

# Rank 2 のシャープ指標を持つ有限群について

千葉大学大学院自然科学研究科 與口卓志 (Takashi Yoguchi)  
Graduate School of Science and Technology,  
Chiba University

## 1. 導入

$G$  を有限群とする.  $G$  の通常表現の指標  $\chi$  に対して,  $L = L(\chi) = \{\chi(g) \mid 1 \neq g \in G\}$  とおいて次のような積を定義する:

$$sh(\chi) := \prod_{\ell \in L} (\chi(1) - \ell). \tag{1.1}$$

$L$  が Galois 群の作用で不変な集合であるから  $sh(\chi)$  は有理整数になり, さらに  $|G|$  で割り切れることが知られている. これは元々置換群論の文脈で発見された事実であるが, 我々は  $\chi$  が置換指標とは限らない一般の場合について関心がある. 特に,  $sh(\chi)$  が  $|G|$  と一致してしまうとき, 言い換えれば  $sh(\chi)$  がある種の最小性を満たすときについて調べている.

**定義 1.**  $sh(\chi) = |G|$  が成り立つとき,  $\chi$  を type  $L$  のシャープ指標という.

この特別なケースに関してはこれまで多くの研究がなされてきたが, 完全な特徴付けはまだ為されていない. 直感に反して,  $L \not\subset \mathbb{Z}$  となるシャープ指標は非常に少なく, Alvis-Nowaza [1] により完全に決定されている. そのため,  $L \subset \mathbb{Z}$  の場合が本質的な問題となる. 加えて, 明らかに  $sh(\chi + 1_G) = sh(\chi)$  ( $1_G$  は  $G$  の単位指標) であるから, シャープ指標を考えるときは常に  $(\chi, 1_G)_G = 0$  と仮定してよい. 既知の例をいくつか紹介しておく.

**例 1.**  $\rho_G$  を群  $G$  の正則指標とすれば,  $\chi = \rho_G - 1_G$  は type  $\{-1\}$  のシャープ指標である. これはどんな群でも必ず持っているので, 自明なシャープ指標と呼ばれる.

**例 2.** type  $\{\ell, \ell + 1\}$  のシャープ指標は 2-transitive Frobenius 群の置換指標に限られる.

**例 3.** type  $\{\ell, \ell + 2\}$  のシャープ指標は分類済みである (cf. [2].) また, type  $\{\ell, \ell + 3\}$  のシャープ指標は  $Z(G) > 1$  という条件の下で分類されている (cf. [5].)

$L \subset \mathbb{Z}$  のとき,  $|L|$  を  $\chi$  の rank という. 本稿では rank 2 のシャープ指標のうち

- $L = \{\ell, \ell + p\}$  ( $p$ : 奇素数,  $\ell \in \{-1, p-1\}$ ),
- $Z(G) > 1$

を満たすものを扱う.  $p = 3$  としたときがちょうど Nozawa-Uno [5] の結果であり, それを一般化した形になっている. 上の仮定のもとで  $\chi$  および  $G$  に関する様々な制約が得られることは, 2008 年 6 月に千葉大学の野澤教授と行った共同講演 [6] の中で既に指摘していた. その後の研究によりこのような  $(G, \chi)$  を決定することに成功した. 以下が主結果である:

**定理 1.**  $G$  を自明でない中心  $Z = Z(G)$  を持つ有限群とする. もし  $G$  が type  $\{\ell, \ell + p\}$  ( $p$ : 奇素数,  $\ell \in \{-1, p-1\}$ ) のシャープ指標を持つならば,  $Z$  は位数  $p$  の巡回群であり, さらに次のいずれかが成り立つ:

- (1)  $|G| = p^3(p-1)$ ,  $G$  は  $\text{ES}(p^3, p^2)$  の自己同型群と同型,
- (2)  $G \cong Z \times \text{D}(2p)$ ,
- (3)  $G \cong Z \times \text{PSL}(2, q)$  with  $q = p \pm 1$  or  $q = 2p \pm 1$ ,
- (4)  $G \cong Z \times \text{Sz}(q)$  with  $q = p + 1$ ,
- (5)  $p = 5$ ,  $G \cong Z \times \text{PSL}(3, 4)$ ,
- (6)  $p = 3$ ,  $G$  は  $M_{22}$  or  $A_6 : 2$  の triple cover,
- (7)  $p = 3$ ,  $|G| = 108$ ,  $G/Z$  : Frobenius,

ここで  $\text{D}(2p)$  は位数  $2p$  の二面体群を,  $\text{ES}(p^3, q)$  は位数  $p^3$ , exponent  $q$  の非可換群を表す. また, (6) に現れる  $A_6 : 2$  は 9 点上の Mathieu 群  $M_9$  と同型であることが分かっている.

