

# On an edge-signed generalization of chordal graphs and free multiplicities on braid arrangements

沼田 泰英<sup>\*†</sup>

## 概要

ベクトル空間内の超平面の集まりを超平面配置と呼び、さらに非負整数の重みを持たせたものを多重配置と呼ぶが、多重配置に応じて定められる対数的ベクトル場たちのなす加群が自由加群となる時、その多重配置は自由であるといわれる。Stanley は、グラフによってパラメトライズされるある超平面配置の族において、配置が自由であることと元のグラフが chordal であることの同値性を示した。2 種類の辺を持つグラフを用いて Stanley の結果の拡張したので報告する。なおこの研究は阿部拓郎氏 (京都大学)、縫田光司氏 (産業技術総合研究所) との共同研究である。

## 1 Introduction

$\mathbb{K}$  を標数 0 の体とし、 $V$  を  $\mathbb{K}$  上の  $l$  次元線形空間  $\mathbb{K}^l$  とする。  $S$  を  $\mathbb{K}$  係数多項式環  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_l]$  とし、 $\text{Sym}(V^*)$  と同一視する。今  $S$  は自然な次数付けで次数付き  $\mathbb{K}$  代数の構造  $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} S_i$  を持っている ( $S_i$  は  $i$  次斉次多項式からなる  $\mathbb{K}$  線形空間)。  $\text{Der}(S)_i = S_i \partial_1 \oplus \dots \oplus S_i \partial_l$  (ただし  $\partial_i$  は  $x_i$  の辺微分作用素) とおき、  $\text{Der}(S) = \bigoplus_i \text{Der}(S)_i$  と定義する。通常のかげ算で  $\text{Der}(S)$  には次数つき左  $S$  加群の構造が入る。

原点を含むような超平面の finite collection を central hyperplane arrangement (超平面配置) と呼び、central hyperplane arrangement  $\mathcal{A}$  と写像  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$  の組  $(\mathcal{A}, \mu)$  を a multiarrangement (of hyperplanes) と呼ぶ。特に、 $l$  次元空間内で考えていることを強調し、 $l$ -multiarrangement と呼ぶこともある。<sup>\*1</sup> また、central hyperplane arrangement

---

\* 東京大学 情報理工学系研究科, numata@stat.t.u-tokyo.ac.jp

† JST CREST

<sup>\*1</sup> 通常、 $l$ -multiarrangement は central arrangement  $\mathcal{A}$  と写像  $m : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$  の組  $(\mathcal{A}, m)$  として定義される。我々の定義による  $l$ -multiarrangement  $(\mathcal{A}, \mu)$  が与えられた時、 $\mathcal{A}' = \mu^{-1}(\{0\})$ ,  $m = \mu|_{\mathcal{A}'}$  と置くことで、通常 of 定義の  $l$ -multiarrangement  $(\mathcal{A}', m)$  を得る。この方法で二つの定義は同一視できるが、本稿においては、0 を含む方が扱いやすいのでそちらの定義を採用する。

$\mathcal{A}$  と multiplicity が全て 1 である multiarrangement  $(\mathcal{A}, \underline{1}: \mathcal{A} \ni H \mapsto 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$  を同一視し, 特に simple arrangement という場合もある.

ここでは, multiarrangement  $(\mathcal{A}, \mu)$  と, 次で定義される写像  $\bar{\mu}: S_1 \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  を同一視することにする:

$$\bar{\mu}(\alpha) = \begin{cases} \mu(\ker(\alpha)) & \ker(\alpha) \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Multiarangement  $(\mathcal{A}, \mu) = \bar{\mu}$  に対して, 対数的ベクトル場のなす  $S$ -加群  $D(\mathcal{A}, \mu)$  を

$$D(\mathcal{A}, \mu) = \left\{ \theta = \text{Der}(S) \mid \forall \alpha \in S_1, \theta(\alpha) \in (\alpha^{\bar{\mu}(\alpha)}) \right\}$$

で定義する.  $D(\mathcal{A}, \mu)$  には graded left  $S$ -module の構造が入る.  $D(\mathcal{A}, \mu)$  が自由  $S$  加群となるとき, multiarrangement  $(\mathcal{A}, \mu)$  が自由であるという. また,  $D(\mathcal{A}, \mu)$  が自由  $S$  加群となるとき, 斉次基底  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l\}$  を取ることが出来るが, その斉次基底の次数を集めた multiset  $[\deg(\theta_1), \dots, \deg(\theta_l)]$  を  $(\mathcal{A}, \mu)$  の exponents といい,  $\exp(\mathcal{A}, \mu)$  と書く.

