数理解析研究所講究録
第 1690 巻 2010 年 11-20

A Diffusive Aspect for Linear Wave Equations with Variable Coefficients

広島大学・大学院教育学研究科　池畠　良 (Ryo IKEHATA)
Department of Mathematics, Graduate School of Education
Hiroshima University, Higashi-Hiroshima, 739-8524 Japan
E-Mail: ikehatar@hiroshima-u.ac.jp

Dedicated to Prof. K. Nishihara on the occasion of his 60th birthday.

この論説は, 米国テネシー大学の Grozdena Todorova 氏と Borislav Yordanov 氏との最新の共同研究 [3] の主たるアイデアを基に再構成したものである.

考える問題は, 変数係数を持つ次の波動方程式の初期値問題である.

$$u_{tt}-\Delta u+V(x)u_{t}=0, \quad x\in \mathbf{R}^{n}, \quad t>0, \tag{1}$$

$$u|_{t=0}=u_{0}(x), \quad u_{t}|_{t=0}=u_{1}(x), \quad x\in \mathbf{R}^{n}, \tag{2}$$

ただし, 初期値 $[u_{0}, u_{1}]\in H^{1}(\mathbf{R}^{n})\times L^{2}(\mathbf{R}^{n})$ のサポートのコンパクト性を仮定する: $R>0$ に対して

$$supp\, u_{0}\cup supp\, u_{1}\subset B_{R}:=\{x\in \mathbf{R}^{n};|x|<R\}. \tag{3}$$

更に $V\in BC^{1}(\mathbf{R}^{n})$ 位を仮定しておく. これらの仮定のもと問題 (1)-(2) は一意的な弱解 $u\in C([0, +\infty);H^{1}(\mathbf{R}^{n}))\cap C^{1}([0, +\infty);L^{2}(\mathbf{R}^{n}))$ をもち更に有限伝播速度性:

$$u(t, x)=0, \quad for \quad |x|<R+t.$$

を満たす.

ここでは, 次で定義される全エネルギー $E_{u}(t)$ の減衰率を導出すること, その際に方程式に内在するどのような構造に基づいてその減衰率を導出したか, について言及しながら解説する.

$$E_{u}(t):=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^{n}}(|u_{t}|^{2}+|\nabla u|^{2})dx.$$

ところで, 中尾氏 [9]([1] も参照) は変数 $V(x)$ が $V(x)\geq 0$ で空間遠方で ($|x|\gg 1$ なる x について) $V(x)\geq\varepsilon_{0}>0$ を満たすときに, 問題 (1)-(2) のいわゆる強解について, 2001 年に次のエネルギー減衰についての結果を公表した (精密には, もっと一般的な仮定のもとで問題を扱っている):

$$E_{u}(t)\leq C(1+t)^{-1}, \quad E_{u_{t}}(t)\leq C(1+t)^{-2}.$$

その際に、もちろん初期値については $[u_0, u_1] \in H^2(\mathbf{R}^n) \times H^1(\mathbf{R}^n)$ 位の仮定は必要である. 今我々は, 全エネルギー $E_u(t)$ を**第 1 エネルギー**, $E_{u_t}(t)$ をその**第 2 エネルギー**と名付ける. もちろんその第 1, 第 2, などと言うネーミングは相対的に定められる. これにより, 我々は第 1 エネルギーと第 2 エネルギーの減衰率についての差額は 1 乗分あることが分かる. この辺の事情をもう少し詳しく議論してみる.

さて, 近年, 多くの国内外の研究者達, 特に, 松村昭孝氏 [4] の先駆的な研究や, 西原健二氏 [10] の解の漸近形の導出及び Todorova-Yordanov 氏 [13, 14] によるエネルギー集中領域の発見などなどによって, 消散型**波動**方程式 (1) の**拡散構造** (Diffusive Structure) が頻繁に人口に膾炙されるようになってきた.

松村氏は, 定数係数 $V(x) \equiv 1$ の場合を扱い, そのエネルギーが対応する熱方程式の減衰率と同じであること (初期値が $L^1(\mathbf{R}^n)$ であるとして) :

$$E_u(t) \le C(1+t)^{-(1+n/2)},$$

を導出し, また西原氏は定数係数 $V(x) \equiv 1$ を持つ (1)-(2) の解が, $t \to +\infty$ のとき漸近的に

$$u(t,x) \approx v(t,x) + e^{-t/2}w(t,x),$$

の形に書けることを見抜いた. ただし, $v(t,x)$ は対応する熱方程式

$$-\Delta v + v_t = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t > 0,$$

$$v|_{t=0} = u_0(x) + u_1(x), \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

