

可逆系における 1 パラメータ周期軌道族の分岐

新潟大学自然科学系 矢ヶ崎 一幸 (Kazuyuki Yagasaki)
Institute of Science and Technology
Niigata University

1. はじめに

Melnikov の方法 [1, 2] は, 近可積分系に対して, カオスなど複雑なダイナミクスの発生を理解する上で重要なホモ/ヘテロクリニック軌道の存在を示す手法であり, さまざまな拡張がなされている (例えば, [3]). また, 類似の方法により周期軌道の存在や分岐を解析することも可能である [1, 2, 4]. 講演者は以前に, ハミルトン系に限られるものの, そのアイデアが非近可積分系のホモ/ヘテロクリニック軌道に対しても有効であることを示し [5, 6], 微分ガロア理論 [7] との関連性を論じている [8]. 本報告では, さらに以前のこれらアプローチを非近可積分な可逆系の周期軌道の分岐に対して拡張する.

2. 一般理論

次の形の 4 次元系を考える.

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^4 \tag{1}$$

ここで, $f: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ は C^r 級 ($r \geq 2$) とする. 以下のことを仮定をする.

(A1) 式 (1) は可逆的である. すなわち, (線形的な) 対合 $R: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ が存在して

$$f(Rx) + Rf(x) = 0 \quad \text{for } \forall x \in \mathbb{R}^4 \tag{2}$$

を満たす. さらに, 不変平面 $\text{Fix}(R) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Rx = x\}$ の次元は $\dim \text{Fix}(R) = 2$ とする.

容易に確かめられるように, 式 (1) において $x(t)$ が解ならば, $Rx(-t)$ も解となる. 特に, $x(t) = Rx(-t)$ となる時, 解 $x(t)$ (および対応する軌道) は対称であるという. また, 軌道 $x(t)$ は不変平面 $\text{Fix}(R)$ を交差するときそのときに限って対称となる.

(A2) 周期 $T^\alpha > 0$ を有する対称周期軌道の 1 パラメータ族 $x^\alpha(t)$, $\alpha \in \mathcal{A}$, が存在する. ここで, $\mathcal{A} (\neq \emptyset)$ は \mathbb{R} のある開区間である.

$x^\alpha(t)$ は対称なので平面 $\text{Fix}(R)$ と交差し, 一般性を失わずに $x^\alpha(0) \in \text{Fix}(R)$ と仮定する. さらに, $x^\alpha(t)$ は t だけではなく, α についても C^r 級とする. 仮定 (A1) から $\mathbb{R}^4 = \text{Fix}(R) \oplus \text{Fix}(-R)$ と分解できるので, 内積 “ \cdot ” を

$$\text{Fix}(-R) = \text{Fix}(R)^\perp \tag{3}$$

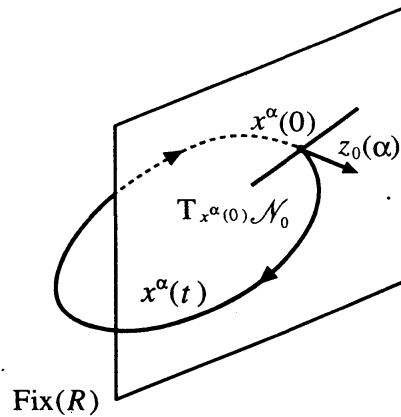


図 1. 相空間の構造

となるように定める.

仮定 (A2) の 1 パラメータ周期軌道族を $\mathcal{N} = \{x^\alpha(t) \mid t \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathcal{A}\}$ と表し, $\mathcal{N}_0 = \{x^\alpha(0) \mid \alpha \in \mathcal{A}\} \subset \text{Fix}(R) \cap \mathcal{N}$ とする. $z_0(\alpha) = \dot{x}^\alpha(0)/|\dot{x}^\alpha(0)|$, $Z(\alpha) = \text{span}\{z_0(\alpha)\}$ とおき, 次式によって 2 次元空間 $\bar{Z}(\alpha)$ を定義する.

$$\mathbb{R}^4 = Z(\alpha) \oplus T_{x^\alpha(0)}\mathcal{N}_0 \oplus \bar{Z}(\alpha).$$

Gronwall 不等式 (例えば, [10]) を用いると, 次のことが示される.

