

# 無限次元蔵本モデルの安定性理論

九州大学 数理学研究院

千葉 逸人 <sup>\*1</sup>

2009 年 10 月 19 日

## Abstract

蔵本-大同モデルは同期現象を記述するための最も代表的なモデルであり、 $N$  個の調和振動子の結合系として定義される  $N$ -トラス上の微分方程式である。ただし調和振動子たちの振動数 (自然振動数) はある与えられた分布関数  $g(\omega)$  から独立に選ばれる。ここでは蔵本-大同モデルの連続モデルを定義し、その自明解 (非同期状態) の安定性を調べたい。特に、ある分岐点  $K_c$  が存在し、結合強度  $K$  が  $0 < K < K_c$  なるときは非同期状態は漸近安定、 $K > K_c$  なるときは不安定であることを示す。

## 1 Introduction

多数の振動子たちが相互作用することによって引き起こされる集団的挙動は物理、工学、生物の様々な場面で観察され、近年、その研究はますます盛んになってきている [16]。そのような集団的挙動のうち、特に同期現象を記述するために、蔵本は次の微分方程式を提案した [9] :

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.1)$$

ここで  $\theta_i \in [0, 2\pi)$  は従属変数であり、円周上を運動する振動子たちの位相を表す。  $\omega_i \in \mathbf{R}$  は自然振動数と呼ばれる定数であり、定数  $K > 0$  は結合強度、 $N$  は結合させる振動子の数である。式 (1.1) は安定な周期軌道を持つ力学系の結合系を平均化法を用いて縮約し、主要項以外を打ち切ることによって得られ、今日では蔵本モデルと呼ばれる。

$K = 0$  のとき、もし  $\omega_i \neq \omega_j$  ならば、明らかに  $\theta_i(t)$  と  $\theta_j(t)$  は異なる速度で回転する (非同期状態)。ところが結合強度  $K$  を大きくしていくと、あるところで  $\theta_i(t)$  と  $\theta_j(t)$  が時間平均としては同じ速度で回転するようになることが “数值的に” 知られている (同期状態) [16, 18, 14]。次元  $N$  が小さければそのような非同期状態から同期状態への遷移は通常に分岐理論を用いて調べることも可能であるが [3, 11, 12]、応用上は  $N$  が極めて大きい状況に興味があり、このときには通常に分岐理論で式 (1.1) を解析することは非常に困難である。

$N$  が十分大きいときに同期現象が起こっているかどうか判定するために、蔵本は

$$r(t)e^{\sqrt{-1}\psi(t)} := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{\sqrt{-1}\theta_j(t)} \quad (1.2)$$

で定義される秩序変数  $r(t)e^{\sqrt{-1}\psi(t)}$  を導入した。これは振動子たちの重心の座標を与えており、直観的には、もし重心座標の大きさ  $r(t)$  が正の値を取るならば同期状態が実現して

<sup>\*1</sup> E mail address : chiba@math.kyushu-u.ac.jp

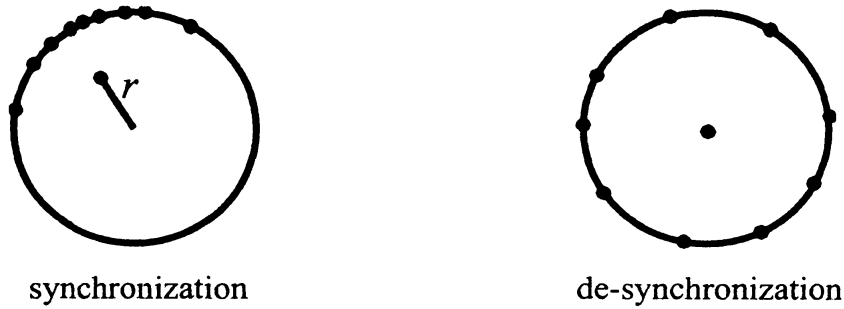
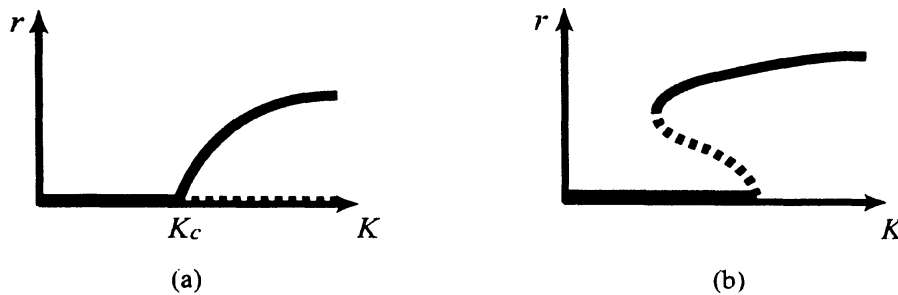


Fig. 1 蔵本モデルの秩序変数.

Fig. 2 秩序変数の分岐図. (a)  $g(\omega)$  が偶関数かつ単峰型の場合. (b)  $g(\omega)$  が偶関数かつ双峰型の場合. 実線は漸近安定な解を表し, 破線は不安定な解を表す.

おり, もし  $r(t)$  がほぼ零ならば非同期状態にあると考えられる (Fig.1). この観察とある形式的な計算に基づき, 蔵本は以下の予想を打ち立てた:

### Kuramoto's conjecture

(形式的に)  $N \rightarrow \infty$  とし, 自然振動数  $\omega_i$  たちはある分布関数  $g(\omega)$  に従って独立に分布しているものとせよ. もし  $g(\omega)$  が偶関数かつ単峰型ならば, 秩序変数  $r(t)$  の分岐図は図 2 (a) のように与えられる; すなわち, もし結合強度  $K$  が  $K_c := 2/(\pi g(0))$  よりも小さければ,  $r(t) \equiv 0$  は漸近安定であり, 一方もし  $K$  が  $K_c$  よりも大きければある正定数  $r_c$  が存在して  $r(t) = r_c$  が漸近安定である. 分岐点  $K_c$  の近傍では  $r_c$  のスケール則は  $O((K - K_c)^{1/2})$  で与えられる.

今日, 分岐点  $K_c = 2/(\pi g(0))$  は**蔵本転移点**と呼ばれる. 蔵本の議論については [10, 18] を参照せよ.

