数理解析研究所講究録
第 1687 巻 2010 年 164-166

Morita equivalent blocks of general linear groups in non-defining characteristic

Naoko Kunugi (Tokyo University of Science)
功刀直子 (東京理科大学・理学部)

p を素数とする。G を有限群とし，k を標数が p の代数的閉体とする。群環 kG の両側イデアルへの直既約分解

$$kG = B_0 \oplus B_1 \oplus \cdots \oplus B_r$$

に現れる各直既約因子 B_i を kG のブロックとよぶ。自明な kG-加群を零化しないブロックが唯一つ存在し，それを主ブロックとよび，$B_0(G)$ で表す。

p とは異なる素数のべき q に対し，

$$e(q) := \min\{e \in \mathbb{N} | q^e \equiv 1 \pmod p\}$$

とし，$(q^{e(q)} - 1) = p^{a(q)}s$ (ただし，p と s は互いに素) とする。

有限群のモジュラー表現では，与えられた 2 つの群のブロックの加群の圏の関係を調べることは重要である。とくに Lie 型の有限群の無限系列で現れる群では，$e(q)$ および $a(q)$ が等しい 2 つの群のブロックの加群の圏の関係を考えることは，次の Donovan 予想と関係してとても重要である。

予想 1 **(Donovan, [1] 参照)** P を有限 p-群とする。不足群 P をもつ有限群のブロックの森田同値類は高々有限個ではないだろうか？

これに対し，例えば次の結果が知られている。

定理 2 **(Okuyama-Waki [6, 7])** $p = 3$ とし，q_1, q_2 はそれぞれ p とは異なる素数のべきで，$e(q_1) = e(q_2) = 2$, $a(q_1) = a(q_2) = 1$ が成立しているとする。このとき，主 3 ブロック $B_0(Sp_4(q_1))$ と $B_0(Sp_4(q_2))$ は森田同値である。

このような無限系列で現れる有限群のブロックの森田同値の問題に対し，本稿ではとくに一般線型群の場合について述べる。

以下，p は奇素数であるとする。$G_1 = GL_n(q_1)$, $G_2 = GL_n(q_2)$ $(p \nmid q_1, q_2)$ とする。考えるべき問題は次の場合で，多くの人により成立が期待されている。

予想 3 $e(q_1) = e(q_2) = e$ とし，$a(q_1) = a(q_2)$ とする。このとき，$B_0(GL_n(q_1))$ と $B_0(GL_n(q_2))$ は森田同値ではないだろうか？

共通のシロー p-部分群 P が可換である場合を考える。Puig [8] により，$e(q) = 1$ のとき，$B_0(GL_n(q))$ はシロー p-部分群 P の正規化群 $H(q) = N_{GL_n(q)}(P)$ の主ブロック $B_0(H(q))$ と森田同値になることが示されている。$e = e(q_1) = e(q_2) = 1$, $a(q_1) = a(q_2)$ のとき，$B_0(H(q_1))$ と $B_0(H(q_2))$ は同型となることが容易にわかり，これを介して，$B_0(GL_n(q_1))$ と $B_0(GL_n(q_2))$ は森田同値となる。$e > 1$ のとき，可換不足群予想 (Broué [2]) の解決に関する Chuang-Rouquier [3]，Hida-Miyachi [5, 4], Turner [9] の結果を組み合わせると，やはりシロー p-部分群の正規化群のブロックを介することにより，予想 3 が成立することがわかる。

次に，シロー p-部分群 P が非可換である場合を考える。このときは，P の正規化群のブロックとの間には森田同値も導来同値も存在せず，直接の議論が必要となる。

$e(q) = 1$ のとき，$GL_n(q)$ のシロー p-部分群が可換であるための必要十分条件は，$n < p$ である。よって，シロー p-部分群が非可換になる最初の場合は $n = p$ のときで，このときの $GL_p(q_i)$ のシロー p-部分群 P は，

$$\begin{aligned} P &\cong \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_p \end{pmatrix} ; t_i \in GF(q_i), {t_i}^{p^a} = 1 \right\} \rtimes \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & & \ddots \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &\cong (C_{p^a} \times \cdots \times C_{p^a}) \rtimes C_p \cong C_{p^a} \wr C_p \end{aligned}$$

となる。

主結果は次である。

定理 4 (Miyachi-Okuyama-K) $e = e(q_1) = e(q_2) = 1$ とし，$(q_1 - 1)_p = (q_2 - 1)_p = p^a$ とする。また，$G_i = GL_p(q_i)$ $(i = 1, 2)$ とする。このとき，$B_0(G_1)$ と $B_0(G_2)$ は森田同値である。とくに，P を G_1 と G_2 の共通のシロー p-部分群としたとき，vertex が $\Delta(P)$ の Scott $k[G_1 \times G_2]$-加群 M が，森田同値を与える。

ここで，

$$\Delta(P) := \{(x, x) \in G_1 \times G_2 ; x \in P\}$$

とし，vertex が $\Delta(P)$ の Scott 加群とは，${k_{\Delta(P)}}^{\uparrow G_1 \times G_2}$ の直既約因子で，自明な加群 $k_{G_1 \times G_2}$ を部分加群にもつ唯一つの因子のことである。この Scott 加群 M により与えられる森田同値は，自明な加群を自明な加群に移し，各 $Q \leq P$ に対し，$B_0(C_{G_1}(Q))$ と $B_0(C_{G_2}(Q))$ の間の森田同値をも引き起こす，とても性質のよいものである。

参考文献

[1] J. L. Alperin, Local representation theory, Proc. Sym. Pure Math. **37** (1980), A.M.S., Providence, RI, 369–375.

[2] M. Broué, Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées, *Astérisque* **181-182** (1990), 61–92.

[3] J. Chuang, R. Rouquier, Derived equivalences for symmetric groups and sl2-categorification, Ann. of Math. **167** (2008), 245–298.

[4] A. Hida, H. Miyachi, Module correspondences in Rouquier blocks of finite general linear groups, to appear in Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups, Progress in Mathematics, Birkhäuser.

[5] H. Miyachi, Unipotent blocks of finite general linear groups in non-defining characteristic, Ph. D. thesis, Chiba University 2001.

[6] 奥山哲郎, Some examples of derived equivalent blocks of finite groups, in 第6回多元環の表現論シンポジウム報告集 (越谷重夫, 佐藤真久偏) 1996.

[7] T. Okuyama, K. Waki, Decomposition numbers of Sp$(4, q)$, J. Algebra **199** (1998), no. 2, 544–555.

[8] L. Puig, Algèbres de source de certains blocs des groupes de Chevalley, Astérisque **181–182** (1990), 221–236.

[9] W. Turner, Equivalent blocks of finite general linear groups in non-describing characteristic, J. Algebra **247** (2002), no. 1, 244–267.