

# 1 次元 Swarm oscillators 系におけるクラスター構造形成

巖佐正智 (Masatomo Iwasa)<sup>1</sup>

田中ダン (Dan Tanaka)<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> 名古屋大学大学院情報科学研究科複雑系科学専攻,  
(Department of Complex Systems Science,

Graduate School of Information Science, Nagoya University,)

<sup>2</sup> 科学技術振興機構戦略的創造研究推進事業 個人型研究 さきがけ  
「数学と諸分野の協働によるブレークスルーの探索」第一期研究員兼任  
(Precursory Research for Embryonic Science and Technology(PRESTO),  
Japan Science and Technology Agency (JST))

## 概要

内部自由度と空間自由度を持つ素子群が相互作用により様々な秩序構造を形成する系の一つとして, Swarm oscillators 系がある. この系では四つの実パラメータやシステムサイズ, 素子数に応じて様々な時空パターンを形成することが判っている. 本稿では, 特定のパラメータ範囲での 1 次元空間における任意の素子数の Swarm oscillators 系を取り上げ, 解析を行う. 解析の過程で, Swarm oscillators 系のくりこまれた表式を導出し, 利用する. 結果として, ダイナミクスを終状態として安定に存在する静止状態を全て解析的に同定する. 終状態としてはクラスター状態が現れ, それらは入れ子構造をとることが明らかとなる.

## 1 はじめに

クラスター構造形成は, 自己組織化する系の特徴的な性質であり, 様々な数理モデルが提唱されている [1, 2, 3, 4, 5]. そのようなモデルの一つとして, 相互作用によって空間的に動く振動子群を記述する Swarm oscillators 系がある. 各振動子は空間自由度と内部自由度 (位相) をもち, 各々の振動子間の距離と位相差から定まる相互作用に従って運動する. 具体的には各振動子は以下の微分方程式に従う [6].

$$\dot{\psi}_i = \sum_{\{j|j \neq i\}} e^{-|\mathbf{R}_{ji}|} \sin(\Psi_{ji} + \alpha|\mathbf{R}_{ji}| - c_1), \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i = c_3 \sum_{\{j|j \neq i\}} \hat{\mathbf{R}}_{ji} e^{-|\mathbf{R}_{ji}|} \sin(\Psi_{ji} + \alpha|\mathbf{R}_{ji}| - c_2). \quad (2)$$

ここで  $\psi_i$  と  $\mathbf{r}_i$  はそれぞれ  $i$  番目の振動子の位相と空間位置を表す.  $\dot{\cdot}$  は時刻  $t$  による微分を表し,  $\mathbf{R}_{ji} := \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ ,  $\Psi_{ji} := \psi_j - \psi_i$ ,  $\hat{\mathbf{R}}_{ji} := \mathbf{R}_{ji}/|\mathbf{R}_{ji}|$  である. また,  $0 \leq c_1 < 2\pi$ ,  $0 \leq c_2 < 2\pi$ ,  $0 \leq c_3$ ,  $0 \leq \alpha$  という四つの実パラメータが含まれている. 式の簡潔さの一方で, 数値シミュレーションによって, この系は豊富な時空間的秩序構造を創発することが判っている. それらの幾つかを図 1 に示す. よって, この Swarm oscillators 系を解析し, その挙動を理解することが, 自己組