$g(\omega)$  が偶関数かつ単峰型の場合には, 蔵本の結果を (部分的に) フォローするような多くの研究がある [19, 20, 15] にもかかわらず, そうでない場合の秩序変数の分岐図に関してはあまり多くのことは分かっていない. Martens らは,  $g(\omega)$  が 2 つのローレンツ分布の和からなる双峰型の関数の場合について秩序変数の分岐図を調べ [13], 特に (部分) 同期状態と非同期状態が共にアトラクタとして共存しうることを発見した. そのような分岐構造は双峰型の  $g(\omega)$  に対しては一般的に見られると思われる.

蔵本モデルの簡単な拡張は

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N f(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.3)$$

で与えられ、**蔵本-大同モデル**と呼ばれる [4, 5, 6, 7]. ここで  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  は  $2\pi$  周期の関数であり、**結合関数**と呼ばれる. 大同 [7] はこのモデルの秩序変数の分岐図を蔵本と同様の議論により調べ、もし  $f(\theta) \neq \sin \theta$  ならば  $g(\omega)$  が偶関数かつ単峰型であっても (部分) 同期状態と非同期状態がアトラクタとして共存しうることを発見した (数学的に厳密ではない).

この紀要では、任意の分布関数  $g(\omega)$  に対する蔵本-大同モデルを考え、これまで物理学者によって形式的に得られていた結果の一部を正当化・一般化する. まず蔵本-大同モデルに対する連続モデルを導入し、その非同期状態と秩序変数の線形安定性を調べる. 特に、連続モデルを非同期状態の周りで線形化することによって得られる線形作用素  $T$  のスペクトルや半群の性質を詳しく調べる. まず、非同期状態の安定性が変わる分岐点  $K_c$  の値を導出する. 系として、もし  $g(\omega)$  が偶関数かつ単峰型の場合には蔵本転移点  $K_c = 2/(\pi g(0))$  が得られる. 次に、もし  $K > K_c$  ならば、 $T$  が右半面に固有値を持つため、非同期状態は不安定であることを示す. 一方、もし  $0 < K < K_c$  ならば、作用素  $T$  のスペクトルは全て連続スペクトルから構成され、しかも虚軸上に存在する. したがって非同期状態の安定性は非自明である. それにもかかわらず、 $g(\omega)$  に対するある条件のもと、秩序変数が指数的に零に減少することを示す. この指数的減衰は、共鳴極と呼ばれる固有値の一般化によって引き起こされる真に無限次元的な現象である. これは、一般に無限次元の方程式の解の漸近安定性は、スペクトルだけではなく共鳴極まで調べて初めてその全貌が明らかになることを意味している.

## 2 Continuous model

この節では蔵本-大同モデルの連続モデルを導入し、そのいくつかの性質を述べる.

蔵本-大同モデル (1.3) において、結合関数  $f$  は  $C^1$  級の周期関数とし、その Fourier 級数展開を

$$f(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l e^{\sqrt{-1}l\theta}, \quad f_l \in \mathbf{C} \quad (2.1)$$

としよう.  $f_0$  は  $\omega_i$  の定義の中にくりこむことができるので、一般性を失うことなく  $f_0 = 0$  としてよい. 蔵本モデル ( $f(\theta) = \sin \theta$ ) の場合は  $f_{\pm 1} = \pm 1/(2\sqrt{-1})$ ,  $f_l = 0$  ( $l \neq \pm 1$ ) である. 大同の議論 [7] に従い、一般化された秩序変数  $\hat{Z}_k^0$  を

$$\hat{Z}_k^0(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{\sqrt{-1}k\theta_j(t)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.2)$$

で定義しよう. 特に  $\hat{Z}_1^0$  が第 1 節で定義した蔵本の秩序変数であることに注意せよ. これを用いると、式 (1.3) は

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + K \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l \hat{Z}_l^0(t) e^{-\sqrt{-1}l\theta_i} \quad (2.3)$$

と書ける。これらの方程式を動機として、蔵本-大同モデルの連続極限をとった連続モデルを

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \left( \omega + K \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l Z_l^0(t) e^{-\sqrt{-1}l\theta} \right) \rho_t \right) = 0, \\ Z_k^0(t) = \int_{\mathbf{R}} \int_0^{2\pi} e^{\sqrt{-1}k\theta} \rho_t(\theta, \omega) d\theta d\omega, \\ \rho_0(\theta, \omega) = h(\theta, \omega), \end{cases} \quad (2.4)$$

で定義する。ここで  $\rho_t = \rho_t(\theta, \omega)$  は未知関数であり、時間  $t \in \mathbf{R}$  によってパラメータ付けされた  $S^1 \times \mathbf{R}$  上の確率密度関数である。  $h(\theta, \omega)$  は初期条件を表す。  $Z_k^0(t)$  は一般化された秩序変数  $Z_k^0(t)$  の連続バージョンであり、やはり一般化された秩序変数と呼ぼう。速度場  $v$  を

$$v := \omega + K \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l Z_l^0(t) e^{-\sqrt{-1}l\theta}$$

とおくと式 (2.4) は流体力学で知られる連続の式  $\partial \rho_t / \partial t + \partial(\rho_t v) / \partial \theta = 0$  と一致することに注意せよ。質量保存則を示すのは容易である:

$$\int_{\mathbf{R}} \int_0^{2\pi} \rho_t(\theta, \omega) d\theta = \int_{\mathbf{R}} \int_0^{2\pi} h(\theta, \omega) d\theta =: g(\omega). \quad (2.5)$$

上式により定義される確率密度関数  $g$  は自然振動数  $\omega$  の分布を定める。

特性曲線法を用いることにより式 (2.4) は以下のように積分できる。特性曲線を定める微分積分方程式を

$$\frac{dx}{dt} = \omega + K \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l Z_l^0(t) e^{-\sqrt{-1}lx}, \quad x \in S^1, \quad (2.6)$$

で定義し、その  $t = s$  において  $x = \theta$  を通る解を  $x = x(t, s; \theta, \omega)$  とおく ( $x(s, s; \theta, \omega) = \theta$ )。すると式 (2.4) を特性曲線に沿って積分することにより解  $\rho_t$  は

$$\rho_t(\theta, \omega) = h(x(0, t; \theta, \omega), \omega) \exp \left[ K \int_0^t \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sqrt{-1}l f_l Z_l^0(s) e^{-\sqrt{-1}lx(s, t; \theta, \omega)} ds \right] \quad (2.7)$$

と書ける。これを用いると、任意の連続関数  $a(\theta, \omega)$  に対して

$$\int_{\mathbf{R}} \int_0^{2\pi} a(\theta, \omega) \rho_t(\theta, \omega) d\theta d\omega = \int_{\mathbf{R}} \int_0^{2\pi} a(x(t, 0; \theta, \omega), \omega) h(\theta, \omega) d\theta d\omega \quad (2.8)$$