上の定理において,  $\ell \in \{-1, p-1\}$  という制限の意味するところは次節 2.1 で説明する. この制限を取り除いた場合にどの程度の類似が成り立つかは当然興味のあることであろう. これについては 4 節で多少の考察を与えている.

一方で,  $G$  が自明な中心を持つ場合についてはあまり手掛かりが得られていない. この点については 5 節で触れる.

紙幅の都合上, 本稿で定理 1 の完全な証明を与えることはできない. 従って, 分類のためにどのような事実を用いて, いかなるアプローチにより証明が完成されたか概略を記すことにする. 厳密な証明は現在投稿中の別論文で発表される見通しである.

## 2. 既知の結果

この節では過去の講演 [6] で既に得られていた結果を再確認する. 以下,  $p$  を奇素数とする.  $\chi$  が type  $\{\ell, \ell + p\}$  ( $\ell \in \{-1, 1 - p\}$ ) のシャープ指標であれば,  $G$  の中心  $Z$  は位数  $p$  の巡回群であることが示されている. そこで,  $Z = \langle z \rangle$  とおく.

### 2.1 $\chi$ の既約成分 $\psi, \theta_i$

一般に,  $\chi$  が type  $\{a, b\}$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ) のシャープ指標であれば  $\chi$  のノルム  $(\chi, \chi)_G$  は

$$(\chi, \chi)_G = 1 - ab \quad (2.1)$$

で与えられる. いま我々の考えている  $L$  に対してこれを使うと,  $(\chi, \chi)_G = p$  を得る. 実際,  $\chi$  は相異なる  $p$  個の既約成分を持ち, 次のように  $\chi$  を既約分解することができる.

**補題 1.**  $G, \chi, Z$  を定理 1 の通りとするとき,

$$\chi = \psi + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{p-1}, \quad (2.2)$$

$$Z \leq \text{Ker } \psi, \quad \{\theta_i\} : \text{単一の Galois 共役の類} \quad (2.3)$$

なる  $\chi$  の既約分解が存在する.

上の補題 1 において,  $\psi$  および  $\theta_i$  が既約となることは  $(\chi, \chi)_G = p$  を用いて結論される. 実は, 単に (2.2) と同様の分解を得るだけならば  $\ell \notin \{-1, 1 - p\}$  であってもよい. しかし, その場合は  $\psi$  や  $\theta_i$  が必ずしも既約にはならない. 言い換えれば, 定理 1 の  $\ell \in \{-1, 1 - p\}$  という条件は,  $\psi$  や  $\theta_i$  の既約性を仮定しているのである. 既約性を用いない部分については他の  $\ell$  に対しても問題なく成り立つ. たとえば, 次に述べる補題 2 は既約性を要求しない.

$\psi, \theta_i$  の取りうる値は詳しく分かっており, 特に  $p'$ -元における値は完全に決まる. これを正確に記述するためにはいくつかのパラメータを用意しなければならない. 非常に天下りのであるが, 記号  $k, \gamma, \beta_g$  を以下のように定義する:

- $\chi(1) - \ell = pk$  とおく.
- $\chi(z) = \ell$  のとき  $\gamma = 0$ ,  $\chi(z) = \ell + p$  のとき  $\gamma = 1$  と定める.
- $g \in G - Z$  に対して,  $\beta_g = \#\{x \in Z \mid \chi(gx) = \ell + p\}$  とおく.

このとき、シャープ指標の定義から

$$|G| = (\chi(1) - \ell)(\chi(1) - \ell - p) = p^2 k(k - 1) \quad (2.4)$$

と書き表せることに注意する. また, 任意の  $q \in \pi(k) - \{p\}$ ,  $r \in \pi(k - 1) - \{p\}$  に対して  $G$  は位数  $qr$  の元を持たないことが簡単に確認できる.

