exists \mathcal{C}_0 \in F_\Delta(\varphi)$ s.t $\theta_{\mathcal{C}_0}(\varphi) = 1$ とする。
このとき, $\theta_{\mathcal{P}}(\varphi) = \theta_\Omega(\varphi)$, $\theta_{\mathcal{B}}(\varphi) = \theta_\Delta(\varphi)$,
$\theta_{\mathcal{Q}}(\varphi) = 1$ for $\forall \mathcal{Q} \in F_\Omega(\varphi)$, $\theta_{\mathcal{C}}(\varphi) = 1$ for $\forall \mathcal{C} \in F_\Delta(\varphi)$
(ii) $\theta_\Omega(\varphi) \neq 0$, $\theta_\Delta(\varphi) \neq 0$
$\exists \mathcal{Q}_0 \in F_\Omega(\varphi)$ s.t $\theta_{\mathcal{Q}_0}(\varphi) \geq 2$ または $\exists \mathcal{C}_0 \in F_\Delta(\varphi)$ s.t $\theta_{\mathcal{C}_0}(\varphi) \geq 2$ とする。
このとき, $\theta_{\mathcal{P}}(\varphi) = \theta_{\mathcal{B}}(\varphi)$, $\theta_\Omega(\varphi) = \theta_\Delta(\varphi)$,
$\theta_{\mathcal{Q}}(\varphi) = \theta_{\mathcal{C}}(\varphi) =$ 一定 $\quad (\forall \mathcal{Q} \in F_\Omega(\varphi),\ \forall \mathcal{C} \in F_\Delta(\varphi))$
(iii) $\theta_\Omega(\varphi) = 0$ ならば $\theta_{\mathcal{P}}(\varphi) = 0$, $\theta_{\mathcal{B}}(\varphi) = \theta_\Delta(\varphi)$
(iv) $\theta_\Delta(\varphi) = 0$ ならば $\theta_{\mathcal{B}}(\varphi) = 0$, $\theta_{\mathcal{P}}(\varphi) = \theta_\Omega(\varphi)$

定義 4 H_1, H_2 を k 次の Hadamard matrices とする。このとき, H_2 が H_1 の rows の任意の入れかえ, columns の任意の入れかえ, H_1 の任意の row で $+1$ と -1 を入れかえ, 任意の column で $+1$ と -1 を入れかえて得られるとき, H_1 は H_2 に**同値**であるという。

補題 5 H_1, H_2 を k 次の Hadamard matrices とする。このとき,

$$H_1 \text{ は } H_2 \text{ に同値} \Longleftrightarrow \mathcal{D}(H_1) \cong \mathcal{D}(H_2)$$

§3. 3つの $\mathrm{STD}_{10}[20;2]$ の全自己同型群

20次の非同値な Hadamard matrices は丁度3つある。それらは, Williamson 型 (H_1), Payley 型 (H_2), Hall 型 (H_3) である。([3])

$$H_1 = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&1&0\\
0&1&0&1&1&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\
0&1&1&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1\\
0&1&1&1&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&1\\
0&1&0&1&1&1&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&1&1\\
0&1&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&0\\
0&1&1&1&0&1&0&0&0&1&1&0&1&0&0&1&1&0&1&0\\
0&1&0&0&1&0&0&1&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0&0&1\\
0&1&1&0&0&1&1&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&1&1&0&1&1&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&1&1&1&0&1&0&0\\
0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&0&0&0\\
0&0&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&1\\
0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&0&1&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0&1&1&1
\end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&1&0\\
0&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&1\\
0&1&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1\\
0&1&1&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&1&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1\\
0&1&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0&1\\
0&1&0&1&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&0&1&1&1&1\\
0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&0&1&1&1\\
0&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&0&1&1\\
0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&0&1\\
0&1&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&0\\
0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0\\
0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&1&0&1&1\\
0&1&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&1&0&1
\end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\
0&0&0&1&1&0&1&1&1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&1&1&1&1&0\\
0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1\\
0&0&1&0&1&1&0&0&1&0&1&0&0&1&1&0&1&0&1&1\\
0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&1&1&0&0&1&0&1&1&1\\
0&1&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&1&0&0&0&1&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&0\\
0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&1&0&0&1\\
0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&0&1&1&0&1&1&1&0&0&1\\
0&1&0&0&1&0&1&0&0&1&1&0&0&1&1&1&0&1&1&0\\
0&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1\\
0&1&1&1&0&1&1&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&1&1&1&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&0&1&0&1\\
0&1&1&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&0
\end{pmatrix}$$