次のような自然な問題が思い付く.

**Problem 1.1** どのような Multiarangement  $(\mathcal{A}, \mu)$  が自由になるのか? またその時  $\exp(\mathcal{A}, \mu)$  はどうなるのか?

我々は, [1] において, 2 種類の辺を持つグラフでパラメトライズされるある multiarrangement の族に対して, この問題の答えを得たので, その概略を報告する. 詳しい背景や証明などは [1] を参照されたい.

## 2 既知の結果

### 2.1 Graph に関する用語

この節ではグラフ  $G = (V, E)$  として simple nondirected なもののみを考える. すなわち,  $V$  は有限集合で  $E \subset \binom{V}{2} = \{\{v, w\} \subset V \mid v \neq w\}$  となっているものを考える. つまりここでは多重辺や self loop は許さない.

$$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\} \in E$$

となっている相異なる頂点の列  $v_1, \dots, v_n \in V$  を長さ  $n$  のサイクルと呼ぶ. 端点をサイクル  $v_1, \dots, v_n$  上の頂点とする辺  $\{v_i, v_j\} \in E$  のうち  $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$  以外のものをサイクルの弦と呼ぶ. 大雑把に言うと弦とはそのサイクルの 'ショー

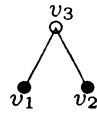


図1 Perfect elimination order には現れない誘導部分グラフ

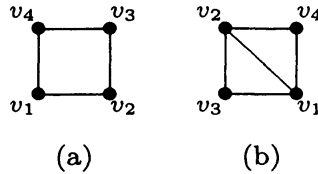


図2 Chordal でないグラフと Chordal なグラフ

トカット' となっている様な辺のことである. グラフ  $G = (V, E)$  の長さ 4 以上のサイクルのうち弦を持たないものをホールと呼ぶ.

**Definition 2.1**  $G = (V, E)$  がホールを持たないとき, chordal であるという.

Chordal graph の特徴付けとして次が知られている.

**Proposition 2.2** 次は同値:

- $G = (V, E)$  が chordal.
- 次を満たす全単射  $\sigma: V \rightarrow \{1, \dots, l\}$  が存在する:
  - $\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\} \in E, \sigma(v_1) < \sigma(v_3) > \sigma(v_2)$  ならば  $\{v_1, v_2\} \in E$ .

**Remark 2.3** 写像  $\sigma: V \rightarrow \{1, \dots, l\}$  を頂点に対するラベリングだと思ったとき, Proposition 2.2 の条件は, 次のような誘導部分グラフを含まないということに言い替えられる:

- $\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\} \in E, \{v_1, v_2\} \notin E, \sigma(v_1) < \sigma(v_3)$  and  $\sigma(v_2) < \sigma(v_3)$ .

この写像は perfect elimination order と呼ばれる.

**Example 2.4** 図 2(a) で表されるグラフは, それ自身, つまり  $v_1, v_2, v_3, v_4$  がホールとなっており, chordal ではない. 実際, 最大のラベルをどの頂点に与えたとしても図 1 のタイプの誘導部分グラフが現れてしまうため, perfect elimination order にはなり得ない. 一方, 図 2(b) で表されるグラフは, chordal である.  $\sigma(v_i) = i$  とすることで perfect elimination order となる.

Chordal graph  $G = (V, E)$  と,  $G$  上の perfect elimination order  $\sigma: V \rightarrow \{1, \dots, l\}$  に対し,

$$\deg_i(G, \sigma) = |\{x \in V \mid \sigma(x) < i = \sigma(y), \{x, y\} \in E\}|$$

とおく. 定義より  $\deg_1(G, \sigma)$  は常に 0 である. 一般に  $\deg_i(G, \sigma)$  は perfect elimination order  $\sigma$  の選び方に依存するが, multiset  $[\deg_1(G, \sigma), \deg_2(G, \sigma), \dots, \deg_l(G, \sigma)]$  は  $\sigma$  の選び方に依存せず決まる.