**補題 2.** 上の記号のもとで次が成り立つ:

- (1)  $\psi(1) = \ell + k + (p - 1)\gamma$ ,  $\theta_i(1) = k - \gamma$  である.
- (2)  $\psi(g) = \ell + \beta_g$  が任意の  $g \in G - Z$  に対して成り立つ.
- (3)  $o(x) \mid k$  なる  $p'$ -元  $x (\neq 1)$  に対して

$$\chi(x) = \ell, \quad \beta_x = (p - 1)\gamma, \quad \theta_1(x) = -\gamma.$$

- (4)  $o(x) \mid k - 1$  なる  $p'$ -元  $x (\neq 1)$  に対して

$$\chi(x) = \ell + p, \quad \beta_x = 1 + (p - 1)\gamma, \quad \theta_1(x) = 1 - \gamma.$$

もっとも注目すべき点は,  $\psi$  の取る値が  $\beta_g$  によって決定されることである. 特に,  $\psi$  は  $G - Z$  の上で高々  $p + 1$  種類の値しか取りえない. さらに,  $p'$ -元  $x \neq 1$  における  $\psi, \theta_i$  の値は,  $o(x)$  が  $k, k - 1$  のどちらを割り切るかのみに依存して決まる. これより次の系が従う.

**系 3.** 以下が成り立つ:

- (1)  $\gamma = 0$  ならば,  $\theta_1$  は  $G$  の principal  $p$ -block に属する.
- (2)  $\gamma = 1$  ならば,  $\psi$  は  $G$  の principal  $p$ -block に属する.

いずれの場合においても  $O_{p'}(G) = 1$ ,  $O_{p'}(G/Z) = 1$  を得る.

証明は単に  $\sum_x \psi(x)$  (ここで,  $x$  はすべての  $p'$ -元を動く) などを計算するだけであるが, 事前に  $\text{Ker } \psi$  および  $\text{Ker } \theta_i$  が  $p$ -群であることを証明しておかなければならない. もちろん,  $\psi, \theta_i$  の次数もそれらが  $p'$ -元で取りうる値も分かっているのでこれはすぐ確認できる.

## 2.2 $G/Z$ の素数グラフ

一般に, 有理整数値の指標  $\phi$  と  $p$ -元  $g_1, g_2$  に対して  $\phi(g_1) \equiv \phi(g_2) \pmod{p}$  が成り立つ. これを我々の  $\psi$  に適用すると,  $L(\psi) \subseteq \{\ell, \ell + 1, \dots, \ell + p\}$  から次の補題を得る.

補題 4. 次のいずれかが成り立つ:

(A)  $\exists C \in \{1, 2, \dots, p-1\}; \beta_g = C$  for all  $p$ -elements  $g \in G - Z$ ,

(B)  $\beta_g \in \{0, p\}$  for all  $p$ -elements  $g \in G - Z$ .

さらに, (A)  $\iff p^3 \nmid |G|$  である.

(B) のとき,  $p$  は必ず  $k - \gamma$  を割り切る. やや横着ではあるが,  $\{k, k-1\}$  のうち  $k - \gamma$  と異なるものは  $k + \gamma - 1$  と書き表すことができる. いたずらに記号を増やさないため, この書き方をしばしば用いる. (A), (B) のそれぞれにおいて次の事実が成り立つのであった:

補題 5.  $p^3 \nmid |G|$  とする. このとき,  $k(k-1)$  の任意の素因数  $q$  に対して,  $G/Z$  は位数  $pq$  の元を持たない.

補題 6.  $p^3 \mid |G|$  とする. このとき,  $k + \gamma - 1$  の任意の素因数  $q$  に対して,  $G/Z$  は位数  $pq$  の元を持たない.

これより,  $G/Z$  の素数グラフ  $\Gamma(G/Z)$  は非連結である. Williams の分類 [7] によれば, 素数グラフが非連結な群は

- (a) Frobenius or 2-Frobenius,
- (b) non-abelian simple,
- (c) an extension of a  $\pi_1$ -group by a simple group,
- (d) an extension of a simple by a  $\pi_1$ -group,
- (e)  $\pi_1$  by simple by  $\pi_1$

のいずれかの構造を持つ. ここで  $\pi_1$  は素数グラフの連結成分のうち 2 を含むものを表す. これらの中で (a), (c), (e) はいずれも後述する補題 7 の条件を満たす. 一方,  $G/Z$  が (b), (d) を満たす場合には有限単純群の分類を用いて組成因子に制限が得られる.