の解であり, $w(t,x)$ は対応するフリーな波動方程式

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

の解である. 時間が十分経つと波動部分の影響は速やかになくなり熱方程式の性質が支配的になるのである. 一方, Todorova-Yordanov 氏は, ある程度の変数係数をも含む $V(x)$ について, 重要な発見をしている : たとえば, $V(x) = V_0/(1+|x|)^\alpha$ で $\alpha \in [0,1)$, $V_0 > 0$ の場合,

$$\int_{A_0|x|^{2-\alpha} \ge t^{1+\varepsilon}} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2)dx \le Ce^{-\beta t^\varepsilon}, \quad t \gg 1, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

を導出している ([14]). $A_0 > 0$, $C > 0$, $\beta > 0$ はある定数である. これは, 波のエネルギーのほとんどが, 光錐 $\{|x| \le R + t\}$ の**ずっと**内側に集中している様相を表現している. 時間が十分経つと熱的な性質が支配的になり, 波の進み具合がずっと遅くなるのである.

さて, そのような拡散構造から改めて中尾氏の先の結果を観て行くことにする. そこで簡単のために$V(x) \equiv 1$(定数係数の場合) として考える. (定数係数故) まず松村氏の結果から, 初期値が十分滑らかであるとして

$$E_u(t) = O(t^{-(1+n/2)}), \quad (t \to +\infty),$$

$$E_{u_t}(t) = O(t^{-(3+n/2)}), \quad (t \to +\infty),$$

が導出されるので, 第1エネルギー$E_u(t)$の減衰率と第2エネルギー$E_{u_t}(t)$のそれとの差額は2乗分ある. 同様の状況は熱方程式の$L^p - L^q$評価式からも確認できる：

$$-\Delta v + v_t = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t > 0, \tag{4}$$

$$v|_{t=0} = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n \tag{5}$$

に対して, $f \in L^q(\mathbf{R}^n)$ ならば$k = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$\|\partial_t^k \nabla v(t)\|_2^2 \leq Ct^{-n(1/q-1/2)-2k-1}\|f\|_q^2,$$

$$\|\partial_t^{k+1} \nabla v(t)\|_2^2 \leq Ct^{-n(1/q-1/2)-2(k+1)-1}\|f\|_q^2,$$

であり, その減衰率の差額はやはり2乗分である ($\|\cdot\|_q$ は$L^q(\mathbf{R}^n)$-normを表す). これらの性質は, 方程式の持つ拡散構造の**一つの側面**であると言える. 象徴的に言うと

$$E_{\partial_t^k u}(t) \leq C(1+t)^{-d} \Longrightarrow E_{\partial_t^{k+1} u}(t) \leq C(1+t)^{-d-2}, \quad d \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \cdots,$$

という性質である. そうするともし中尾氏の扱った方程式がそういう拡散構造を持つとすると (少なくとも変数係数$V(x) \geq \varepsilon_0 > 0$ ($\forall x \in \mathbf{R}^n$) の場合はそうである！, 因みにこの場合は変数係数故松村氏の方法は適用出来ない), 第2エネルギー$E_{u_t}(t)$の減衰率は$O(t^{-3})$と改良されることが予想される. これらに関して最近, Radu-Todorova-Yordanov[11] は, 次の結果を報告している. これはある意味 (変数係数の) 方程式のエネルギー減衰率の観点から拡散構造を抉り出している興味深い結果と言えよう.

定理 1. $n \geq 1$, $V(x) = V_0/(1+|x|)^\alpha$, $\alpha \in (-\infty, 1)$, $V_0 > 0$, $\mu > 0$ のとき, $[u_0, u_1] \in H^2(\mathbf{R}^n) \times H^1(\mathbf{R}^N)$ を持つ (1)-(3) の強解uについて

$$\int_0^t (1+s)^{\mu+2} E_{u_t}(s) ds \leq C(E_u(0) + E_{u_t}(0)) + C\int_0^t (1+s)^\mu E_u(s) ds,$$

が成り立つ. $C > 0$ は$R > 0$ 依存のある定数である.

この定理1を観ると, 確かに第1エネルギーと第2エネルギーの減衰率の差額は2乗分あることが分かる. 尤も, 中尾氏の元の問題でこの定理1に対応する結果を得ることは, 摩擦

係数 $V(x)$ の有効域が空間遠方に局在化されているので (実際には, 外部問題が扱われ境界のある付近にも摩擦が効いている状況を設定している), それ自体困難を伴うことが予想されるが...(これは良い演習問題か？).