補題 1 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して, $t = 0$ において $\text{Fix}(R)$ 上の点 $x = x^\alpha(0) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ を通過する軌道は次式によって与えられる.

$$x_\varepsilon^\alpha(t) = x^\alpha(t) + \varepsilon w^\alpha(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4)$$

ここで, $T > 0$ を固定すると, 上式は $\alpha \in \mathcal{A}$ と $t \in [0, T]$ に関して一様に成立する. さらに, $w^\alpha(t)$ は $x = x^\alpha(t)$ まわりの変分方程式

$$\dot{w} = Df(x^\alpha(t))w \quad (5)$$

の解となる.

$\Psi^\alpha(t)$ を, $\Psi^\alpha(0) = \text{id}_4$ (id_n は n 次単位行列) を満たす変分方程式 (5) の基本行列とすると, 式 (4) における $w^\alpha(t)$ は次のように表わされる.

$$w^\alpha(t) = \Psi^\alpha(t)w_0, \quad w_0 = \frac{1}{\varepsilon}(x_\varepsilon^\alpha(0) - x^\alpha(0)) \in \text{Fix}(R)$$

単位ベクトル $z_i(\alpha)$, $i = 1, 2$, を $z_1(\alpha) \in \bar{Z}(\alpha) \cap \text{Fix}(R)$, $z_2(\alpha) \in \bar{Z}(\alpha) \setminus \text{Fix}(R)$ となるように選ぶ. すると, $\bar{Z}(\alpha) = \text{span}\{z_1(\alpha), z_2(\alpha)\}$ となる. $n \in \mathbb{N}$ に対して次式によって定義される Melnikov 関数を導入する.

$$M_n(\alpha) = z_2(\alpha) \cdot \Psi^\alpha(nT^\alpha)z_1(\alpha) \quad (6)$$

定理 2 ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $M_n(\alpha)$ が $\alpha = \alpha_0$ に単純な零点をもつならば, 対称周期族 \mathcal{N} から $\alpha = \alpha_0$ で分岐する, 対称周期軌道の 1 パラメータ族が存在する. もし任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $M_n(\alpha)$ が $\alpha = \alpha_0$ に零点をもたなければ, このような対称周期軌道の 1 パラメータ族は存在しない.

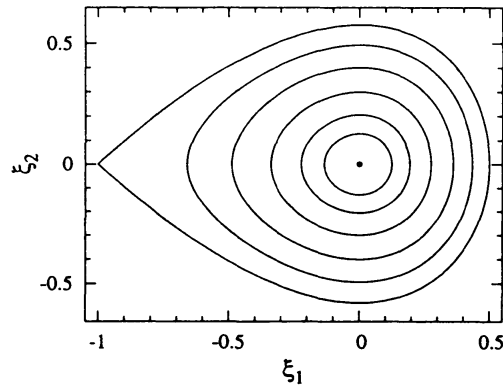


図 2. 式 (10) の ξ 平面上の周期軌道族 $\xi^k(t)$

定理 2 の証明は、可逆系のサドル・センターに対するホモクリニック軌道を扱った文献 [9] と同様に、漸近展開による近似評価と可逆系の性質を利用することによってなされる。

3. 単純な場合

次に、 $x = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ とし、 ξ -平面 $\{(\xi, \eta) \mid \xi \in \mathbb{R}^2, \eta = 0\}$ が式 (1) の不変平面となり、仮定 (A2) の対称周期軌道族が ξ -平面上に存在する、すなわち $x^\alpha(t) = (\xi^\alpha(t), 0)$ となる場合を考える。 $f(\xi, \eta) = (f_1(\xi, \eta), f_2(\xi, \eta))$, $f_i : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, とすると、 $f_2(\xi, 0) = 0$ が成立するから、 $D_\xi f_2(\xi, 0) = 0$ となる。 $\bar{Z}(\alpha)$ として η -平面を取り、 $z_i(\alpha) = (0, \zeta_i)$ とおく。ここで、 $z_i(\alpha)$ が α に依存しないことに注意する。