### 3. 証明のアウトライン

$\bar{G} = G/Z$  とおく. 前節で述べた通り,  $\bar{G}$  は (a) ~ (e) のいずれかの構造を持つことが分かっている. それぞれの場合を順に見ていこう.

Case 1.  $\bar{G}$  が (a), (c), (e) を満たすとき

このとき,  $\bar{G}$  の自明でない正規部分群  $\bar{N}$  と  $\Gamma(\bar{G})$  のある連結成分  $\pi$  があって

$$p \in \pi(\bar{N}) \subseteq \pi \quad (3.1)$$

が満たされる. もし  $|G|$  が  $p^3$  で割り切れないならば, 前節 2.2 の補題 5 により  $\pi = \{p\}$ ,  $|\bar{N}| = p$  を得る. 実は,  $|G|$  が  $p^3$  で割り切れるときにも (非常に煩雑になるが)  $\bar{N}$  が  $p$ -群であることが示せる. より強く, 次の補題が成り立つ.

**補題 7.**  $\bar{G}$  が (3.1) を満たす  $\bar{N}$  を持つならば, 次が成り立つ:

(1)  $\bar{N}$  は可換  $p$ -群で,  $|\bar{N}| \in \{p, p^2, k\}$  である.

(2)  $k \notin \{2, 4, p\}$  ならば,  $|\bar{N}| = k$  である.

特に,  $\bar{N}$  は  $\pi_1$ -群ではないから,  $\bar{G}$  が (c), (e) の構造を持つことはありえない. ゆえに  $\bar{G}$  は Frobenius か 2-Frobenius である. これにより, 定理 1 の (1), (2), (7) の群が得られる.

Case 2.  $\bar{G}$  が (b), (d) を満たすとき

この場合,  $\bar{G}$  はある非可換単純群  $\bar{S}$  を  $\pi_1$ -群で拡大したものになる. 明らかに

$$|\bar{S}|_{\pi_1} \mid |\bar{G}|_{\pi_1}, \quad |\bar{S}|_{\pi'_1} = |\bar{G}|_{\pi'_1} \quad (3.2)$$

が成り立つ. ここで,  $\pi_1$  は  $\Gamma(\bar{G})$  の連結成分であるから, もちろん  $\bar{S}$  が与えられただけでは決まらない. 便宜上

$$\pi_S := \Gamma(\bar{S}) \text{ の連結成分のうち 2 を含むもの} \quad (3.3)$$

と定義する.  $\pi_S \subseteq \pi_1 \cap \pi(S)$  かつ  $\pi'_1 \cap \pi(S) \subseteq \pi'_S$  である.

いま,  $O_{p'}(\bar{G}) = 1$  より  $p \in \pi(\bar{S})$  であるから,  $p$  は  $|\bar{S}|$  を見れば決まる. また,  $\Gamma(\bar{G})$  の中で  $k$  の素因数と  $k-1$  の素因数はどれも辺で繋がらないから,  $|\bar{G}|_{\pi_1}$  は  $pk$  または  $p(k-1)$  の約数である. これは同時に,  $|\bar{G}|_{\pi'_1} (= |\bar{S}|_{\pi'_1})$  が  $k-1$  または  $k$  の倍数であることも示している. 従って,  $k_0 \in \{k, k-1\}$  を適切に選べば

$$|\bar{S}|_{\pi_S} \mid pk_0, \quad k_0 \pm 1 \mid |\bar{S}|_{\pi'_S} \quad (3.4)$$

となる. すなわち,  $p$  だけでなく  $k$  もまた  $\bar{S}$  によってほとんど決定されてしまうのである. そして, 同じく (3.4) より  $\bar{S}$  は次の命題の仮定を満たすことが分かる.