が成り立つことが容易に確認できる。特に、一般化された秩序変数  $Z_k^0(t)$  は

$$Z_k^0(t) = \int_{\mathbf{R}} \int_0^{2\pi} e^{\sqrt{-1}kx(t, 0; \theta, \omega)} h(\theta, \omega) d\theta d\omega \quad (2.9)$$

と書ける. これを式 (2.6), (2.7) に代入することにより,

$$\frac{d}{dt}x(t, s; \theta, \omega) = \omega + K \int_{\mathbf{R}} \int_0^{2\pi} f(x(t, 0; \theta', \omega') - x(t, s; \theta, \omega))h(\theta', \omega')d\theta' d\omega', \quad (2.10)$$

および

$$\rho_t(\theta, \omega) = h(x(0, t; \theta, \omega), \omega) \exp\left[K \int_0^t ds \cdot \int_{\mathbf{R}} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \theta}(x(s, 0; \theta', \omega') - x(s, t; \theta, \omega))h(\theta', \omega')d\theta' d\omega'\right], \quad (2.11)$$

を得る. たとえ初期条件  $h(\theta, \omega)$  が微分可能でなくとも, 式 (2.11) を式 (2.4) の弱解とみなすことにしよう. 通常の方法により, 微分積分方程式 (2.10) が与えられた初期条件に対して唯一つの大域解を持つことを示すのは難しくない. したがって連続モデル (2.4) も, 与えられた初期条件  $h(\theta, \omega)$  に対して唯一つの弱解 (2.11) を持つことが分かる.

この紀要を通して, 初期条件  $h(\theta, \omega)$  は  $h(\theta, \omega) = \hat{h}(\theta)g(\omega)$  なる変数分離の形をしているものと仮定することにする. これは蔵本-大同モデル (1.3) に対しては初期条件  $\{\theta_j(0)\}_{j=1}^N$  と自然振動数  $\{\omega_j\}_{j=1}^N$  が独立に分布していることに対応し, ほとんどの文献で用いられている物理的に自然な仮定である. このとき,  $\rho_t(\theta, \omega)$  は  $\rho_t(\theta, \omega) = \hat{\rho}_t(\theta, \omega)g(\omega)$  と書ける. ただし

$$\hat{\rho}_t(\theta, \omega) = \hat{h}(x(0, t; \theta, \omega)) \exp\left[K \int_0^t ds \cdot \int_{\mathbf{R}} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \theta}(x(s, 0; \theta', \omega') - x(s, t; \theta, \omega))\hat{h}(\theta')g(\omega')d\theta' d\omega'\right], \quad (2.12)$$

であり, この  $\hat{\rho}_t(\theta, \omega)$  は式 (2.4) と同じ方程式を満たす.

### 3 Linear stability of the incoherent solution

空間  $\theta$  と時間  $t$  に依存しない連続モデル (2.4) の自明解 (incoherent solution) は  $\rho_t(\theta, \omega) = g(\omega)/(2\pi)$ , あるいは  $\hat{\rho}_t(\theta, \omega) = 1/(2\pi)$  で与えられ, これは非同期状態に対応している. このときちょうど  $r = 0$  であることに注意せよ. この節では非同期状態と秩序変数の安定性を調べる.

$\hat{\rho}_t(\theta, \omega)$  の Fourier 係数を

$$Z_j(t, \omega) := \int_0^{2\pi} e^{\sqrt{-1}j\theta} \hat{\rho}_t(\theta, \omega) d\theta \quad (3.1)$$

とおく. すると  $Z_0(t, \omega) = 1$  であり,  $Z_j, j = \pm 1, \pm 2, \dots$  は微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{dZ_j}{dt} &= \sqrt{-1}j\omega Z_j + \sqrt{-1}jK \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l Z_l^0(t) Z_{j-l} \\ &= \sqrt{-1}j\omega Z_j + \sqrt{-1}jK f_j Z_j^0 + \sqrt{-1}jK \sum_{l \neq j} f_l Z_l^0(t) Z_{j-l} \end{aligned}$$

を満たす. 自明解は全ての  $j = \pm 1, \pm 2, \dots$  に対して  $Z_j \equiv 0$  なる解に対応している.  $|Z_j(t, \omega)| \leq 1$  なので,  $Z_j(t, \omega)$  は各  $t$  に対して重み付きの Hilbert 空間  $L^2(\mathbf{R}, g(\omega)d\omega)$  の元で

ある：

$$\|Z_j\|_{L^2(\mathbf{R}, g(\omega)d\omega)}^2 = \int_{\mathbf{R}} |Z_j(t, \omega)|^2 g(\omega) d\omega \leq 1.$$

そこで上式の線形化方程式

$$\frac{dZ_j}{dt} = (j\sqrt{-1}M + j\sqrt{-1}Kf_j\mathcal{P})Z_j, \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2)$$

を,  $L^2(\mathbf{R}, g(\omega)d\omega)$  空間上の発展方程式として解くことにしよう. ここで  $M : q(\omega) \mapsto \omega q(\omega)$  は  $L^2(\mathbf{R}, g(\omega)d\omega)$  上の掛け算作用素であり,  $\mathcal{P}$  は  $L^2(\mathbf{R}, g(\omega)d\omega)$  上の射影で

$$\mathcal{P}q(\omega) = \int_{\mathbf{R}} q(\omega)g(\omega)d\omega \quad (3.3)$$

で定義される. もし  $P_0(\omega) \equiv 1$  とおけば, 作用素  $\mathcal{P}$  は  $L^2(\mathbf{R}, g(\omega)d\omega)$  の内積

$$(q_1, q_2) := \int_{\mathbf{R}} q_1(\omega)\overline{q_2(\omega)}g(\omega)d\omega \quad (3.4)$$

を用いて  $\mathcal{P}q(\omega) = (q, P_0)$  と書ける. また秩序変数は  $Z_1^0 = (Z_1, P_0)$  と書けることに注意されたい. 自明解と秩序変数の安定性を決定するために, 線形作用素  $T_j := j\sqrt{-1}M + j\sqrt{-1}Kf_j\mathcal{P}$  のスペクトルと半群を調べるのがこの節の目的である.