織化する系の普遍的に内在する数理構造の解明に大きな役割を果たすと考えられる。さらに、ここ

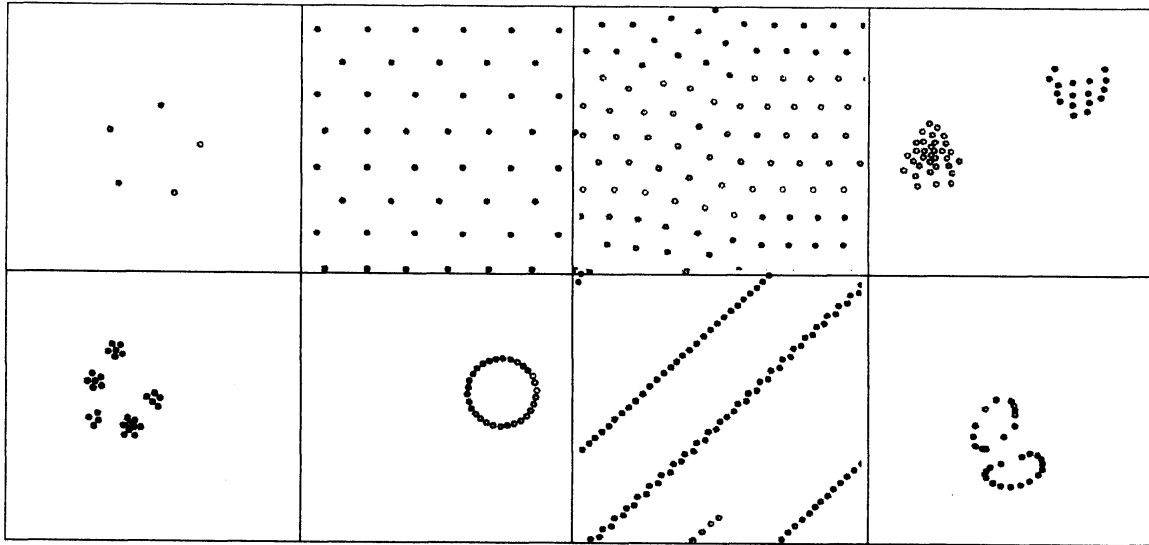


図1 Swarm oscillators 系が創発するパターンの例。2次元空間に散在する振動子群が形成する秩序構造であり、色は振動子の位相を表す。

では詳細を省くが、Swarm oscillators 系は物理学的背景を持つモデルであり、拡散・散逸する場の中に置かれた走化性振動子系に対して、中心多様体縮約と位相縮約を施し、その長時間の挙動を取り出した標準形であることを注意しておく [6]。

Swarm oscillators 系が見せるパターンの中で、ここでは特にクラスター構造に着目する。クラスターが集まりさらに大きなクラスターを形成することが Swarm oscillators 系の特徴である (図1左下)。この系の特徴を数理的かつ解析的に理解するには、まず単純なタイプのものにアプローチすることが妥当だと考えられる。そこで、Swarm oscillators 系の挙動を理解する第一段階として、ある特定のパラメータの下での1次元空間における Swarm oscillators 系に注目し、その解析を行い、振動子集団の挙動を理解することを目指す。

## 2 モデル

本稿では、ある特定のパラメータに対する1次元 Swarm oscillators 系の挙動を調べる。それは以下のようなものである。

$$\dot{\psi}_i = \sum_{\{j|j \neq i\}} e^{-|R_{ji}|} \sin(\Psi_{ji} + \alpha|R_{ji}| - c) \quad (3)$$

$$\dot{r}_i = c_3 \sum_{\{j|j \neq i\}} \frac{R_{ji}}{|R_{ji}|} e^{-|R_{ji}|} \sin(\Psi_{ji} + \alpha|R_{ji}| - c) \quad (4)$$

ここで  $r_i$  と  $\psi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) は  $i$  番目の振動子の位置と位相を表す。  $N$  は系の振動子数である。  $\dot{\cdot}$  は時刻  $t$  による微分を表す。  $R_{ji} := r_j - r_i$ ,  $\Psi_{ji} := \psi_j - \psi_i$  とそれぞれ導入されている。  $c_3$

と  $\alpha$  はそれぞれ 0 以上の実数であり,  $0 \leq c < 2\pi$  を満たす. 系のサイズは十分大きいものと仮定する. 常微分方程式系 (3) と (4) は, 常微分方程式系 (1) と (2) において  $c_1 = c_2$  とした場合に当る. さらに新たな変数を次のように導入する:  $\rho_i := r_i - r_{i-1}$ ,  $\theta_i := \psi_i - \psi_{i-1} \pmod{2\pi}$ , ( $i = 1, 2, \dots, N-1$ ). ここでは長時間での挙動, つまり各振動子がほぼ静止した状態を解析の対象とするので, 一般性を失うことなく  $\rho_i \geq 0$  と番号付けしてよい. これらの変数変換の下, 式 (3) と式 (4) は次のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i = & \sum_{j=1}^{i-1} e^{-\sum_{k=j}^{i-1} \rho_k} \sin \left( \alpha \sum_{k=j}^{i-1} \rho_k - \sum_{k=j}^{i-1} \theta_k - c \right) \\ & + \sum_{j=i}^{N-1} e^{-\sum_{k=i}^j \rho_k} \sin \left( \alpha \sum_{k=i}^j \rho_k + \sum_{k=i}^j \theta_k - c \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_i = & -c_3 \sum_{j=1}^{i-1} e^{-\sum_{k=j}^{i-1} \rho_k} \sin \left( \alpha \sum_{k=j}^{i-1} \rho_k - \sum_{k=j}^{i-1} \theta_k - c \right) \\ & + c_3 \sum_{j=i}^{N-1} e^{-\sum_{k=i}^j \rho_k} \sin \left( \alpha \sum_{k=i}^j \rho_k + \sum_{k=i}^j \theta_k - c \right). \end{aligned} \quad (6)$$

まずはこの力学系の固定点を求めたい. この力学系は次のような特徴を有することに注意する.

#### 命題

微分方程式系 (5) と (6) に対し,  $\dot{\psi}_1 = \dots = \dot{\psi}_N = \dot{r}_1 = \dots = \dot{r}_N = 0 \Leftrightarrow \dot{\theta}_1 = \dots = \dot{\theta}_{N-1} = \dot{\rho}_1 = \dots = \dot{\rho}_{N-1} = 0$ . すなわち, 微分方程式系 (5) と (6) は  $\{\rho_i\}$  と  $\{\theta_i\}$  に対する力学系であるが, この力学系の固定点は  $\{r_i\}$  と  $\{\psi_i\}$  に関して静止する解となっている.