$\Psi_2^\alpha(t)$ を $\Psi_2^\alpha(0) = \text{id}_2$ を満たす、 $x = (\xi^\alpha(t), 0)$ まわりの直交変分方程式

$$\dot{v} = D_\eta f_2(\xi^\alpha(t), 0)v \quad (7)$$

の基本行列とすると、Melnikov 関数は次式で与えられる。

$$M_n(\alpha) = \zeta_2 \cdot \Psi_2^\alpha(nT^\alpha)\zeta_1. \quad (8)$$

さらに、式 (7) のモノドロミー行列 $\mu_\alpha = \Psi_2^\alpha(T^\alpha)$ を用いると、

$$M_n(\alpha) = \zeta_2 \cdot \mu_\alpha^n \zeta_1 \quad (9)$$

と表わされる。したがって、モノドロミー行列 μ_α の特性指数を $\lambda_{1,2}^\alpha$ とすると、定理 3 から次のことが成立する。

定理 3 $(m, n) \neq (1, 1), (1, 2)$ を満たす $m, n \in \mathbb{N}$ に対して、 $\alpha = \alpha_0$ において

$$\lambda_{1,2}^\alpha = \pm \frac{2\pi im}{n}, \quad \frac{d}{d\alpha} \lambda_{1,2}^\alpha \neq 0$$

となるならば、対称周期族 \mathcal{N} から $\alpha = \alpha_0$ で分岐する、対称周期軌道の 1 パラメータ族が存在する。もし任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\lambda_{1,2}^\alpha \neq \pm \frac{2\pi im}{n}$$

となるならば、このような対称周期軌道の 1 パラメータ族は存在しない。

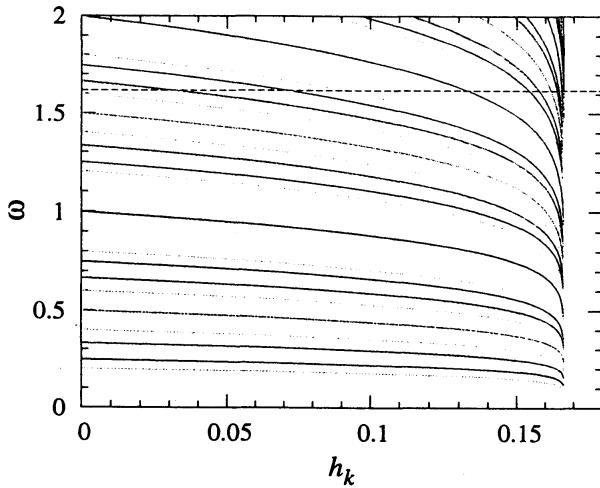


図 3. $c_1 = 0$ の場合に対する式 (10) の分岐集合 (破線は $\omega = \omega^*$ を表す)

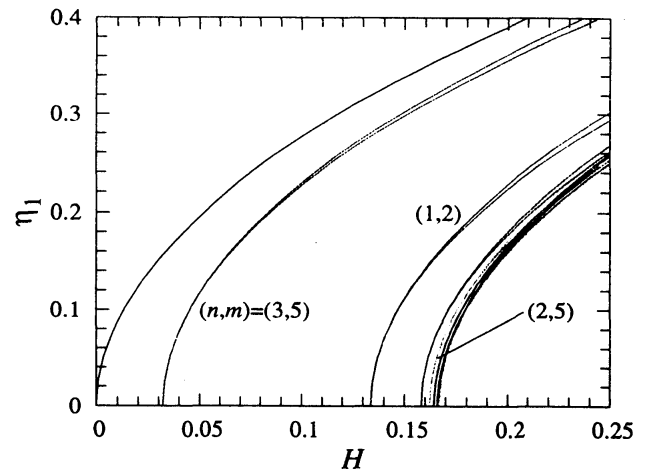


図 4. $c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{6}, \omega = \omega^*$ に対する式 (10) の分岐ダイアグラム

4. 適用例

適用例として、次式で与えられる修正された Hénon-Heiles 系を考える。

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, & \dot{\xi}_2 &= -\xi_1 - d\xi_1^2 - c\eta_1^3, \\ \dot{\eta}_1 &= \eta_2, & \dot{\eta}_2 &= -\omega^2\eta_1 - 3c\xi_1\eta_1^2 \end{aligned} \quad (10)$$