### 3.1 Analysis of the operator $\sqrt{-1}M$

もし  $f_j = 0$  ならば,  $T_j = j\sqrt{-1}M$  となる.  $L^2(\mathbf{R}, g(\omega)d\omega)$  上の掛け算作用素  $M$  は自己共役でありそのスペクトルは  $\sigma(M) = \text{supp}(g) \subset \mathbf{R}$  となることはよく知られている. ただし  $\text{supp}(g)$  は密度関数  $g$  のサポートである. したがって  $j\sqrt{-1}M$  のスペクトルは

$$\sigma(j\sqrt{-1}M) = j\sqrt{-1} \cdot \text{supp}(g) = \{j\sqrt{-1}\lambda \mid \lambda \in \text{supp}(g)\} \subset \sqrt{-1}\mathbf{R} \quad (3.5)$$

で与えられる. 一方,  $j\sqrt{-1}M$  が生成する半群  $e^{j\sqrt{-1}Mt}$  は  $e^{j\sqrt{-1}Mt}q(\omega) = e^{j\sqrt{-1}\omega t}q(\omega)$  のように計算される. 特に任意の  $q_1, q_2 \in L^2(\mathbf{R}, g(\omega)d\omega)$  に対して

$$(e^{j\sqrt{-1}Mt}q_1, q_2) = \int_{\mathbf{R}} e^{j\sqrt{-1}\omega t}q_1(\omega)\overline{q_2(\omega)}g(\omega)d\omega \quad (3.6)$$

を得るが, これは関数  $q_1(\omega)\overline{q_2(\omega)}g(\omega)$  の Fourier 変換である. したがってもし  $q_1(\omega)\overline{q_2(\omega)}g(\omega)$  が  $\mathbf{R}$  上実解析的であってかつ実軸の近傍への解析接続を持つとき,  $(e^{j\sqrt{-1}Mt}q_1, q_2)$  は  $t \rightarrow \infty$  で指数的に減少する (Vilenkin [21]). この事実をまとめておこう.

**Proposition 3.1.** 式 (3.2) において  $f_j = 0$  とせよ.  $q(\omega) \in L^2(\mathbf{R}, g(\omega)d\omega)$  を初期値とするこの方程式の解は  $Z_j(t) = e^{j\sqrt{-1}Mt}q(\omega) = e^{j\sqrt{-1}\omega t}q(\omega)$  で与えられる. 特に, もし  $g(\omega)$  と  $q(\omega)$  が実軸の近傍への解析接続を持つならば秩序変数  $Z_j^0(t) = (e^{j\sqrt{-1}Mt}q, P_0)$  は  $t \rightarrow \infty$  で指数的に減少する.

作用素  $j\sqrt{-1}M$  のレゾルベント  $(\lambda - j\sqrt{-1}M)^{-1}$  は

$$((\lambda - j\sqrt{-1}M)^{-1}q_1, q_2) = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\lambda - j\sqrt{-1}\omega} q_1(\omega) \overline{q_2(\omega)} g(\omega) d\omega \quad (3.7)$$

のように計算される. 後での計算の都合のため, 関数  $D(\lambda)$  を

$$D(\lambda) = ((\lambda - j\sqrt{-1}M)^{-1}P_0, P_0) = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\lambda - j\sqrt{-1}\omega} g(\omega) d\omega \quad (3.8)$$

と定義しておこう. これはレゾルベント集合  $\mathbf{C} \setminus \sigma(j\sqrt{-1}M)$  上で一価解析的である.

### 3.2 Analysis of the operator $T_j = j\sqrt{-1}M + j\sqrt{-1}Kf_j\mathcal{P}$

以下では  $f_j \neq 0$  とする.  $T_j$  の定義域  $D(T_j)$  は  $D(M) \cap D(\mathcal{P}) = D(M)$  で与えられる.  $M$  は自己共役でありかつ  $\mathcal{P}$  は有界なので,  $T_j$  は閉作用素である [8].  $T_j$  のレゾルベント集合を  $\rho(T_j)$  とし, スペクトルを  $\sigma(T_j) = \mathbf{C} \setminus \rho(T_j)$  とする.  $T_j$  は閉であるから剰余スペクトルは存在しないことに注意せよ.  $\sigma_p(T_j)$  と  $\sigma_c(T_j)$  をそれぞれ  $T_j$  の点スペクトルと連続スペクトルとする.

**Proposition 3.2.** (i)  $T_j$  の固有値  $\lambda$  は方程式

$$D(\lambda) = \frac{1}{j\sqrt{-1}Kf_j}, \quad \lambda \in \mathbf{C} \setminus \sigma(j\sqrt{-1}M) \quad (3.9)$$

の根として与えられる.

(ii)  $T_j$  の連続スペクトルは

$$\sigma_c(T_j) = \sigma(j\sqrt{-1}M) = j\sqrt{-1} \cdot \text{supp}(g) \quad (3.10)$$

で与えられる.

**Proof.**  $\lambda \in \sigma_p(T_j) \setminus \sigma(j\sqrt{-1}M)$  とせよ. 固有関数を  $x \in L^2(\mathbf{R}, g(\omega)d\omega)$  とすると固有値  $\lambda$  は

$$\lambda x = (j\sqrt{-1}M + j\sqrt{-1}Kf_j\mathcal{P})x, \quad x \neq 0$$

を満たす.  $\lambda \notin \sigma(j\sqrt{-1}M)$  であるから  $(\lambda - j\sqrt{-1}M)^{-1}$  が存在し, 上式は

$$\begin{aligned} x &= (\lambda - j\sqrt{-1}M)^{-1} j\sqrt{-1}Kf_j\mathcal{P}x \\ &= j\sqrt{-1}Kf_j(x, P_0)(\lambda - j\sqrt{-1}M)^{-1}P_0(\omega) \end{aligned}$$

と変形できる.  $P_0(\omega)$  との内積をとると

$$1 = j\sqrt{-1}Kf_j((\lambda - j\sqrt{-1}M)^{-1}P_0, P_0) = j\sqrt{-1}Kf_jD(\lambda) \quad (3.11)$$

となり, 式 (3.9) が得られる. 対応する固有関数は  $x = (\lambda - j\sqrt{-1}M)^{-1}P_0(\omega) = 1/(\lambda - j\sqrt{-1}\omega)$  で与えられる. もし  $\lambda \in \sqrt{-1}\mathbf{R}$  ならば明らかに  $x \notin L^2(\mathbf{R}, g(\omega)d\omega)$  であるから, 虚軸上には固有値は存在しないことが分かる. (ii) は, 本質的スペクトルは有界な摂動のもとで安定であるという定理と虚軸上に固有値が存在しないことからただちに従う ([8]).