#### 証明

$\Leftarrow$  は自明である.  $\Rightarrow$  を示す. 全ての  $i$  に対して  $\dot{\theta}_i = 0$  なので,  $\dot{\psi}_1 = \dots = \dot{\psi}_N$ . 同様に, 全ての  $i$  に対して  $\dot{\rho}_i = 0$  なので,  $\dot{r}_1 = \dots = \dot{r}_N$ . 式 (5) と式 (6) における,  $\dot{r}_1$ ,  $\dot{\psi}_1$ ,  $\dot{r}_N$ ,  $\dot{\psi}_N$  に対する具体的な表式より, ただちに  $\dot{r}_1 = c_3 \dot{\psi}_1$  と  $\dot{r}_N = -c_3 \dot{\psi}_N$  であることが判る.  $\square$

この系に対し, 数値シミュレーションを行った結果が図 2 に示されている. そこには, クラスターの入れ子構造が出現していることが判る. すなわち, いくつかの大きさのクラスターがあり, 小さいクラスターが集まって, より大きなクラスターを形成するという構造が続く.

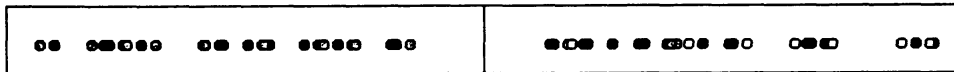


図 2 本稿で取り上げる 1 次元 Swarm oscillators 系において, ランダムな初期配位の下で行った数値シミュレーション結果の例. 素子数は 30, 各パラメータの値は  $c = 1.0$ ,  $c_3 = 1.5$ ,  $\alpha = 1.5$  であり, システムサイズは 100 である. 色は各振動子の位相を表している. これらは全てダイナミクスの終状態であり, 空間位置と位相は共に静止している.

### 3 Swarm oscillators 系のくりこまれた表式

より明解な議論を行うために、くりこまれた Swarm oscillators 系を導入する。それは、式 (5) と式 (6) を書き換えた、Swarm oscillators 系の以下のような表式である。

$$\dot{\psi}_1 = A_1^+ e^{-\rho_1} \sin(\alpha\rho_1 + \theta_1 - c - \kappa_1^+), \quad (7)$$

$$\dot{r}_1 = c_3 A_1^+ e^{-\rho_1} \sin(\alpha\rho_1 + \theta_1 - c - \kappa_1^+), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i &= A_{i-1}^- e^{-\rho_{i-1}} \sin(\alpha\rho_{i-1} - \theta_{i-1} - c - \kappa_{i-1}^-) \\ &\quad + A_i^+ e^{-\rho_i} \sin(\alpha\rho_i + \theta_i - c - \kappa_i^+), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_i &= -c_3 A_{i-1}^- e^{-\rho_{i-1}} \sin(\alpha\rho_{i-1} - \theta_{i-1} - c - \kappa_{i-1}^-) \\ &\quad + c_3 A_i^+ e^{-\rho_i} \sin(\alpha\rho_i + \theta_i - c - \kappa_i^+), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\dot{\psi}_N = A_{N-1}^- e^{-\rho_{N-1}} \sin(\alpha\rho_{N-1} - \theta_{N-1} - c - \kappa_{N-1}^-), \quad (11)$$

$$\dot{r}_N = -c_3 A_{N-1}^- e^{-\rho_{N-1}} \sin(\alpha\rho_{N-1} - \theta_{N-1} - c - \kappa_{N-1}^-), \quad (12)$$

ここで、 $i = 2, \dots, N-1$  である。 $A_i^-$  と  $\kappa_i^-$  ( $i = 1, \dots, N-1$ ) は  $\{\rho_1, \dots, \rho_{i-1}, \theta_1, \dots, \theta_{i-1}\}$  の関数であり。 $A_i^+$  と  $\kappa_i^+$  ( $i = 1, \dots, N-1$ ) は  $\{\rho_{i+1}, \dots, \rho_{N-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_{N-1}\}$  の関数である。明らかに、 $A_1^- = A_{N-1}^+ = 1$  が成り立ち、 $\kappa_1^- = \kappa_{N-1}^+ = 0$  が成り立つ。導出の詳細は付録でみることにする。ただ、次のことには注意しておく：仮に全ての  $i$  に対し、 $\kappa_i^- = \kappa_i^+ = 0$  かつ  $A_i^- = A_i^+ = 1$  とすると、これは最近接にある振動子からの相互作用のみを取り入れて、構成した Swarm oscillators 系の運動方程式となっている。すなわちこの意味で、 $\kappa_i^-$ ,  $\kappa_i^+$ ,  $A_i^-$ ,  $A_i^+$  は隣より遠い振動子との相互作用を最近接振動子との相互作用にくりこんだものといえる。このくりこまれた表式を利用して、力学系の固定点を調べ、その安定性を解析し、ダイナミクスの終状態として現れる、静止したクラスター状態を得ることができる。