**Example 2.5** 図 2(b) で表されるグラフにおいて,  $\sigma(v_i) = i$  とすることで perfect elimination order となるが,  $\deg_1(G, \sigma), \deg_2(G, \sigma), \dots$  は以下の通りである:

$$\begin{aligned} \deg_1(G, \sigma) &= 0, & \deg_2(G, \sigma) &= |\{v_1\}| = 1, \\ \deg_3(G, \sigma) &= |\{v_1, v_2\}| = 2, & \deg_4(G, \sigma) &= |\{v_1, v_2\}| = 2. \end{aligned}$$

## 2.2 Graphic arrangement

$1 \leq i < j \leq l$  に対して,  $\alpha_{ij} = x_i - x_j$ ,  $H_{ij} = \ker(\alpha_{ij})$  とおく. また,  $A_{l-1}$  を次のように定義し Braid arrangement と呼ぶ:

$$A_{l-1} = \{H_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq l\}.$$

$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対し, 写像  $\underline{2m}: A_{l-1} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  を, 任意の  $H \in A_{l-1}$  に対して  $\underline{2m}(H) = 2m$  となるように定義する.  $(A_{l-1}, \underline{2m})$  は自由であり, exponents は次で与えられることが知られている:

$$\exp(A_{l-1}, \underline{2m}) = [0, \underbrace{lm, lm, \dots, lm}_{(l-1) \text{ 個}}].$$

**Definition 2.6** Multiarrangement  $(A_{l-1}, \mu)$  と  $V = \{x_1, \dots, x_l\}$  を頂点とするグラフ  $G = (V, E)$  に対し,  $(A_{l-1}, \mu)[G]$  を multiarrangement  $(A_{l-1}, \mu')$  として定義する, ただし  $\mu'$  は次で定義される写像とする:

$$\mu'(H_{ij}) = \begin{cases} \mu(H_{ij}) + 1 & \text{if } \{x_i, x_j\} \in E \\ \mu(H_{ij}) & \text{if } x_i, x_j \text{ are disjoint.} \end{cases}$$

$(A_{l-1}, \underline{2m})[G]$  がいつ自由となるかについて次の結果が知られている. ( $m = 0$  の時は,  $(A_{l-1}, \underline{2m})[G]$  は  $\{H_{ij} \mid \{i, j\} \in E\}$  なる simple arrangement と同一視する.)

**Theorem 2.7** ([4, 2]) 次は同値:

- $(A_{l-1}, \underline{2m})[G]$  が自由.
- $G$  が chordal.

さらに,  $\sigma$  を  $G$  上の perfect elimination order とすると次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \exp(A_{l-1}, \underline{2m})[G] &= [0 + \deg_1(G, \sigma), lm + \deg_2(G, \sigma), lm + \deg_3(G, \sigma), \dots, lm + \deg_l(G, \sigma)] \\ &= [0, lm + \deg_2(G, \sigma), lm + \deg_3(G, \sigma), \dots, lm + \deg_l(G, \sigma)]. \end{aligned}$$

### 3 主結果

#### 3.1 Definition and notation

ここでは, 2 種類の辺を持つグラフを扱う. グラフ  $G = (V, E)$  と写像  $c: E \rightarrow \{+1, -1\}$  の組を signed graph と呼ぶ.  $E_+ = c^{-1}(\{+1\})$ ,  $E_- = c^{-1}(\{-1\})$  とおく.  $G = (V, E, c)$  と  $(V, E_+, E_-)$  を同一視し混同して使う.

**Definition 3.1** 次を満たす全単射  $\sigma: V \rightarrow \{1, \dots, l\}$  を  $G$  上の signed elimination order と呼ぶ:

- $\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\} \in E_+, \sigma(v_1) < \sigma(v_3) > \sigma(v_2)$  ならば  $\{v_1, v_3\} \in E_+$ .
- $\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\} \in E_-, \sigma(v_1) < \sigma(v_3) > \sigma(v_2)$  ならば  $\{v_1, v_3\} \in E_-$ .
- $\{v_1, v_2\} \in E_-, \{v_2, v_3\} \in E_+, \sigma(v_1) < \sigma(v_3) > \sigma(v_2)$  ならば  $\{v_1, v_3\} \in E_-$ .
- $\{v_1, v_2\} \in E_+, \{v_2, v_3\} \in E_-, \sigma(v_1) < \sigma(v_3) > \sigma(v_2)$  ならば  $\{v_1, v_3\} \in E_+$ .