**命題 8.**  $S$  を有限単純群,  $\pi_S$  を  $S$  の素数グラフ  $\Gamma(S)$  の連結成分のうち頂点 2 を含むものとする. もし  $S$  が条件

$$\frac{|S|_{\pi_S}}{\max \pi_S} \leq |S|_{\pi'_S} + 1. \quad (3.5)$$

を満たすならば,  $S \in \{M_{11}, M_{22}, J_1, \text{PSL}(2, q), \text{PSL}(3, 4), \text{Sz}(q)\}$  である.

上の命題は, Williams [7] と Iiyori-Yamaki [4] を頼りに有限単純群を順に見ていくことでおのずと得られる. これにより  $\bar{S}$  の候補が絞込まれる.  $\bar{S} \not\cong \text{PSL}(2, q), \text{Sz}(q)$  のときはこれまでの手掛かりだけで十分  $G$  を決定できる.

$\bar{S} \cong \text{PSL}(2, q), \text{Sz}(q)$  のときはもう少し一般論を続けなければならない.  $G$  が  $|Z(G)| = p$  なる中心拡大であることに着目する.  $\text{PSL}(2, q)$  ( $q \neq 9$ ), および  $\text{Sz}(q)$  の Schur multiplier は 2-群なので,  $\bar{S} \not\cong \text{PSL}(2, 9)$  ならば  $Z$  が  $G$  の直積因子になることが示せる. これを確認してしまえば, あとは簡単に  $G$  が決定される. 以上が定理 1 の証明の概略である.

#### 4. $\ell \notin \{-1, p-1\}$ の場合

今回得た定理は,  $\ell \in \{-1, 1-p\}$  かつ  $Z(G) > 1$  という条件のもとで type  $\{\ell, \ell+p\}$  のシャープ指標を分類している. この余計な条件は, 将来的に取り除かれなければならない. 本節では,  $\ell \notin \{-1, 1-p\}$  の場合について現在知られている事実を紹介する.

この場合  $|Z(G)| = p$  が成り立つか否かは知られていないが,  $Z(G)$  が  $p$ -群になることは分かっている. そこで,  $Z(G)$  から位数  $p$  の元  $z$  を 1 つ選んで固定し,  $Z = \langle z \rangle$  とおく. 既に 2 節で触れた通り, 補題 1 と同じ論法で

$$\chi = \psi + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{p-1}, \quad (4.1)$$

$$Z \leq \text{Ker } \psi, \quad \{\theta_i\} : \text{単一の Galois 共役の類} \quad (4.2)$$

と  $\chi$  を分解できるが, このときに  $\psi$  や  $\theta_i$  が既約になるとは限らない. そのため, たとえば系 3 は主張自体が意味を持たなくなる. 反面, 既約性に依存しない部分は  $\ell \notin \{-1, p-1\}$  のときにも成立する. 特に, 次の事実が成り立つ:

**命題 9.**  $\psi, \theta_i$  が既約でない場合も補題 2, 4, 6 は成り立つ.

補題 6 がそのまま成り立つので,  $|G|$  が  $p^3$  で割り切れるならば  $\Gamma(G/Z)$  は再び非連結になり, Williams [7] の恩恵を受けることができる. もし  $|G|$  が  $p^3$  で割り切れないときにも  $\Gamma(G/Z)$  が非連結になってくれるならば, 問題の解決は容易と思われる.

残念ながら、補題 5 の証明は系 3 を利用しているので  $l \notin \{-1, 1-p\}$  の場合にそのまま流用することはできない。もし  $\theta_i$  が既約になるならば代わりに次の命題が使える:

**命題 10.**  $\theta_i$  が既約, かつ  $|G|$  が  $p^3$  で割り切れないとする。このとき, どんな  $q \in \pi(k-\gamma)$  に対しても  $G/Z$  は位数  $pq$  の元を持たない。特に,  $\Gamma(G/Z)$  は非連結である。

たとえば,  $l \in \{-2, 2-p\}$  のときは (2.1) より  $(\chi, \chi)_G = 2p-3$  であるから, 必然的に  $\theta_i$  が既約になる。しかし,  $\theta_i$  の既約性がどの程度期待できるかは不明である。一般の場合に問題を解決するには, もっと新しいアイデアが必要かもしれない。