### 3.3 Eigenvalues of the operator $T_j$ and the transition point formula

次に式(3.9)の根を計算しなければならない.  $\lambda = x + \sqrt{-1}y$ ,  $x, y \in \mathbf{R}$  において式(3.9)を実部と虚部に分けると

$$\begin{cases} \int_{\mathbf{R}} \frac{x}{x^2 + (j\omega - y)^2} g(\omega) d\omega = -\frac{\text{Im}(f_j)}{jK|f_j|^2}, \\ \int_{\mathbf{R}} \frac{j\omega - y}{x^2 + (j\omega - y)^2} g(\omega) d\omega = -\frac{\text{Re}(f_j)}{jK|f_j|^2} \end{cases} \quad (3.12)$$

となる. 以下では  $\text{Im}(f_j) < 0$  と仮定しよう.  $\text{Im}(f_j) \geq 0$  の場合は 3.5 節で考える.

#### Lemma 3.3.

- (i)  $\text{Im}(f_j) < 0$  ならば任意の  $K > 0$  に対して  $\text{Re}(\lambda) > 0$  である.
- (ii) もし  $K > 0$  が十分に大きければ, 無限遠点の近傍に少なくとも 1 つの固有値が存在する.
- (iii) もし  $K > 0$  が十分小さければ, 固有値は存在しない.

**Proof.** (i) これは式(3.12)前者の右辺が正であるから左辺も正でなければならないという事実から従う. (ii) を示すために, もし  $|\lambda|$  が大きければ式(3.9)は

$$\frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{j\sqrt{-1}Kf_j}$$

と書けることに注意しよう. したがって Rouché の定理より,  $K > 0$  が十分大きければ式(3.9)は根  $\lambda \sim j\sqrt{-1}Kf_j$  を持つことが分かる. (iii) は式(3.12)前者の左辺が任意の  $x, y \in \mathbf{R}$  に対して有界であることを示すことで証明されるが, 詳細は省略する. ■

Lemma 3.3 より,  $K > 0$  が十分大きければ固有値が右半面に存在するため, 方程式  $dZ_j/dt = T_j Z_j$  の自明解  $Z_j = 0$  は不安定であり,  $K > 0$  が小さいときはそうとは限らないことが分かる. 我々の目的は, 自明解が不安定化するような最小の分岐点  $K = K_c^{(j)}$  を求めることである. 固有値  $\lambda = \lambda(K)$  を具体的に求めるのは一般には困難であるが, 次のことに注目しよう. よく知られているように解析関数の零点はパラメータを動かしても消滅しないため,  $\lambda(K)$  は  $D(\lambda)$  が解析的でないような集合, すなわち連続スペクトル  $\sigma(j\sqrt{-1}M)$  に吸収されたときに限り消滅する. したがって固有値が右半面に残っているかどうかを見るために, 式(3.9)を  $\sigma(j\sqrt{-1}M)$  の近傍でだけ解けばよい. 虚軸上の連続スペクトル  $\sigma(j\sqrt{-1}M) \subset \sqrt{-1}\mathbf{R}$  に吸収される固有値  $\lambda(K)$  を見るために式(3.12)において極限  $x \rightarrow +0$  をとる:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +0} \int_{\mathbf{R}} \frac{x}{x^2 + (j\omega - y)^2} g(\omega) d\omega = -\frac{\text{Im}(f_j)}{jK|f_j|^2}, \\ \lim_{x \rightarrow +0} \int_{\mathbf{R}} \frac{j\omega - y}{x^2 + (j\omega - y)^2} g(\omega) d\omega = -\frac{\text{Re}(f_j)}{jK|f_j|^2}. \end{cases} \quad (3.13)$$

これらの方程式は固有値  $\lambda_n(K)$  が,  $K \rightarrow K_n + 0$  で虚軸上の点  $\sqrt{-1}y_n$  に吸収されて消滅す



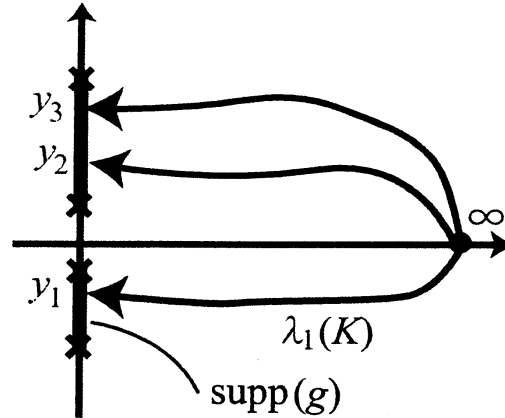


Fig. 3  $K$  を減らしていったときの固有値の動きの模式図.

るような  $K_n$  と  $y_n$  を与える. Fig.3 が  $K$  を減らしていったときの固有値の動きの概略図である. 上式を計算するために次の Lemma が必要である.

**Lemma 3.4.** (i)  $K \rightarrow K_n$  で  $\lambda_n(K) \rightarrow \sqrt{-1}y_n$  となると仮定する. このとき  $g(\omega)$  は点  $\omega = y_n$  で連続でなければならない.

(ii) もし  $g(\omega)$  が点  $\omega = y$  で連続ならば

$$\lim_{x \rightarrow +0} \int_{\mathbf{R}} \frac{x}{x^2 + (j\omega - y)^2} g(\omega) d\omega = \pi g(y/j)/j \quad (3.14)$$

が成り立つ.

(i) は, もし  $g(\omega)$  が  $\omega = y_n$  で連続でないならば  $D(\lambda)$  が  $\lambda \rightarrow \sqrt{-1}y_n$  で発散する (一方, 式 (3.9) の右辺は有界である) ことを示すことによって証明されるが, 詳細は略す. (ii) は Poisson 積分に関する有名な公式である. 例えば Ahlfors [1] を参照せよ.

$(y, K)$  を式 (3.13) の 1 つの解とする. このとき  $g(\omega)$  は点  $\omega = y$  で連続なので, 式 (3.13) の前者は

$$\pi g(y/j) = -\frac{\text{Im}(f_j)}{K|f_j|^2} \quad (3.15)$$

と変形される. これから得られる  $K = -\text{Im}(f_j)/(\pi|f_j|^2 g(y/j))$  を式 (3.13) の後者に代入することで

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}} \frac{j\omega - y}{x^2 + (j\omega - y)^2} g(\omega) d\omega = \frac{\pi \text{Re}(f_j)}{j \text{Im}(f_j)} g(y/j) \quad (3.16)$$

を得る. この  $y$  に対する方程式が,  $\lambda(K)$  が虚軸に吸収されたときの虚部を与える. また  $y_1, y_2, \dots$  を式 (3.16) の根とすると,

$$K_n = \frac{-\text{Im}(f_j)}{\pi|f_j|^2 g(y_n/j)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

が  $\lambda(K)$  が虚軸に吸収されるような  $K$  の値を定める. 以上より次の定理が得られた.