**Remark 3.2** 写像  $\sigma: V \rightarrow \{1, \dots, l\}$  を頂点に対するラベリングだと思ったとき, signed elimination order であるための条件は, 次のような誘導部分グラフを含まないということに言い替えられる:

- $\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_3\} \in E_+, \{v_1, v_2\} \notin E$
- $\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_3\} \in E_-, \{v_1, v_2\} \notin E$
- $\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_3\} \in E_+, \{v_1, v_2\} \in E_-$
- $\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_3\} \in E_-, \{v_1, v_2\} \in E_+$
- $\{v_1, v_2\} \in E_-, \{v_2, v_3\} \in E_+, \{v_1, v_3\} \notin E$
- $\{v_1, v_2\} \in E_+, \{v_2, v_3\} \in E_-, \{v_1, v_3\} \notin E$

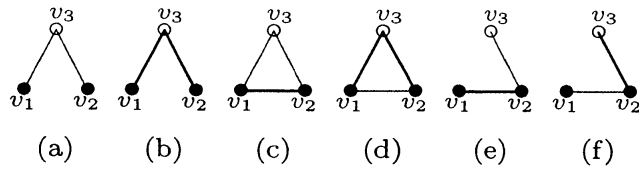


図3 Signed elimination order には現れない誘導部分グラフ

ただし,  $\sigma(v_1) < \sigma(v_3) > \sigma(v_2)$  とする.  $E_+$  の辺を細い線,  $E_-$  の辺を太い線として図示すると図3の様になる.

**Definition 3.3** Signed graph  $G$  上の signed elimination order が存在する時  $G$  は signed eliminable であるという.

**Remark 3.4**  $E_- = \emptyset$  とする.  $G = (V, E_+, \emptyset)$  が signed eliminable であることと,  $(V, E_+)$  が chordal であることは同値である.

**Remark 3.5** 条件が  $E_+$  と  $E_-$  に対して対称なので,  $G = (V, E_+, E_-)$  が signed eliminable であることと, 辺を入れ換えたグラフ  $G' = (V, E_-, E_+)$  が chordal であることは同値である.

**Example 3.6**  $E_+$  の辺を1重線,  $E_-$  の辺を2重線(もしくはその逆)として図示することになると. 図4に挙げたグラフはどれも, signed eliminable である. 実際, 頂点のとなりに振った数字が signed elimination order を与える. 一方, 図5に挙げたグラフは, signed eliminable ではなく, どのようなラベリングを与えても signed elimination order にならない. なお, 頂点を4つ持つ signed graphs は図4, 図5で挙げたもので全てである.

**Definition 3.7**  $G = (V, E_+, E_-)$  を Signed elimination graph と,  $G$  上の signed elimination order  $\sigma: V \rightarrow \{1, \dots, l\}$  に対して,

$$\begin{aligned} \deg_i^+(G, \sigma) &= |\{x \in V \mid \sigma(x) < i = \sigma(y), \{x, y\} \in E_+\}| \\ \deg_i^-(G, \sigma) &= |\{x \in V \mid \sigma(x) < i = \sigma(y), \{x, y\} \in E_-\}| \\ \deg_i(G, \sigma) &= \deg_i^+ - \deg_i^- \end{aligned}$$

とおく.

**Remark 3.8** 定義より,  $\deg_1(G, \sigma)$  は常に0である. また, 一般に  $\deg_i(G, \sigma)$  は signed elimination order の選び方に依存するが, 実は, multiset  $[\deg_1(G, \sigma), \dots, \deg_l(G, \sigma)]$  は signed elimination order の選び方に依存せずに決まる.