さて, それでは早速そういった方程式 (1) の持つ拡散構造を上手く使って, 空間 5 次元以上の場合に, 変数係数の摩擦係数を持つ次の波動方程式のエネルギーの減衰率を計算してみよう. 5 次元以上に限定したのは, 証明が簡便なので議論の本質を理解するには十分であるからである. 物理学的意味は弱いが.... 改めて問題設定をする. $n \geq 5$ のとき, 考える問題は

$$u_{tt} - \Delta u + V(x)u_t = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t > 0, \tag{6}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{7}$$

ただし, $V \in BC(\mathbf{R}^n)$ には $V(x) \geq \varepsilon_0 > 0$ $(\forall x \in \mathbf{R}^n)$, を仮定する. この仮定は, 中尾氏の扱った問題の仮定よりかはずっと強いが, 松村氏の方法が適用出来ない位には弱い. (3)(従って有限伝播性) も仮定する.

Morawetz 氏 ([8]) の古典的な方法に従い, (3), (6), (7) の一意的弱解
$u \in C([0,+\infty); H^1(\mathbf{R}^n)) \cap C^1([0,+\infty); L^2(\mathbf{R}^n))$ に対して次の変換を行う：

$$\chi(t,x) := \int_0^t u(s,x)ds + h(x), \tag{8}$$

ただし, $h(x) \in H^2_{loc}(\mathbf{R}^n)$ は次の楕円型方程式

$$\Delta h(x) = V(x)u_0(x) + u_1(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{9}$$

の解で

$$h(x) = O(|x|^{-(n-2)}), \quad |\nabla h(x)| = O(|x|^{-(n-1)}), \quad |x| \to +\infty,$$

を満たすものであり, これも一意的に存在する. 実際に Newton ポテンシャルの形で具体的に書ける. そうするとこの関数 $\chi(t,x)$ は,

$$\chi_{tt} - \Delta\chi + V(x)\chi_t = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t > 0, \tag{10}$$

$$\chi|_{t=0} = h(x), \quad \chi_t|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{11}$$

を満たすことが分かる. この (10)-(11) にいわゆる Multiplier 法を適用する. (10) の両辺に χ_t を掛けて $[0,t] \times \mathbf{R}^n$ 上積分すると

$$E_\chi(t) + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} V(x)|\chi_t|^2 dxds = E_\chi(0) < +\infty \tag{12}$$

を得る. ちなみに $n \geq 3$ に対して $E_\chi(0) < +\infty$ は十分保証される. $u = \chi_t$ に注意すると

$$E_u(t) = E_{\chi_t}(t),$$

を得るが, この場合は $E_\chi(t)$, $E_{\chi_t}(t)$ をそれぞれ (10) に対する**第 1 エネルギー**, **第 2 エネルギー**と呼ぶ.

第 1 エネルギーについては, 次が成り立つ. 以下では簡単のため $\|\cdot\|_2$ を $\|\cdot\|$ で表記する.

命題 1. $n \geq 5$ のとき, $V(x) \geq \varepsilon_0 > 0$ ならば

$$E_\chi(t) \leq C(1+t)^{-1},$$

が成り立つ, ただし, $C > 0$ は初期値などに依存するある定数である.

Proof. まず

$$\frac{d}{dt}\{(1+t)E_\chi(t)\} = E_\chi(t) + (1+t)E'_\chi(t),$$

なので, (12) と $E'_\chi(t) \leq 0$ より

$$\begin{aligned} 2(1+t)E_\chi(t) &\leq 2E_\chi(0) + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} (|\chi_t(s,x)|^2 + |\nabla\chi(s,x)|^2 dx ds \\ &\leq 2E_\chi(0) + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} V(x)|\chi_t(s,x)|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla\chi(s,x)|^2 dx ds \\ &\leq (2 + 1/\varepsilon_0)E_\chi(0) + \int_0^t \|\nabla\chi(s,\cdot)\|^2 ds. \end{aligned} \tag{13}$$

が成り立つ. 一方, (10) の両辺に χ を掛けて $[0,t] \times \mathbf{R}^n$ 上積分して

$$\begin{aligned} &\int_0^t \|\nabla\chi(s,\cdot)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n} V(x)\chi(t,x)^2 dx + \int_{\mathbf{R}^n} \chi_t(t,x)\chi(t,x)dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} u_0(x)h(x)dx + \int_0^t \|\chi_t(s,\cdot)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n} V(x)h(x)^2 dx, \end{aligned}$$