これは次のハミルトニアンを有するハミルトン系である。

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \omega^2\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{1}{3}d\xi_1^3 + c\xi_1\eta_1^3 \quad (11)$$

Hénon and Heiles (1964) では、 $d = -1, \omega = 1$, かつ式 (11) において 4 次項 $c\xi_1\eta_1^3$ の代わりに 3 次項 $\xi_1\eta_1^2$ となっている場合が扱われた。以下では、一般性を失わずに、 $d = 1$ と仮定する。

式 (10) は対合 $R: (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \mapsto (\xi_1, -\xi_2, \eta_1, -\eta_2)$ に対して可逆的であり、 ξ -平面は不変で、 ξ -平面上に 1 パラメータ周期軌道族

$$\xi^k(t) = (b(k) - a(k) \operatorname{sn}^2 \nu(k)t, -2\nu(k)a(k) \operatorname{sn} \nu(k)t \operatorname{cn} \nu(k)t \operatorname{dn} \nu(k)t) \quad (12)$$

を有する。ここで、 $k \in (0, 1)$ は楕円モジュールで、周期族のパラメータを表し、 $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}, \operatorname{dn}$ はヤコビの楕円関数である。図 2 にこれらの周期軌道を与える。周期軌道まわりの直交変分方程式は

$$\dot{v}_1 = v_2, \quad \dot{v}_2 = -\omega^2 v_1 \quad (13)$$

となる。

周期軌道 $\xi^k(t)$ の角振動数を

$$\Omega_k = \frac{\pi\nu(k)}{K(k)} = \frac{\pi}{2K(k)\sqrt{k^4 - k^2 + 1}}$$

とおく。式 (13) の基本行列は

$$\Psi_2^k(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

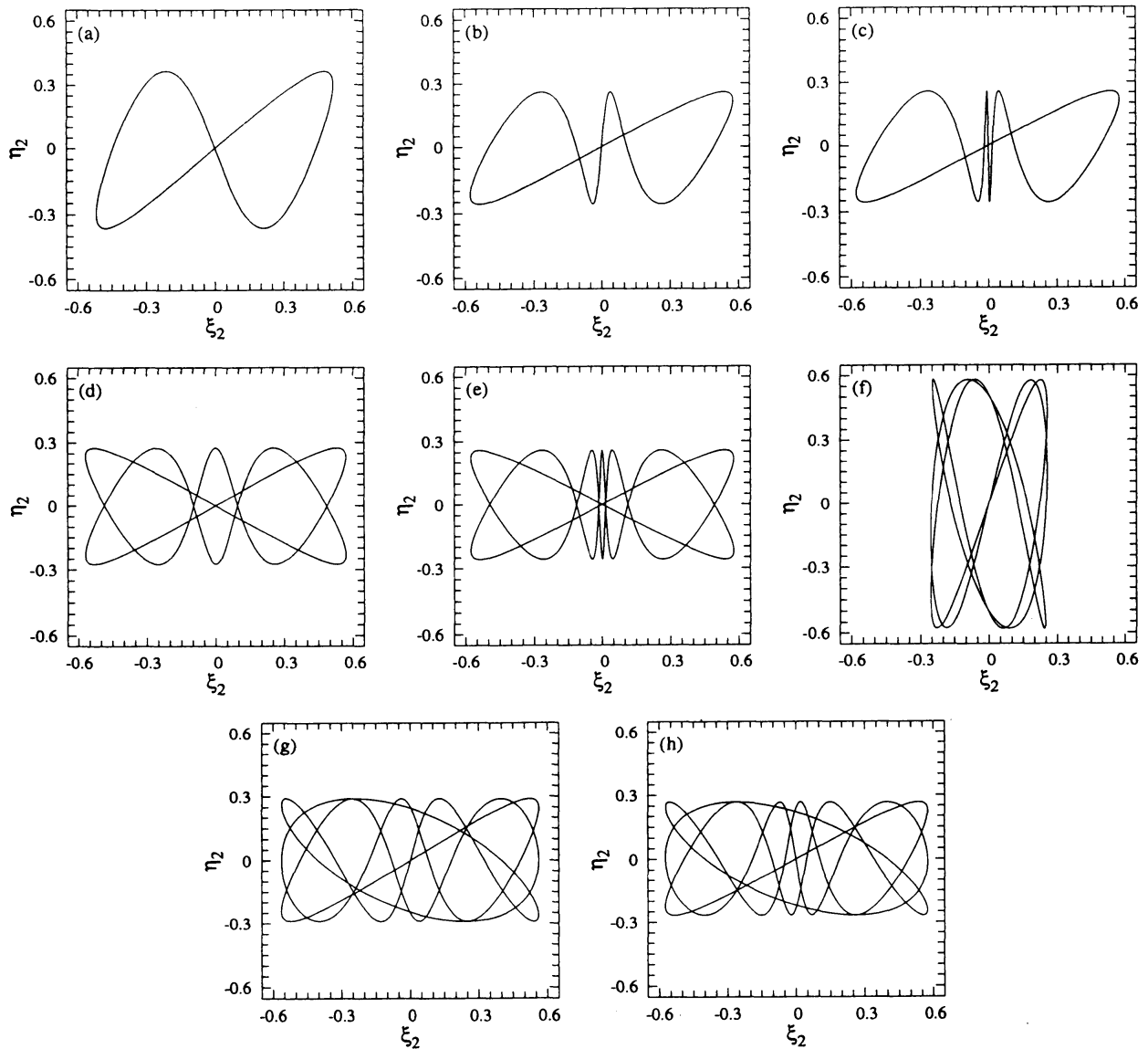


図 5. $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{6}$, $\omega = \omega_*$, $H = 0.2$ での, 周期軌道族 (12) から分岐した式 (10) の周期軌道: (a) $(m, n) = (1, 2)$; (b) $(1, 3)$; (c) $(1, 4)$; (d) $(2, 5)$; (e) $(2, 7)$; (f) $(3, 5)$; (g) $(3, 7)$; (h) $(3, 8)$.

となり, $\zeta_1 = (1, 0)$, $\zeta_2 = (0, 1)$ と取れるから, Melnikov 関数は次のように求められる.

$$M_n(k) = -\omega \sin \frac{2n\pi\omega}{\Omega_k}$$