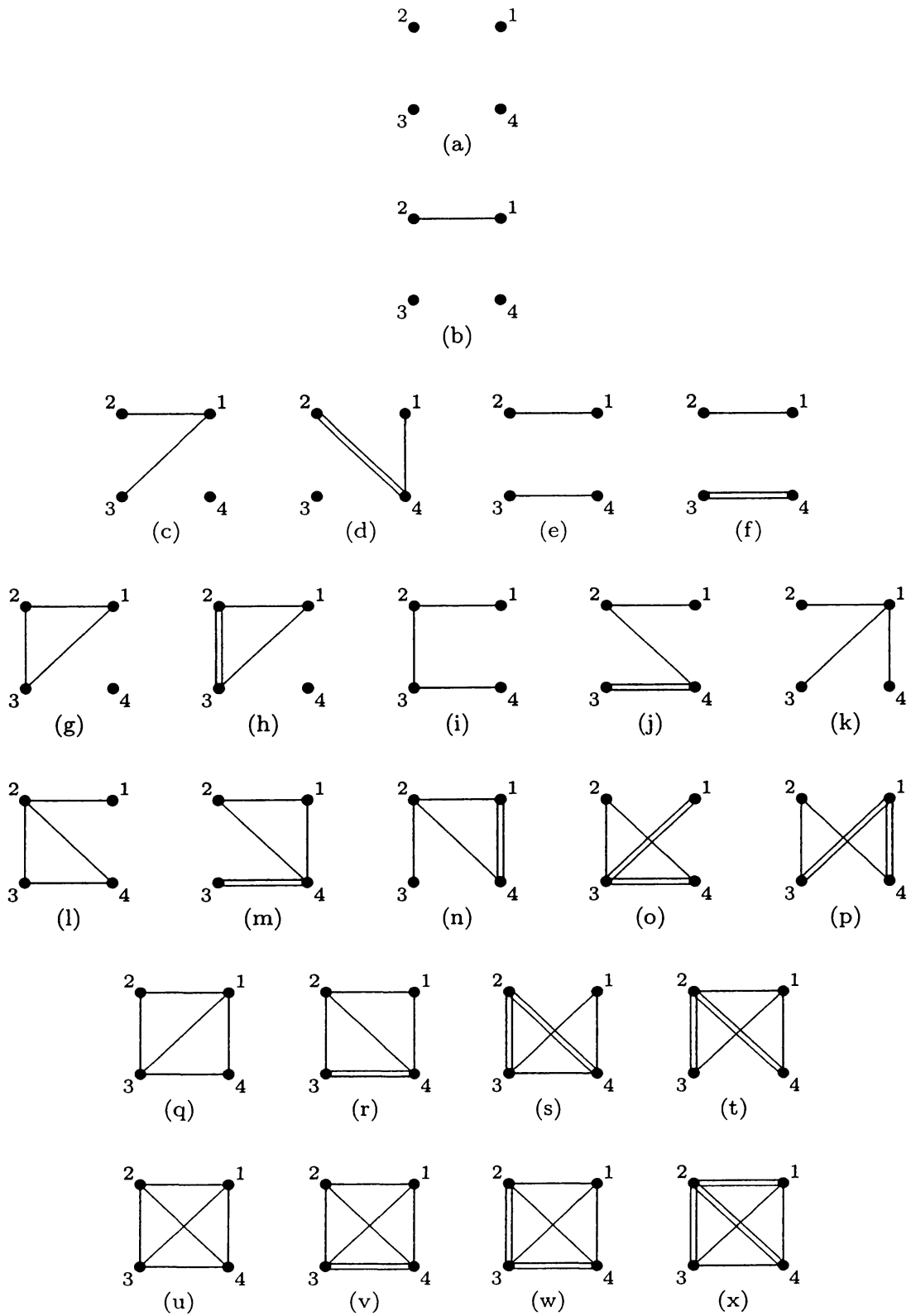


图 4 Signed eliminable graphs

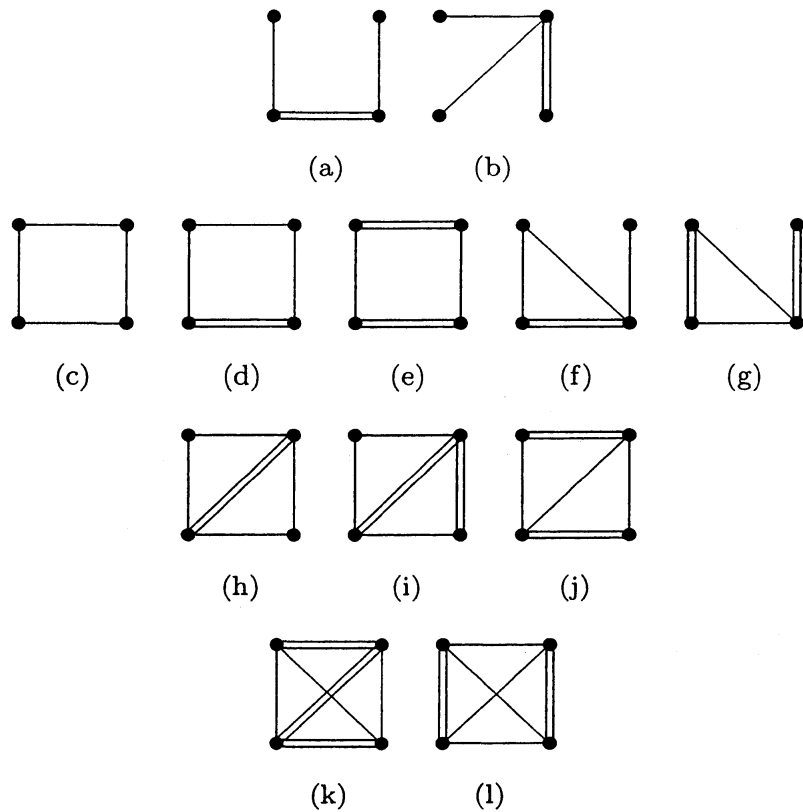


図5 Signed eliminable ではないグラフ

**Remark 3.9**  $G = (V, E_+, E_-)$  を signed eliminable graph とし,  $\sigma$  を  $G$  上の signed elimination order とする. このとき, 辺の符号を入れ換えたグラフ  $G' = (V, E_-, E_+)$  も signed eliminable graph であり,  $\sigma$  は  $G'$  上の signed elimination order でもある. このとき,

$$\deg_i(G, \sigma) = -\deg_i(G', \sigma)$$

となっている.

**Example 3.10**  $E_+$  の辺を 1 重線,  $E_-$  の辺を 2 重線として図示するとき, 図 4(s) で表されるグラフ  $G$  とおく. また図 4(s) のラベリングによる signed elimination order を  $\sigma$  とおき,  $\sigma(v_i) = i$  とする. このとき,  $\deg_i(G, \sigma)$  は以下の通り:

$$\begin{aligned} \deg_1(G, \sigma) &= 0 - 0 = 0, & \deg_2(G, \sigma) &= 0 - 0 = 0, \\ \deg_3(G, \sigma) &= |\{v_1\}| - |\{v_2\}| = 0, & \deg_4(G, \sigma) &= |\{v_1, v_3\}| - |\{v_2\}| = 1. \end{aligned}$$



### 3.2 Main result

Multiarangement  $(A_{l-1}, \mu)$  を signed graph  $G = (V, E_+, E_-)$  でシフトすることを考える.