最後に, 現在分かっている  $l \notin \{-1, 1-p\}$  の例を紹介しておく。

**例 4.**  $\text{Aut ES}(p^3, p^2)$  は  $\text{type } \{-2, p-2\}$  のシャープ指標を持つ。

これは定理 1 の (1) の群であるから新しい例ではない。数式処理ソフト GAP によって他の例を探しているが, 今のところ見つかっていない。

## 5. 自明な中心を持つ場合

現在残っているもっとも大きな問題は,  $Z(G) = 1$  のときにシャープ指標を調べる有効な手段が見つかっていないことである。[6] により,  $Z(G) = 1$  のときも  $|G|$  が  $p$  の倍数になることは保証されているが, それ以上のことは知られていない。

$Z(G) > 1$  のときは素数グラフが分類の決め手となったが,  $Z(G) = 1$  のときは  $G$  の素数グラフが連結になる例も非連結になる例もある。以下, いくつか知られている例を紹介する。

**例 5.** 位数 3 の巡回群を  $S_6$  で拡大した群  $G = 3.S_6$  で,  $\text{type } \{-1, 2\}$  のシャープ指標  $\chi$  を持つものが存在する。このとき,  $G$  の素数グラフ  $\Gamma(G)$  は連結で,  $\chi = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3$ ,  $\chi_1(1) = 1$ ,  $\chi_2(1) = 16$ ,  $\chi_3(1) = 30$  と既約分解される。

**例 6.** 一般に, 有限群  $G$  が

- $\text{type } \{-p, 0\}$  のシャープ指標  $\tau$
- 指数  $p$  の正規部分群  $N$

を両方持つならば,  $G$  は  $\text{type } \{-1, p-1\}$  のシャープ指標  $\chi$  を持つことが知られている。このとき  $\Gamma(G)$  は連結で,  $\chi = \lambda_1 + \cdots + \lambda_{p-1} + \tau$ ,  $\lambda_i(1) = 1$  となる (講演の中では誤って  $\Gamma(G)$  が非連結であると紹介した。お詫びとともに訂正致します。)



例 7.  $\Gamma(G)$  が非連結になる例. 位数 150 の可解群  $G \cong E(5^2) : D_6$  であって, 位数 25 の (唯一つの) 極小正規部分群を持つ群は type  $\{-1, 4\}$  のシャープ指標  $\chi$  を持つ. このとき,  $\Gamma(G)$  は非連結である. また,  $\chi = \psi + \theta_1 + \cdots + \theta_4$ ,  $\psi(1) = 2$ ,  $\theta_i(1) = 3$  と分解される.

上に挙げた例はどれも比較的位数の小さい正規  $p$ -部分群を持っている.  $Z(G) > 1$  のときにも  $|Z(G)| = p$  が成り立っていたのだから, もしかするとこのような正規部分群が重要になるのかもしれない. 正規  $p$ -部分群の存在を仮定したときの分類が次の目標である.

なお, これらの群はどれも唯一つの極小正規部分群を持つ群 (いわゆる monolithic group) になっているが, そのような群がどの程度の割合を占めるかは不明である. type  $\{-1, p-1\}$  のシャープ指標をもつ群で複数の極小正規部分群を持つものとしては, 位数  $2p^2$  の Frobenius 群が存在する.

## 参考文献

- [1] D. Alvis and S. Nozawa, Sharp characters with irrational values, J. Math. Soc. Japan 48 (1996) 567-591.
- [2] P.J. Cameron, T. Kataoka and M. Kiyota, Sharp characters of finite groups of type  $\{-1, 1\}$ , J. Algebra 152 (1992) 248-258.
- [3] P.J. Cameron and M. Kiyota, Sharp characters of finite groups, J. Algebra 115 (1988) 125-143.
- [4] N. Iiyori and H. Yamaki, Prime graph components of the simple groups of Lie type over the field of even characteristic, J. Algebra 155 (1993) 335-343.
- [5] S. Nozawa and M. Uno, On sharp characters of rank 2 with rational values, J. Algebra 286 (2005) 325-340.
- [6] S.Nozawa and T. Yoguchi, “ランク 2 のシャープ指標について”, 第 25 回代数的組合せ論シンポジウム報告集 (2008), 115-120, 北海道大学.
- [7] J.S. Williams, Prime graph components of finite groups, J. Algebra 69 (1981) 487-513.