したがって, 互いに素な $m, n \in \mathbb{N}$ に対して $m\Omega_k = n\omega$ となるとき, そのときに限って 1 パラメータ対称周期軌道族が分岐する. 図 3 に求められた分岐集合を示す. ここで, h_k は周期軌道族 (12) に対するハミルトニアン の値を表す.

$c_2 = \frac{1}{6}$ とし, ω を近似的に黄金比 $\omega_* = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.618$ に取り, AUTO [12] を用いて対称周期軌道の数値分岐解析を行った. その結果を図 4 に示す. また, $H = 0.2$ での, 周期軌道族 (12) から分岐した周期軌道を図 5 に示す. 図 4 において一番左の曲線は楕円型平衡点から現れる ξ -平面にない周期軌道族を表わし, $(n, m) = (1, 3), (1, 4), (2, 7), (3, 7), (3, 8)$ に対する周期軌道族の分

枝も与えられている。

参考文献

- [1] V.K. Melnikov, *Trans. Moscow Math. Soc.* **12** (1963), 1–56.
- [2] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, 1983.
- [3] G. Haller, *Chaos near Resonance*, Springer, 1999.
- [4] K. Yagasaki, *SIAM J. Appl. Math.* **56** (1996), 1720–1765.
- [5] K. Yagasaki, *Arch. Rational Mech. Anal.* **154** (2000), 275–296.
- [6] K. Yagasaki, *Nonlinearity* **18** (2005), 1331–1350.
- [7] J.J. Morales-Ruiz, *Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian systems*, Birkhäuser, 1999.
- [8] K. Yagasaki, *Nonlinearity* **16** (2003), 2003–2012.
- [9] K. Yagasaki and T. Wagenknecht, *Phys. D* **214**, 169–181.
- [10] E.A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, 1955.
- [11] M. Hénon and C. Heiles, *Astron. J.* **69** (1964), 73–79.
- [12] E. J. Doedel, et al., *AUTO97: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations (with HomCont)*, 1997, Available by anonymous ftp from [ftp.cs.concordia.ca](ftp://ftp.cs.concordia.ca), directory `pub/doedel/auto`.