### 4 固定点

まず、この系の固定点を探す。固定点は代数方程式  $\dot{\psi}_i = \dot{r}_i = 0$  の解である。それは

$$\sin(\alpha\rho_i - \theta_i - c - \kappa_i^-) = 0, \quad (13)$$

$$\sin(\alpha\rho_i + \theta_i - c - \kappa_i^+) = 0, \quad (14)$$

$$\text{for } i = 1, \dots, N-1.$$

と書き換えられる。この解は形式的に

$$\rho_i = \frac{1}{2\alpha} [2c + n\pi + (\kappa_i^+ + \kappa_i^-)], \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (15)$$

$$\theta_i = \frac{1}{2}(\kappa_i^+ - \kappa_i^-) \text{ or } \frac{1}{2}(\kappa_i^+ - \kappa_i^-) + \pi. \quad (16)$$

と書かれる。原理的には、式 (15) と式 (16) を  $\{\rho_i\}$  と  $\{\theta_i\}$  について、セルフコンシステントに解けば、静止状態での振動子間の距離と位相差とを得ることができる。厳密解を解析的に構成するこ

とは困難であるが、

$$\frac{2c + n_0\pi}{2\alpha} \sim 1, \quad (17)$$

の条件下では距離と位相差を近似的に求められる。ここで  $n_0$  は  $2c + n_0\pi > 0$  を満たす最小の整数である。この条件は、 $\alpha \gg 1$  または  $c \simeq \frac{\pi}{2}$ ,  $c \simeq \frac{3\pi}{2}$  という特殊な場合を除いていつも成立する条件である。付録を参照することにより、この条件の下では、 $\kappa_i^-$  と  $\kappa_i^+$  は共に 1 に比べて十分小さいことが判る。ゆえに振動子間の空間的距離は整数  $n$  でラベルされる離散的な値をとることが判り、振動子間の位相差は、ほぼ 0 かほぼ  $\pi$  をとることも明らかになった。具体的な近似解の構成は後に三体系に対して行う。なお、 $\kappa_i^+ = \kappa_i^- = 0$  のときは最近接相互作用近似に相当するので、どのような静止解も、最近接相互作用近似から得られるものと 1 対 1 の対応付けが可能である。

## 5 安定性解析

線形安定性解析によって、上記の条件の下で出現する配位について調べる。以下の議論から、各固定点の安定性は、最近接相互作用近似の下での対応する各固定点の安定性と一致することが判る。 $\{\rho_0, \theta_0\}$  を Swarm oscillators 系の固定点とする。すなわち、

$$\sin(\alpha\rho_{0i} - \theta_{0i} - c - \kappa_{0i}^-) = 0, \quad (18)$$

$$\sin(\alpha\rho_{0i} + \theta_{0i} - c - \kappa_{0i}^+) = 0, \quad (19)$$

$$\text{for } i = 1, \dots, N-1.$$

$\rho_i =: \rho_{0i} + \tilde{\rho}_i$ ,  $\theta_i =: \theta_{0i} + \tilde{\theta}_i$  の下、線形化方程式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= \dot{\psi}_{i+1} - \dot{\psi}_i, \\ &= A_i^- e^{-\rho_i} \sin(\alpha\rho_i - \theta_i - c - \kappa_i^-) + A_{i+1}^+ e^{-\rho_{i+1}} \sin(\alpha\rho_{i+1} + \theta_{i+1} - c - \kappa_{i+1}^+), \\ &\quad - A_{i-1}^- e^{-\rho_{i-1}} \sin(\alpha\rho_{i-1} - \theta_{i-1} - c - \kappa_{i-1}^-) - A_i^+ e^{-\rho_i} \sin(\alpha\rho_i + \theta_i - c - \kappa_i^+), \quad (20) \\ \dot{\tilde{\theta}}_i &= A_{0i}^- e^{-\rho_{0i}} \sigma_i \left[ \alpha\tilde{\rho}_i - \tilde{\theta}_i - \sum_k \frac{\partial \kappa_i^-}{\partial \theta_k} \bigg|_0 \tilde{\theta}_k - \sum_k \frac{\partial \kappa_i^-}{\partial \rho_k} \bigg|_0 \tilde{\rho}_k \right] \\ &\quad + A_{0i+1}^+ e^{-\rho_{0i+1}} \sigma_{i+1} \left[ \alpha\tilde{\rho}_{i+1} + \tilde{\theta}_{i+1} - \sum_k \frac{\partial \kappa_{i+1}^+}{\partial \theta_k} \bigg|_0 \tilde{\theta}_k - \sum_k \frac{\partial \kappa_{i+1}^+}{\partial \rho_k} \bigg|_0 \tilde{\rho}_k \right] \\ &\quad - A_{0i-1}^- e^{-\rho_{0i-1}} \sigma_{i-1} \left[ \alpha\tilde{\rho}_{i-1} - \tilde{\theta}_{i-1} - \sum_k \frac{\partial \kappa_{i-1}^-}{\partial \theta_k} \bigg|_0 \tilde{\theta}_k - \sum_k \frac{\partial \kappa_{i-1}^-}{\partial \rho_k} \bigg|_0 \tilde{\rho}_k \right] \\ &\quad - A_{0i}^+ e^{-\rho_{0i}} \sigma_i \left[ \alpha\tilde{\rho}_i + \tilde{\theta}_i - \sum_k \frac{\partial \kappa_i^+}{\partial \theta_k} \bigg|_0 \tilde{\theta}_k - \sum_k \frac{\partial \kappa_i^+}{\partial \rho_k} \bigg|_0 \tilde{\rho}_k \right] \\ &\quad + O(\{\tilde{\rho}_i^2\}, \{\tilde{\rho}_i \tilde{\theta}_i\}, \{\tilde{\theta}_i^2\}), \quad (21) \end{aligned}$$