**Definition 3.11** Multiarangement  $(A_{l-1}, \mu)$  と  $V = \{x_1, \dots, x_l\}$  を頂点とする signed graph  $G = (V, E_+, E_-)$  に対し,  $(A_{l-1}, \mu)[G]$  を multiarangement  $(A_{l-1}, \mu')$  として定義する, ただし  $\mu'$  は次で定義される写像とする:

$$\mu'(H_{ij}) = \begin{cases} \mu(H_{ij}) - 1 & \text{if } \{x_i, x_j\} \in E_- \\ \mu(H_{ij}) & \text{if } x_i, x_j \text{ are disjoint} \\ \mu(H_{ij}) + 1 & \text{if } \{x_i, x_j\} \in E_+. \end{cases}$$

我々は  $(A_{l-1}, 2m)[G]$  の自由性について次の特徴付けを得た.

**Theorem 3.12 (Main result)**  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対し, 次は同値:

- $(A_{l-1}, 2m)[G]$  が自由.
- $G$  が signed eliminable.

また,  $\sigma$  を  $G$  上の signed elimination order とすると, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \exp((A_{l-1}, 2m)[G]) &= [0 + \deg_1(G, \sigma), lm + \deg_2(G, \sigma), \dots, lm + \deg_l(G, \sigma)] \\ &= [0, lm + \deg_2(G, \sigma), \dots, lm + \deg_l(G, \sigma)]. \end{aligned}$$

### 3.3 証明の概略

以下で証明の方針を簡単に述べる.

Signed eliminable graph  $G = (V, E, c)$  と,  $G$  上の signed elimination order  $\sigma: V \rightarrow \{1, \dots, l\}$  に対し,

$$E_{\sigma, i} = \{ \{x, y\} \in E \mid \sigma(x), \sigma(y) \leq i \}$$

とおく. 定義より,  $E_{\sigma, 1} = \emptyset$ ,  $E_{\sigma, l} = E$  が成り立つ. この記号の下, 次の補題が成り立つ.