したがって, (12) より

$$\begin{aligned} &\int_0^t \|\nabla\chi(s,\cdot)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n} V(x)\chi(t,x)^2 dx + \int_{\mathbf{R}^n} \chi_t(t,x)\chi(t,x)dx \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^n} u_0(x)h(x)dx + \varepsilon_0^{-1}\int_0^t \|\sqrt{V}\chi_t(s,\cdot)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n} V(x)h(x)^2 dx, \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^n} u_0(x)h(x)dx + \varepsilon_0^{-1}E_\chi(0) + \frac{1}{2}\|h\|^2. \end{aligned} \tag{14}$$

ここで, $n \geq 5$ なので $\|h\| < +\infty$, $\int_{\mathbf{R}^n} |u_0(x)h(x)|dx < +\infty$ が確認できる. 従って,

$$-\int_{\mathbf{R}^n} \chi_t(t,x)\chi(t,x)dx \leq \frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^n} V(x)\chi(t,x)^2 dx + \frac{1}{\varepsilon_0}\|\chi_t(t,\cdot)\|^2,$$

なので, (14) から

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^n} V(x)|\chi(t,x)|^2 dx + \int_0^t \|\nabla\chi(s,\cdot)\|^2 ds \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon_0}\|\chi_t(t,\cdot)\|^2 + \int_{\mathbf{R}^n} u_0(x)h(x)dx + \varepsilon_0^{-1}E_\chi(0) + \frac{1}{2}\|h\|^2 \end{aligned} \tag{15}$$

が従う. 最後に, (12)-(15) から:

$$2(1+t)E_{\chi}(t) \le (2+\frac{4}{\varepsilon_0})E_{\chi}(0)+\frac{1}{2}\|u_0\|^2+\|h\|^2<+\infty,$$

となり目標とする評価が得られる.

注意. 上記で $N=3,4$ 次元を扱うならば $\eta(t,x):=\chi(t,x)w(x)^{-1}$ なる多項式型重み関数 $w(x)$ を $\chi(t,x)$ に掛けて, 変換された関数 $\eta(t,x)$ の満たす波動方程式に対する Multiplier 法を適用することで巧く行く場合があり, それが [3] の主たるアイデアである.

さて, 次の命題は Radu-Todorova-Yordanov [11] においてアナウンスされたものをここでの議論や I-Todorova-Yordanov[3] において使うために改良したものである. 一見定理 1 に似ているが, $E_{\chi}(t)$ と $E_u(t)$ との関係を表している点で大きく異なる. [11] においては $\chi(t,x)$ などの Morawetz のアイデアは使われていないことに注意する. 尚, 証明については [3, Proposition 2.3] を参照されたい.

命題 2. $n\ge 5$, $\mu>0$, $V(x)\ge\varepsilon_0>0$ とする. このとき, ある定数 $C_i>0$ $(i=0,1)$ が存在して

$$\int_0^t(1+s)^{\mu+1}E_u(s)ds \le C_0+C_1\int_0^t(1+s)^{\mu-1}E_{\chi}(s)ds,$$

が成り立つ. ただし, $u(t,x)$ は (6)-(7) の弱解, $\chi=\chi(t,x)$ は (8) で定義された関数である.
命題 1, 命題 2 により次が成立.

定理 2. $n\ge 5$, $V(x)\ge\varepsilon_0>0$ のとき,

$$E_u(t)=O(t^{-3+\delta}),\quad (t\to+\infty),$$

が十分小さい $\delta>0$ について成り立つ. ただし, $C>0$ は初期値に依存する定数である.
Proof. 命題 1 及び命題 2 から

$$\int_0^t(1+s)^{\mu+1}E_u(s)ds \le C_0+C_1\int_0^t(1+s)^{\mu-1}(1+s)^{-1}ds$$

$$\le C_0+\frac{C_1}{1-\mu}=:M<+\infty,$$

が成り立つ. この時点で $\forall\mu\in(0,1)$ と制限される. 一方, 関数 $t\mapsto E_u(t)$ の単調性から

$$\int_0^t(1+s)^{\mu+1}E_u(s)ds \ge E_u(t)\int_0^t(1+s)^{\mu+1}ds$$

$$=\frac{1}{\mu+2}E_u(t)(1+t)^{\mu+2}-\frac{1}{\mu+2}E_u(t),$$

も成り立つ. 従って, $E_u(t)\le E_u(0)$ から

$$\frac{1}{\mu+2}E_u(t)(1+t)^{\mu+2}\le M+\frac{1}{\mu+2}E_u(t)\le\frac{1}{\mu+2}E_u(0)<+\infty,$$

が従う．十分小さい $\delta > 0$ につき $\mu := 1 - \delta$ と選ぶと目的の評価式を得る．

注意 $V(x)$ についての仮定が強い場合からの類推であるが，この定理 2 をみると，中尾氏の結果は，命題 2 の意味での拡散構造に頼るならば，やはり $E_{u_t}(t) = O(t^{-3})$ が導出されても不思議ではない．