ここで  $|_0$  は、微分した後に  $(\rho_0, \theta_0)$  を代入することを表しており、 $\sigma_i := \cos(\alpha\rho_{0i} - \theta_{0i} - c - \kappa_{i0}^-) = \cos(\alpha\rho_{0i} + \theta_{0i} - c - \kappa_{i0}^+) = 1$  または  $-1$  である。同様に、

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_i &= \dot{r}_{i+1} - \dot{r}_i, \\
&= -A_i^- e^{-\rho_i} \sin(\alpha\rho_i - \theta_i - c - \kappa_i^-) + A_{i+1}^+ e^{-\rho_{i+1}} \sin(\alpha\rho_{i+1} + \theta_{i+1} - c - \kappa_{i+1}^+) \\
&\quad + A_{i-1}^- e^{-\rho_{i-1}} \sin(\alpha\rho_{i-1} - \theta_{i-1} - c - \kappa_{i-1}^-) - A_i^+ e^{-\rho_i} \sin(\alpha\rho_i + \theta_i - c - \kappa_i^-), \quad (22) \\
\dot{\rho}_i &= -A_{0i}^- e^{-\rho_{0i}} \sigma_i \left[ \alpha\tilde{\rho}_i - \tilde{\theta}_i - \sum_k \frac{\partial \kappa_i^-}{\partial \theta_k} \Big|_0 \tilde{\theta}_k - \sum_k \frac{\partial \kappa_i^-}{\partial \rho_k} \Big|_0 \tilde{\rho}_k \right] \\
&\quad + A_{0i+1}^+ e^{-\rho_{0i+1}} \sigma_{i+1} \left[ \alpha\tilde{\rho}_{i+1} + \tilde{\theta}_{i+1} - \sum_k \frac{\partial \kappa_{i+1}^+}{\partial \theta_k} \Big|_0 \tilde{\theta}_k - \sum_k \frac{\partial \kappa_{i+1}^+}{\partial \rho_k} \Big|_0 \tilde{\rho}_k \right] \\
&\quad + A_{0i-1}^- e^{-\rho_{0i-1}} \sigma_{i-1} \left[ \alpha\tilde{\rho}_{i-1} - \tilde{\theta}_{i-1} - \sum_k \frac{\partial \kappa_{i-1}^-}{\partial \theta_k} \Big|_0 \tilde{\theta}_k - \sum_k \frac{\partial \kappa_{i-1}^-}{\partial \rho_k} \Big|_0 \tilde{\rho}_k \right] \\
&\quad - A_{0i}^+ e^{-\rho_{0i}} \sigma_i \left[ \alpha\tilde{\rho}_i + \tilde{\theta}_i - \sum_k \frac{\partial \kappa_i^+}{\partial \theta_k} \Big|_0 \tilde{\theta}_k - \sum_k \frac{\partial \kappa_i^+}{\partial \rho_k} \Big|_0 \tilde{\rho}_k \right] \\
&\quad + O(\{\tilde{\rho}_i^2\}, \{\tilde{\rho}_i \tilde{\theta}_i\}, \{\tilde{\theta}_i^2\}). \quad (23)
\end{aligned}$$

前に述べたように、 $\partial_{\theta} \kappa|_0$  と  $\partial_{\rho} \kappa|_0$  は十分小さく、 $A_0^-$  と  $A_0^+$  は十分 1 に近いので、固定点  $\{\theta_0, \rho_0\}$  の安定性は、最近接相互作用によって得られる対応する固定点のそれと一致することが判る。