**Lemma 3.13**  $G = (V, E, c)$  を signed eliminable graph とし,  $\sigma: V \rightarrow \{1, \dots, l\}$  を  $G$  上の signed elimination order とする.  $E' = E_{\sigma, l-1} = \{ \{x, y\} \in E \mid \sigma(x), \sigma(y) < l \}$  とおく. このとき, 次の条件を満たす列  $E' = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_k = E$  が存在する:

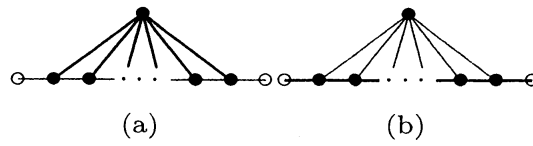


図 6 Mountain

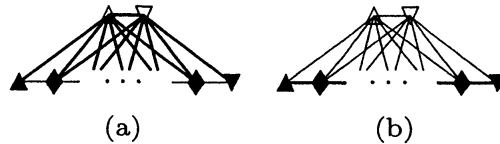


図 7 Hill

- $|E_{i+1}| = |E_i| + 1$ .
- $\sigma$  は  $G_i = (V, E_i, c)$  上の signed elimination order でもある.

この補題により, 辺をうまく加えて行くことで, 辺のまったくないグラフ  $G = (V, \emptyset, \emptyset)$  から出発し, signed eliminability を保ちつつ任意の signed eliminable graph  $G = (V, E_+, E_-)$  を構成できることが示せる. その際, 与えられた  $G$  上の signed elimination order  $\sigma$  に対し,  $E_{\sigma,1}, E_{\sigma,2}, \dots, E_{\sigma,l}$  を順番に構成して行くことが出来, さらに各 step において  $\sigma$  を signed elimination order として取れる. この事実を用いることで, “ $G$  が signed eliminable ならば  $(A_{l-1}, 2m)[G]$  は自由” については, 帰納的に証明する.

一方 “ $G$  が signed eliminable でないならば  $(A_{l-1}, 2m)[G]$  は自由でない” については, 縫田氏 [3] によってあたえられている signed eliminable graph の signed elimination order によらない特徴付けを用いて証明する. Signed eliminable graph の特徴付けを記述するために言葉を用意する. 相異なる頂点  $v_1, \dots, v_k, w, u, u'$  に対して,

$$\begin{aligned} M &= \{ \{u, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}, \{v_k, u'\} \} \\ M' &= \{ \{w, v_1\}, \{w, v_2\}, \dots, \{w, v_k\} \} \\ V_M &= \{ v_1, \dots, v_k, w, u, u' \} \end{aligned}$$

とする. Signed graphs  $(V_M, M, M')$ ,  $(V_M, M', M)$  を mountain と呼ぶ. また相異なる

頂点  $v_1, \dots, v_k, w, w', u, u'$  に対して,

$$\begin{aligned} H &= \{ \{u, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}, \{v_k, u'\} \} \\ H' &= \{ \{w, v_1\}, \{w, v_2\}, \dots, \{w, v_k\} \} \cup \{ \{w', v_1\}, \{w', v_2\}, \dots, \{w', v_k\} \} \\ &\quad \cup \{ \{w, u\}, \{w', u'\} \} \\ V_H &= \{ v_1, \dots, v_k, w, w', u, u' \} \end{aligned}$$

とおく. Signed graphs  $(V_H, H, H')$ ,  $(V_H, H', H)$  を hill と呼ぶ.

**Lemma 3.14 ([3])** 次は同値:

- $(V, E_+, E_-)$  が signed eliminable.
- 次の条件を全て満たすこと:
  - どの4点からなる誘導部分グラフも signed eliminable である.
  - $(V, E_+)$  は chordal.
  - $(V, E_-)$  は chordal.
  - Mountain を誘導部分グラフとして含まない.
  - Hill を誘導部分グラフとして含まない.

この補題により, signed eliminable graph の誘導部分グラフとしては現れないグラフが全てわかるので, それぞれで, 自由性が崩れることを示ことで主結果は示される.

## 参考文献

- [1] T. Abe, K. Nuida, and Y. Numata. *Signed eliminable graphs and free multiplicities on the braid arrangement*. Journal of the London Mathematical Society (2) vol.80, no.1 (2009) 121–134.
- [2] T. Abe and M. Yoshinaga. *Coxeter multiarrangements with quasi-constant multiplicities*. arXiv:0708.3228.
- [3] K. Nuida. *A characterization of signed graphs with generalized perfect elimination orderings*, to appear in Discrete Mathematics. arXiv:0712.4118v2(math.CO).
- [4] R. P. Stanley. *Supersolvable lattices*. Algebra Universalis **2** (1972) 197–217.