**Theorem 3.5.**  $\text{Im}(f_j) < 0$  と仮定せよ.  $y_1, y_2, \dots$  を式 (3.16) の根とし,

$$K_c^{(j)} := \inf_n K_n = \frac{-\text{Im}(f_j)}{\pi |f_j|^2 \sup_n g(y_n/j)} \quad (3.18)$$

とおく. もし  $0 < K < K_c^{(j)}$  ならば作用素  $T_j$  は固有値を持たず, もし  $K$  が  $K_c^{(j)}$  よりもわずかに大きければ  $T_j$  は右半面に固有値を持つ.

Lemma.3.3 (iii) より  $\inf_n K_n$  は正であることを注意せよ. 系として蔵本 [10] によって予想されていた蔵本転移点 (非同期状態の分岐点) がただちに得られる:

**Corollary 3.6 (蔵本分岐点).** 確率密度関数  $g(\omega)$  は偶関数かつ  $\max g(\omega) = g(0)$  を満たすとせよ. もし  $\text{Re}(f_1) = 0$  かつ  $\text{Im}(f_1) = -1/2$  ならば (すなわち通常の蔵本モデルに対しては)  $K_c^{(1)}$  は

$$K_c^{(1)} = \frac{2}{\pi g(0)} \quad (3.19)$$

で与えられる. もし  $K > K_c^{(1)}$  ならば式 (3.2) の自明解  $Z_1 = 0$  は不安定である.

### 3.4 Semi-group generated by the operator $T_1$ ( $\text{Im}(f_1) < 0$ )

我々は秩序変数  $Z_1^0(t) = (Z_1, P_0)$  のダイナミクスに興味があるため, 以下では  $j = 1$  の場合のみを考える. ただし  $j = 2, 3, \dots$  の場合もまったく同様にして調べることができる. 定理 3.5 より,  $K_c^{(1)}$  が式 (3.2) の自明解  $Z_1(t, \omega) = 0$  の最小の分岐点であり,  $K$  が  $K_c^{(1)}$  よりも大きいときは自明解は不安定である. 一方もし  $0 < K < K_c^{(1)}$  ならば作用素  $T_1$  のスペクトルは連続スペクトルのみでありしかも虚軸上に乗っている:  $\sigma(T_1) = \sigma(\sqrt{-1}M)$ . したがって  $Z_1$  のダイナミクスは非自明である. この節では, スペクトルが虚軸上に存在するにもかかわらず, 秩序変数が指数的に減衰しうることを示そう.

作用素  $\sqrt{-1}M$  は半群  $e^{\sqrt{-1}Mt}$  を持ち,  $\mathcal{P}$  は有界であるから, 作用素  $T_1 = \sqrt{-1}M + \sqrt{-1}Kf_1\mathcal{P}$  も半群  $e^{T_1 t}$  を持つ (Kato [8]). 初期条件を  $q(\omega) \in L^2(\mathbf{R}, g(\omega)d\omega)$  とする式 (3.2) の解は  $e^{T_1 t}q(\omega)$  と書かれる. 半群  $e^{T_1 t}$  を計算するために Laplace 逆変換の公式

$$e^{T_1 t} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{x-\sqrt{-1}y}^{x+\sqrt{-1}y} e^{t\lambda} (\lambda - T_1)^{-1} d\lambda \quad (3.20)$$

を用いる. ここで  $x > 0$  は積分路が  $T_1$  のスペクトルの右側に来るようにとるものとする (Yosida [22]). これを計算するために, まずレゾルベント  $(\lambda - T_1)^{-1}$  を求めよう.

**Lemma 3.7.** 任意の  $q(\omega) \in L^2(\mathbf{R}, g(\omega)d\omega)$  に対して

$$F_0(\lambda) := ((\lambda - T_1)^{-1}q, P_0) = \frac{((\lambda - \sqrt{-1}M)^{-1}q, P_0)}{1 - \sqrt{-1}Kf_1D(\lambda)} \quad (3.21)$$

が成り立つ.

**Proof.** レゾルベントを

$$R(\lambda)q := (\lambda - T_1)^{-1}q = (\lambda - \sqrt{-1}M - \sqrt{-1}Kf_1\mathcal{P})^{-1}q$$

とおくとこれは

$$\begin{aligned}(\lambda - \sqrt{-1}\mathcal{M})R(\lambda)q &= q + \sqrt{-1}Kf_1\mathcal{P}R(\lambda)q \\ &= q + \sqrt{-1}Kf_1(R(\lambda)q, P_0)P_0\end{aligned}$$

と変形される.  $(\lambda - \sqrt{-1}\mathcal{M})^{-1}$  を作用させると

$$R(\lambda)q = (\lambda - \sqrt{-1}\mathcal{M})^{-1}q + \sqrt{-1}Kf_1(R(\lambda)q, P_0)(\lambda - \sqrt{-1}\mathcal{M})^{-1}P_0$$

となり,  $P_0$  との内積をとることにより

$$(R(\lambda)q, P_0) = ((\lambda - \sqrt{-1}\mathcal{M})^{-1}q, P_0) + \sqrt{-1}Kf_1(R(\lambda)q, P_0)D(\lambda)$$

を得る. これを整理すると式 (3.21) が得られる. ■

$Z_1(0) = q(\omega)$  を初期値とする秩序変数  $Z_1^0(t) = (Z_1(t), P_0)$  を考えよう. 式 (3.20) と (3.21) より  $Z_1^0(t)$  は

$$Z_1^0(t) = (e^{T_1 t}q, P_0) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{x-\sqrt{-1}y}^{x+\sqrt{-1}y} e^{i\lambda t} \frac{((\lambda - \sqrt{-1}\mathcal{M})^{-1}q, P_0)}{1 - \sqrt{-1}Kf_1D(\lambda)} d\lambda \quad (3.22)$$