よって、最近接相互作用のみを取り入れて構成した力学系の固定点の安定性を調べさえすれば十分である。そのような力学系の線形化方程式は以下ようになる。

$$\dot{\theta}_i = -e^{-\rho_{0i-1}} \sigma_{i-1} (\alpha\tilde{\rho}_{i-1} - \tilde{\theta}_{i-1}) - 2e^{-\rho_{0i}} \sigma_i \tilde{\theta}_i + e^{-\rho_{0i+1}} \sigma_{i+1} (\alpha\tilde{\rho}_{i+1} + \tilde{\theta}_{i+1}), \quad (24)$$

$$\dot{\rho}_i = c_3 e^{-\rho_{0i-1}} \sigma_{i-1} (\alpha\tilde{\rho}_{i-1} - \tilde{\theta}_{i-1}) - 2\alpha c_3 e^{-\rho_{0i}} \sigma_i \tilde{\rho}_i + c_3 e^{-\rho_{0i+1}} \sigma_{i+1} (\alpha\tilde{\rho}_{i+1} + \tilde{\theta}_{i+1}). \quad (25)$$

詳細は省くが、通常の固有値解析を行えば、全ての  $i$  に対して  $\sigma_i = 1$  が成り立つとき、かつそのときに限り、固定点が安定であることが結果として得られる。換言すれば、隣り合う二つの振動子間の距離が偶数の  $n$  でラベルされる値をとっていれば、それらの振動子間の位相差はほぼ 0 であり、奇数の  $n$  でラベルされる値をとっていれば、位相差はほぼ  $\pi$  であるような配位が安定となる。

このように、特定のパラメータ領域でかつ条件 (17) の下での、1次元 Swarm oscillators 系において、振動子の安定な静止配位が得られたことになる。この得られた配置の特徴は如何なるものであろうか。仮に、取り得る最小の  $n$  の値を 0 としよう。すなわち  $0 < c < \frac{\pi}{2}$  とする。このとき最も小さいクラスターは、振動子間の距離が  $n = 0$  でラベルされるものの集まりからなっており、それらの振動子は全てがほぼ同期している。それらの小さなクラスターが  $n = 1$  でラベルされる距離だけ離れて位置しており、次の大きさのクラスターを形成する。そのクラスターを構成する小さいクラスター同士は位相がおおよそ  $\pi$  ずれている。さらにそのクラスター同士が  $n = 2$  でラベルされる距離だけ離れて位置することで、次の大きさのクラスターを形成する。このように、クラスターの入れ子構造が形成される (図 3 参照)。

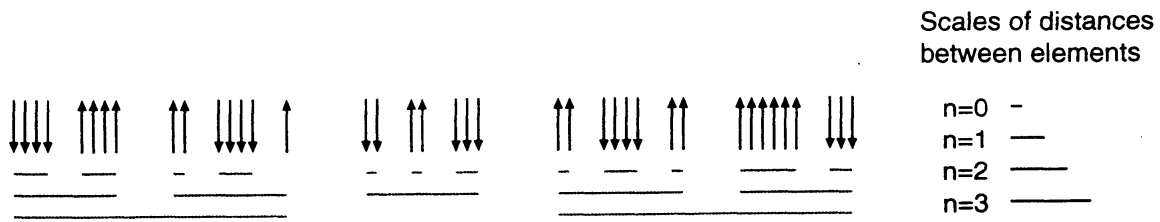


図3 本稿で扱う1次元 Swarm oscillators 系の終状態として現れる，クラスターの入れ子構造の模式図．矢印の向きは各振動子の位相を表しており，矢印の下線は各クラスターの単位を示している．小さなクラスターが集まって，あるクラスターを形成し，さらにそれらが集合してより大きなクラスターを作る入れ子構造となっている．

## 6 三体系の解析

例として，三体系を取り上げる．三体系に対しては，振動子間距離と振動子間の位相差を多体効果を含んだ形で近似的に解析的計算から求めることができる．三体系に対する Swarm oscillators 系の微分方程式は次のように書ける．

$$\dot{\psi}_1 = e^{-\rho_1} \sin(\alpha\rho_1 + \theta_1 - c) + e^{-\rho_1 - \rho_2} \sin(\alpha(\rho_1 + \rho_2) + (\theta_1 + \theta_2) - c) \quad (26)$$

$$=: A_1^+ e^{-\rho_1} \sin(\alpha\rho_1 + \theta_1 - c - \kappa_1^+), \quad (27)$$

$$\dot{\psi}_2 = e^{-\rho_1} \sin(\alpha\rho_1 - \theta_1 - c) + e^{-\rho_2} \sin(\alpha\rho_2 + \theta_2 - c), \quad (28)$$

$$\dot{\psi}_3 = e^{-\rho_1 - \rho_2} \sin(\alpha(\rho_1 + \rho_2) - (\theta_1 + \theta_2) - c) + e^{-\rho_2} \sin(\alpha\rho_2 - \theta_2 - c), \quad (29)$$

$$=: A_2^- e^{-\rho_2} \sin(\alpha\rho_2 - \theta_2 - c - \kappa_2^-), \quad (30)$$

$$\dot{r}_1 = A_1^+ e^{-\rho_1} \sin(\alpha\rho_1 + \theta_1 - c - \kappa_1^+), \quad (31)$$

$$\dot{r}_2 = -e^{-\rho_1} \sin(\alpha\rho_1 - \theta_1 - c) + e^{-\rho_2} \sin(\alpha\rho_2 + \theta_2 - c), \quad (32)$$

$$\dot{r}_3 = -A_2^- e^{-\rho_2} \sin(\alpha\rho_2 - \theta_2 - c - \kappa_2^-). \quad (33)$$