補題 6 (i) 任意の $i \in \{1,2,3\}$ に対して $\mathrm{Aut}\mathcal{D}(H_i)$ は point classes, block classes 上それぞれ可移に作用する。特に, $\mathrm{Aut}\mathcal{D}(H_2)$ は point classes, block classes 上それぞれ 2 重可移に作用する。
(ii) $|\mathrm{Aut}\mathcal{D}(H_1)| = 20 \times 144 \times 2$, $|\mathrm{Aut}\mathcal{D}(H_2)| = 20 \times 19 \times 9 \times 2$, $|\mathrm{Aut}\mathcal{D}(H_3)| = 20 \times 96 \times 2$

§4. クラス正則 $\mathrm{STD}_5[20;4]$ の自己同型群

補題 7 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を class regular $\mathrm{STD}_5[20;4]$ とする。このとき, $\mathrm{Aut}\mathcal{D}$ は $\{2,3\}$-group である。

証明 $\mathcal{D}$ が自己同型群 U に関して class regular とする。U は位数 4 の基本可換群であるか, または巡回群であることを注意しておく。W を U の位数 2 の部分群とする。$\varphi \in \mathrm{Aut}\mathcal{D}$ で $o(\varphi) = p(=$ 素数$)$ とする。$G = \langle \varphi, U \rangle$ とおく。Ω, Δ をそれぞれ $\mathcal{D}$ の point classes からなる集合, block classes からなる集合とする。
Step 1 $p \in \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$ ($\because$ φ は Ω 上の置換)
Step 2 $p \neq 5$ ($\because$ $\mathrm{GH}(20,W)$ に落す。補題 6)
Step 3 $p \neq 19$ ($\because$コンピュータ)
Step 4 $p \in \{2,3\}$ ($\because$ $\mathrm{GH}(20,W)$ に落す。補題 6) □

補題 8 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を $\mathrm{STD}_5[20;4]$ とする。$\varphi \in \mathrm{Aut}\mathcal{D}$, $o(\varphi) = 3$ とする。このとき
(i) $|F_{\mathcal{P}_i}(\varphi)|$, $|F_{\mathcal{B}_j}(\varphi)| \in \{0,1\}$ for $0 \leq i, j \leq 19$.

(ii) $a = |\{i|\ |F_{\mathcal{P}_i}(\varphi)| = 1\}|$, $b = |\{j|\ |F_{\mathcal{B}_j}(\varphi)| = 1\}|$ とするとき, もし $\mathcal{D}$ の dual 性を無視するならば $(a, b) = (2, 2)$ or $(2, 5)$。

証明　補題 5 と STD の結合行列 □

定理　任意の class regular $\mathrm{STD}_5[20; 4]$ の全自己同型群の位数は $2^{\alpha} \times 3$ または 2^{α} である。ここで, $\alpha \geq 2$

予想　任意の class regular $\mathrm{STD}_5[20; 4]$ $\mathcal{D}$ の全自己同型群の位数は 4 である。すなわち, Aut $\mathcal{D}$ は $\mathcal{D}$ の位数 4 の elation group である。

この研究の過程で次の $GF(4)$ 上の (4,12;5)-difference matrix を見つけた。

$$\left(\begin{array}{c|c|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\
0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 \\
0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\
\hline
0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\
0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\
0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 2 \\
\hline
0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 3 \\
0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0
\end{array}\right)$$

ここで, $GF(4) = \{0, 1, 2, 3\}$ $\quad (1 + 2 = 3,\ 1 + 3 = 2,\ 2 + 3 = 1)$

- これまで知られた $(4, k; 5)$-difference matrix の k の最大値は 9 であった。([2], VI 章 §17)

- 上記の difference matrix から直交配列 $OA(80, 12, 4, 2)$ を作ることが出来る。(もちろん new parameters である。([5]))

- 最近著者達はいくつかのクラス正則 $\mathrm{STD}_6[24; 4]$ (**new parameter**) を構成した。

参考文献

[1] K. Akiyama and C. Suetake, On $STD_{\frac{k}{3}}[k; 3]$'s, *Discrete Math.* **308**(2008), 6449–6465.

[2] C. J. Colbourn and J. H. Dinitz, Handbook of combinatorial designs (second edition), *Chapman & Hall/CRC* (2007), chapter V. 5 and chapter VI. 17.

[3] Jr. M. Hall, Hadamard matrices, Technical Report 32–761, Jet Propulsion Lab., Pasadena (1965).

[4] T. C. Hine and V. C. Mavron, Translations of symmetric and complete nets, *Math. Z.* **182**, (1983), 237–244.

[5] N. J. A. Sloane, Table of orthogonal arrays of strength 2 with up to 100 runs; http://www.research.att.com/ njas/doc/cent4.html.

[6] C. Suetake, Automorphism group of a symmetric transversal design $\mathrm{STD}_2[12;6]$, *J. of Statistical Theory and Practice* **3**, (2009), 431–445.