で与えられる. この積分を計算する 1 つの方法は留数定理を用いることである. レゾルベント  $(\lambda - T_1)^{-1}$  は領域  $\mathbf{C} \setminus \sigma(T_1)$  で解析的であったことを思い出そう. 今  $0 < K < K_c^{(1)}$  の場合を考えているので,  $T_1$  は固有値を持たず, スペクトルは虚軸上に存在する:  $\sigma(T_1) = \sigma(\sqrt{-1}\mathcal{M}) = \sqrt{-1} \cdot \text{supp}(g)$ . したがって式 (3.22) の被積分関数  $e^{i\lambda t} F_0(\lambda)$  は右半面に特異点を持たず, 積分は右半面の適当な直線上でとられる. しかし実は, 以下に示す仮定のもと,  $F_0(\lambda)$  は右半面から左半面への解析接続  $F_1(\lambda)$  を持つことが示せる. このとき,  $F_1(\lambda)$  は左半面に極を持つかもしれない. この極を共鳴極といい, 固有値の 1 つの一般化になっている [17]. 共鳴極  $\mu$  は留数定理を通して式 (3.22) の積分値に影響する (Fig.4 を見よ). このようにして, 秩序変数  $Z_1^0(t)$  が  $\text{Re}(\mu)$  なる指数的速度で減少することが証明できるのである. このような共鳴極によって引き起こされる指数的減衰は Schrödinger 作用素の理論ではよく知られている [17]. 蔵本モデルに対しては Strogatz ら [19] や Balmforth ら [2] により数値的に確認された.

まずは  $F_0(\lambda)$  の解析接続を求めることから始めよう.

**Lemma 3.8.** 自然振動数の確率密度関数  $g(\omega)$  と初期条件  $q(\omega)$  は  $\mathbf{R}$  上実解析的であるとす. もし  $g(\omega)$  と  $q(\omega)$  がそれぞれ上半面への有理接続  $g^*(\lambda)$  と  $q^*(\lambda)$  を持つならば, 右半面で定義された解析関数  $F_0(\lambda)$  は左半面への有理接続  $F_1(\lambda)$  を持ち, それは

$$F_1(\lambda) = \frac{((\lambda - \sqrt{-1}\mathcal{M})^{-1}q, P_0) + 2\pi q^*(-\sqrt{-1}\lambda)g^*(-\sqrt{-1}\lambda)}{1 - \sqrt{-1}Kf_1D(\lambda) - 2\pi\sqrt{-1}Kf_1g^*(-\sqrt{-1}\lambda)} \quad (3.23)$$

で与えられる.

**Proof.** 公式 (3.14) より

$$\lim_{\text{Re}(\lambda) \rightarrow +0} ((\lambda - \sqrt{-1}\mathcal{M})^{-1}q, P_0) - \lim_{\text{Re}(\lambda) \rightarrow -0} ((\lambda - \sqrt{-1}\mathcal{M})^{-1}q, P_0) = 2\pi q(\text{Im}(\lambda)) \cdot g(\text{Im}(\lambda)) \quad (3.24)$$

が分かる. したがって関数  $((\lambda - \sqrt{-1}M)^{-1}q, P_0)$  の右から左への有理接続は

$$\begin{cases} ((\lambda - \sqrt{-1}M)^{-1}q, P_0) & (\operatorname{Re}(\lambda) > 0), \\ ((\lambda - \sqrt{-1}M)^{-1}q, P_0) + 2\pi q^*(-\sqrt{-1}\lambda)g^*(-\sqrt{-1}\lambda) & (\operatorname{Re}(\lambda) < 0) \end{cases} \quad (3.25)$$

で与えられるので, 式 (3.23) が得られる. ■

式 (3.23) より, 共鳴極は左半面における

$$D(\lambda) + 2\pi g^*(-\sqrt{-1}\lambda) = \frac{1}{\sqrt{-1}Kf_1}, \quad \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \quad (3.26)$$

の根, および  $q^*(-\sqrt{-1}\lambda)$  の極からなる. 次の定理では, 簡単のため  $q^*(-\sqrt{-1}\lambda)$  は極を持たないと仮定する. 秩序変数  $Z_1^0(t)$  は次のように計算される.

**Theorem 3.9.**  $j = 1$  のときの式 (3.2) に対し, 以下を仮定する.

- (i)  $\operatorname{Im}(f_1) < 0$  かつ  $0 < K < K_c^{(1)}$ .
- (ii) 確率密度関数  $g(\omega)$  は実解析的であり, 上半面への有理接続  $g^*(\lambda)$  を持つ.
- (iii) 初期条件  $q(\omega)$  は実解析的であり, 上半面への解析接続  $q^*(\lambda)$  を持つ.
- (iv) ある正定数  $\delta$  が存在し, 角領域

$$|\arg(\lambda)| \leq \delta, \quad |\arg(\lambda) - \pi| \leq \delta \quad (3.27)$$

上で  $|F_1(\lambda)| \rightarrow 0, |\lambda| \rightarrow \infty$  が成り立つ.

(v) ある正定数  $D, \beta$  が存在して, 角領域  $\pi/2 + \delta \leq \arg(\lambda) \leq 3\pi/2 - \delta$  上で

$$|F_1(\lambda)| \leq De^{\beta|\lambda|} \quad (3.28)$$

が成り立つ.

このとき, 作用素  $T_1$  の共鳴極が左半面に存在する.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  をその共鳴極で  $|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots$  なるものとしよう. このとき, ある正の定数  $t_0$  が存在して  $t > t_0$  なるとき秩序変数は

$$Z_1^0(t) = (e^{T_1 t} q, P_0) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) e^{\alpha_n t} \quad (3.29)$$

で与えられる. ここで  $p_n(t)$  は  $t$  についての多項式である. 特に  $Z_1^0(t)$  は  $t \rightarrow \infty$  で指数的に減衰する.

実際,  $K \rightarrow K_c^{(1)} + 0$  で虚軸に吸い込まれて消滅したように見えた固有値は, 実は虚軸をまたいで  $F_0(\lambda)$  の Riemann 面にもぐっていることが示せる. このことから共鳴極の存在が分かる. ただし固有値と連続的につながっていない共鳴極もありうることに注意せよ (後の例を参照). 式 (3.29) は, Fig.4 のように Laplace 積分の積分路を変形して  $C_1$  以外の路での積分が  $r \rightarrow \infty$  で零になることを示すことで得られる.