ここで，

$$\sin \kappa_i^\pm := \frac{-\sigma_{i\pm 1}^\pm e^{-\rho_{i\pm 1}} \sin c}{A_i^\pm}, \quad (34)$$

$$\cos \kappa_i^\pm := \frac{1 + \sigma_{i\pm 1}^\pm e^{-\rho_{i\pm 1}} \cos c}{A_i^\pm}, \quad (35)$$

$$A_i^\pm := [1 + \sigma_{i\pm 1}^\pm 2 e^{-\rho_{i\pm 1}} \cos c + e^{-2\rho_{i\pm 1}}]^{1/2}, \quad (36)$$

$$\sigma_i^\pm := \cos(\alpha\rho_i \pm \theta_i - c), \quad (37)$$

である．まずはこの系の固定点を探す．それらは，つぎの方程式の解である．

$$\sin(\alpha\rho_1 - \theta_1 - c) = 0, \quad (38)$$

$$\sin(\alpha\rho_2 - \theta_2 - c - \kappa_2^-) = 0, \quad (39)$$

$$\sin(\alpha\rho_1 + \theta_1 - c - \kappa_1^+) = 0, \quad (40)$$

$$\sin(\alpha\rho_2 + \theta_2 - c) = 0. \quad (41)$$

ここで,  $\sigma_i^+ = \sigma_i^- =: \sigma_i = 1$  または  $-1$  である. この解は形式的に, 整数の組  $(n_1, n_2)$  を用いて,

$$\rho_1 = \frac{2c + n_1\pi + \kappa_1^+}{2\alpha}, \quad (42)$$

$$\rho_2 = \frac{2c + n_2\pi + \kappa_2^-}{2\alpha}, \quad (43)$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\kappa_1^+ \text{ or } \frac{1}{2}\kappa_1^+ + \pi, \quad (44)$$

$$\theta_2 = -\frac{1}{2}\kappa_2^- \text{ or } -\frac{1}{2}\kappa_2^- + \pi. \quad (45)$$

と書ける. では, 振動子間距離と位相差を見積もる. 式 (34) と式 (35) を用いて,

$$\kappa_1^+ = -\sigma_2 e^{-\frac{2c+n_2\pi}{2\alpha}} \sin c, \quad (46)$$

$$\kappa_2^- = -\sigma_1 e^{-\frac{2c+n_1\pi}{2\alpha}} \sin c. \quad (47)$$

と近似することができる. よって振動子間距離と位相差が

$$\rho_1 = \frac{2c + n_1\pi}{2\alpha} - \sigma_2 e^{-\frac{2c+n_2\pi}{2\alpha}} \frac{\sin c}{2\alpha}, \quad (48)$$

$$\rho_2 = \frac{2c + n_2\pi}{2\alpha} - \sigma_1 e^{-\frac{2c+n_1\pi}{2\alpha}} \frac{\sin c}{2\alpha}, \quad (49)$$

$$\theta_1 = -\sigma_2 e^{-\frac{2c+n_2\pi}{2\alpha}} \sin c \text{ or } -\sigma_2 e^{-\frac{2c+n_2\pi}{2\alpha}} \sin c + \pi, \quad (50)$$

$$\theta_2 = -\sigma_1 e^{-\frac{2c+n_1\pi}{2\alpha}} \sin c \text{ or } -\sigma_1 e^{-\frac{2c+n_1\pi}{2\alpha}} \sin c + \pi. \quad (51)$$

と見積られる. さらに, 線形安定性解析から,  $n_1$  が偶数のとき  $\theta_1$  は  $-e^{-\frac{2c+n_2\pi}{2\alpha}} \sin c$  の値をとり,  $n_1$  が奇数のとき  $\theta_1$  は  $-e^{-\frac{2c+n_2\pi}{2\alpha}} \sin c + \pi$  の値をとることが判る. また,  $n_2$  が偶数のとき  $\theta_2$  は  $-e^{-\frac{2c+n_1\pi}{2\alpha}} \sin c$  の値をとり,  $n_2$  が奇数のとき  $\theta_2$  は  $-e^{-\frac{2c+n_1\pi}{2\alpha}} \sin c + \pi$  の値をとることが判る.

## 7 まとめ

本稿では, 特定の型の 1 次元 Swarm oscillators 系の解析を行った. 結果として, ダイナミクスの終状態として現れる, 全ての静止クラスター状態を同定し, クラスターの入れ子構造が出現することが明らかとなった. この系は, 短距離相互作用をする動く振動子が長距離秩序をもたらす例となっていることも同時に明らかになったといえる. 三体系に対しては, 多体効果を解析的に見積もることができ, 二体系に比べて振動子間距離や位相差がどの程度変化するのが明らかにされた.

導出の過程で構成された Swarm oscillators 系のくりこまれた表式は, 解析に有用であったといえる. このアプローチを適宜拡張し, 高次元における Swarm oscillators モデルの解析や, 他の短距離力の作用する駆動型粒子モデルの解析への応用が期待される.



## 付録 A Swarm oscillators 系のくりこまれた表式の導出

微分方程式 (5) および (6) において,  $e^{-\rho_i - \dots - \rho_{i+k} - \rho_{i+k+1}}$  に比例する項を  $e^{-\rho_i - \dots - \rho_{i+k}}$  に比例する項にくりこむ. これらの項は, いずれも  $i$  番目の振動子とそれより '右側' にある振動子との相互作用である. くりこむ過程は以下のようなものである.

$$\begin{aligned} & e^{-\rho_i - \dots - \rho_{i+k}} \sin [\alpha (\rho_i + \dots + \rho_{i+k}) + \theta_i + \dots + \theta_{i+k} - c] \\ & + Ae^{-\rho_i - \dots - \rho_{i+k} - \rho_{i+k+1}} \sin [\alpha (\rho_i + \dots + \rho_{i+k} + \rho_{i+k+1}) + \theta_i + \dots + \theta_{i+k} + \theta_{i+k+1} - c - \kappa] \\ & =: A'e^{-\rho_i - \dots - \rho_{i+k}} \sin [\alpha (\rho_i + \dots + \rho_{i+k}) + \theta_i + \dots + \theta_{i+k} - c - \kappa'], \end{aligned} \quad (52)$$

ここで,

$$A' := [1 + 2Ae^{-\rho_{i+k+1}} \cos(\alpha\rho_{i+k+1} + \theta_{i+k+1} - \kappa) + A^2e^{-2\rho_{i+k+1}}]^{\frac{1}{2}}, \quad (53)$$

$$\cos \kappa' := [1 + Ae^{-\rho_{i+k+1}} \cos(\alpha\rho_{i+k+1} + \theta_{i+k+1} - \kappa)] / A', \quad (54)$$

$$\sin \kappa' := -Ae^{-\rho_{i+k+1}} \sin(\alpha\rho_{i+k+1} + \theta_{i+k+1} - \kappa) / A'. \quad (55)$$

同様にして,  $i$  番目の振動子とそれより '左側' にある振動子との相互作用は次のようくりこまれる.

$$\begin{aligned} & Ae^{-\rho_{i-k-1} - \rho_{i-k} - \dots - \rho_{i-1}} \sin [\alpha (\rho_{i-k-1} + \rho_{i-k} + \dots + \rho_{i-1}) - (\theta_{i-k-1} + \theta_{i-k} + \dots + \theta_{i-1}) - c - \kappa] \\ & + e^{-\rho_{i-k} - \dots - \rho_{i-1}} \sin [\alpha (\rho_{i-k} + \dots + \rho_{i-1}) - (\theta_{i-k} + \dots + \theta_{i-1}) - c] \\ & =: A'e^{-\rho_{i-k} - \dots - \rho_{i-1}} \sin [\alpha (\rho_{i-k} + \dots + \rho_{i-1}) - (\theta_{i-k} + \dots + \theta_{i-1}) - c - \kappa'], \end{aligned} \quad (56)$$

ここで

$$A' := [1 + 2Ae^{-\rho_{i-k-1}} \cos(\alpha\rho_{i-k-1} + \theta_{i-k-1} - \kappa) + A^2e^{-2\rho_{i-k-1}}]^{\frac{1}{2}}, \quad (57)$$

$$\cos \kappa' := [1 + Ae^{-\rho_{i-k-1}} \cos(\alpha\rho_{i-k-1} + \theta_{i-k-1} - \kappa)] / A', \quad (58)$$

$$\sin \kappa' := -Ae^{-\rho_{i-k-1}} \sin(\alpha\rho_{i-k-1} + \theta_{i-k-1} - \kappa) / A'. \quad (59)$$

この操作を,  $i$  番目の振動子から遠い振動子との相互作用から順に繰り返すことにより, くりこまれた表示 (7)-(12) を得ることができる.

## 参考文献

- [1] T. Vicsek, A. Czirok, E. Ben-Jacob, I. Cohen and O. Shochet, Phys. Rev. Lett. **75**, 1226 (1995)
- [2] U. Erdmann, W Ebeling and V. S. Anishchenko, Phys. Rev. E **65** 061106 (2002)
- [3] V. Gazi and K. M. Passino, IEEE Transactions on automatic control **48** 692 (2003)
- [4] T. Shibata and K. Kaneko, Physica D **181**, 197 (2003)
- [5] D. H. Zanette and A. S. Mikhailov, Physica D **194** 203 (2004)
- [6] D. Tanaka, Phys. Rev. Lett. **99**, 134103 (2007)