**Example 3.10.**  $g(\omega)$  が有理関数のとき,  $q^*(\lambda)$  が上半面で有界ならば定理の仮定が満たされる. このとき共鳴極は有限個しか存在せず, 式 (3.29) は有限和となる. 例えば  $g(\omega) = 1/(\pi(1 + \omega^2))$  がローレンツ分布ならば, 共鳴極は  $\lambda = \sqrt{-1}Kf_1 - 1$  で与えられ, し

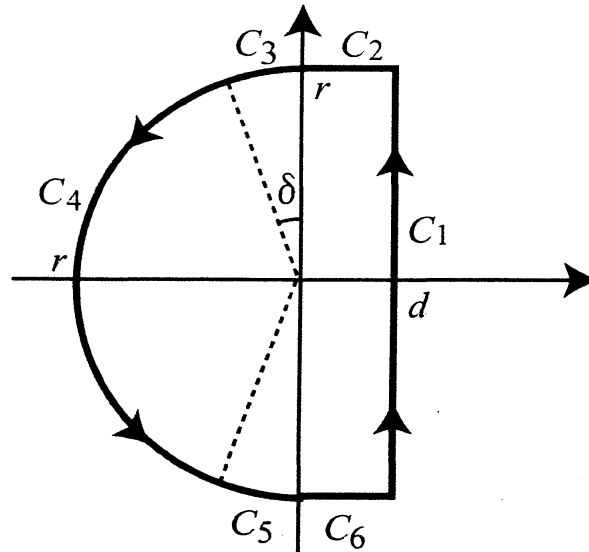


Fig. 4 Laplace 逆変換の積分路.

たがって  $Z_1^0(t)$  は  $\text{Re}(\sqrt{-1}Kf_1 - 1)$  なる指数的減衰率を持つ.

**Example 3.11.**  $g(\omega)$  がガウス分布のときは,  $q^*(\lambda)$  が指数型の関数, すなわちある正定数  $C$  と  $\beta$  が存在して  $|q^*(\lambda)| \leq Ce^{\beta|\lambda|}$  なるような関数ならば定理の条件は満たされる. 解析接続  $g^*(\lambda)$  は整関数であり無限遠点を真性特異点を持つため, 無限個の共鳴極が存在して無限遠点に集積していることが容易に確認できる.

### 3.5 Semi-group generated by the operator $T_1$ ( $\text{Im}(f_1) \geq 0$ )

3.1 節と 3.4 節では, それぞれ  $f_1 = 0$  と  $\text{Im}(f_1) < 0$  という仮定のもとで作用素  $T_1 = \sqrt{-1}M + \sqrt{-1}Kf_1\mathcal{P}$  が生成する半群の挙動を調べた. ここでは  $\text{Im}(f_1) \geq 0$  なる場合について, 結果のみを紹介しよう.

**Theorem 3.12.** 定理 3.9 の仮定 (ii) から (v) が満たされているとする. もし  $\text{Im}(f_1) \geq 0$  ならば, 任意の  $K > 0$  に対して秩序変数  $Z_1^0(t)$  は  $t \rightarrow \infty$  で指数的に減衰する.

$\text{Im}(f_1) = 0$  のときは,  $T_1/\sqrt{-1}$  が自己共役であることに注意して, これが掛け算作用素  $M$  とユニタリ同値であることを示すことによって証明できる.  $\text{Im}(f_1) > 0$  のときはパラメータを  $K \mapsto -K$  と書きなおせば, 問題は  $K < 0$  かつ  $\text{Im}(f_1) < 0$  の場合に帰着され, 定理 3.9 と同様にして証明できる.

## 参考文献

- [1] L. V. Ahlfors, *Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1978.
- [2] N. J. Balmforth, R. Sassi, A shocking display of synchrony, *Phys. D*, **143** (2000), 21–55.
- [3] H. Chiba, D. Pazó, Stability of an  $[N/2]$ -dimensional invariant torus in the Kuramoto

- model at small coupling, *Phys. D*, **238** (2009), 1068–1081.
- [4] H. Daido, Order Function and Macroscopic Mutual Entrainment in Uniformly Coupled Limit-Cycle Oscillators, *Prog. Theor. Phys.*, **88** (1992), 1213–1218.
- [5] H. Daido, Critical Conditions of Macroscopic Mutual Entrainment in Uniformly Coupled Limit-Cycle Oscillators, *Prog. Theor. Phys.*, **89** (1993), 929–934.
- [6] H. Daido, Generic scaling at the onset of macroscopic mutual entrainment in limit-cycle oscillators with uniform all-to-all coupling, *Phys. Rev. Lett.*, **73** (1994), 760.
- [7] H. Daido, Onset of cooperative entrainment in limit-cycle oscillators with uniform all-to-all interactions: bifurcation of the order function, *Phys. D*, **91** (1996), 24–66.
- [8] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [9] Y. Kuramoto, Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators, *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Phys.*, **39**. Springer, Berlin, 1975.
- [10] Y. Kuramoto, *Chemical oscillations, waves, and turbulence*, Springer Series in Synergetics, 19. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [11] Y. Maistrenko, O. Popovych, O. Burylko, P. A. Tass, Mechanism of desynchronization in the finite-dimensional Kuramoto model, *Phys. Rev. Lett.*, **93** (2004) 084102.
- [12] Y. L. Maistrenko, O. V. Popovych, P. A. Tass, Chaotic attractor in the Kuramoto model, *Int. J. of Bif. and Chaos*, **15** (2005) 3457–3466.
- [13] E. A. Martens, E. Barreto, S. H. Strogatz, E. Ott, P. So, T. M. Antonsen, Exact results for the Kuramoto model with a bimodal frequency distribution, *Phys. Rev. E*, **79** (2009) 026204.
- [14] R. E. Mirollo, S. H. Strogatz, The spectrum of the locked state for the Kuramoto model of coupled oscillators, *Phys. D*, **205** (2005), 249–266.
- [15] R. Mirollo, S. H. Strogatz, The spectrum of the partially locked state for the Kuramoto model, *J. Nonlinear Sci.*, **17** (2007), 309–347.
- [16] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Non-linear Sciences*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [17] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics IV. Analysis of operators*, Academic Press, New York-London, 1978.
- [18] S. H. Strogatz, From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators, *Phys. D*, **143** (2000), 1–20.
- [19] S. H. Strogatz, R. E. Mirollo, P. C. Matthews, Coupled nonlinear oscillators below the synchronization threshold: relaxation by generalized Landau damping, *Phys. Rev. Lett.*, **68** (1992), 2730–2733.
- [20] S. H. Strogatz, R. E. Mirollo, Stability of incoherence in a population of coupled oscillators, *J. Statist. Phys.*, **63** (1991), 613–635.
- [21] N. J. Vilenkin, *Special functions and the theory of group representations*, American Mathematical Society, 1968.
- [22] K. Yosida, *Functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.