I.-Todorova-Yordanov [3] の結果紹介

以上の Morawetz のアイデアと Radu-Todorova-Yordanov のアイデア，更には巧みな重み付きエネルギー法 (cf. [2, 3]) を駆使することによって，我々は方程式

$$u_{tt} - \Delta u + \frac{V_0}{\sqrt{1+|x|^2}} u_t = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t > 0, \tag{16}$$

に対する初期値問題 (2)-(3) のエネルギー減衰評価について，次の結果を得た．2 次元，1 次元についても成り立つが (原論文を参照していただくことにして)，紙面の関係上 $n \geq 3$ にのみ限定してアナウンスさせていただく．

Theorem([3]). $n \geq 3$ のとき，問題 (16), (2), (3) の一意的な弱解 $u \in C([0, +\infty); H^1(\mathbf{R}^n)) \cap C^1([0, +\infty); L^2(\mathbf{R}^n))$ に対して次が成り立つ:

(A) $0 < V_0 < n$ ならば，$E_u(t) = O(t^{-V_0})$ $(t \to +\infty)$,

(B) $n \leq V_0$ ならば，$E_u(t) = O(t^{-n+\delta})$ $(t \to +\infty)$ $(\forall \delta > 0)$.

この結果は，**臨界的**な空間変数依存型摩擦係数 $V_0/(1+|x|)$ を持つ波動方程式のエネルギー減衰の観点からの，方程式の 2 重構造を捉えた初めての結果であると言えよう．我々は，(A) の場合，方程式 (16) は **weak な**拡散構造を持つと言い，(B) の場合，方程式 (16) は **pure な**拡散構造を持つと名づける．と言うのも，(B) を導出する際に，命題 2 に相当する結果を用いているからである．(A) の導出にはそのような性質には頼っていないが，少なくともエネルギー減衰はするので波動的な性質ではないことは確かである．因みに [14] や [2] の結果によると，$V(x) = V_0/(1+|x|)^\alpha$ で $\alpha \in (-\infty, 1)$ の場合は，どんな $V_0 > 0$ についても対応する方程式は **pure な**拡散構造しか持たないことが分かっているので (すなわち $V_0 \gg 1$ などの制限なしに定理 1 が成り立っている！)，$\alpha = 1$ の場合 (の定理 1 は $V_0 \gg 1$ なる条件下で成り立つことに注意する) のそういった 2 重構造は特筆すべきであろう．一方，望月氏 [6] の観察によると，$|x| \to +\infty$ のとき $V(x) := O(|x|^{-1-\delta})$ $(\delta > 0)$ なる (1) を考えると $E_u(t)$ は $t \to +\infty$ のとき零でない正定数に近づくことが知られていて，この場合は対応する方程式の拡散構造は無くなり pure な双曲性を持つと言えるので，上記 Theorem は拡散構造に着目したぎりぎりの結果であろう．

関連する話題

過去には松村氏 [5]，上坂氏 [15]，そして近年では，Wirth 氏 [16], Reissig 氏 [12], etc..... によって，時間にのみ依存する (臨界的な振る舞いをする) 摩擦係数を持つ次の波動方程式の

初期値問題に対するエネルギー減衰率についての研究も盛んに行われている.

$$u_{tt} - \Delta u + \frac{V_0}{1+t} u_t = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t > 0, \tag{17}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{18}$$

粗く言って $[u_0, u_1] \in H^1(\mathbf{R}^n) \times L^2(\mathbf{R}^n)$ ならば

$$E_u(t) \leq C(1+t)^{-\min\{2, V_0\}},$$

である. この場合, V_0 の値が 2 を境としてそのエネルギーの減衰率が峻別されるのであるが, このような時間変数にのみ依存する摩擦係数自身が, 空間方向に一様に t について振る舞うので, そのエネルギーの減衰率に空間についての情報が反映して来ないのは極めて自然である. これが最良であろう. 一方, 望月氏一中澤氏 [7] で扱われたような時間及び空間変数依存の摩擦係数を持つ方程式

$$u_{tt} - \Delta u + \frac{V_0}{1+t+|x|} u_t = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t > 0, \tag{19}$$

の初期値問題のエネルギー減衰率については, 少なくとも波の有限伝播速度の性質を考慮すると, 解の空間方向の挙動は時間挙動によって制御されるので, この場合は, 上記時間依存型方程式の場合と本質的に同じ結果になるようである.

Open Problems

今後の興味深い問題としては, Theorem の (A),(B) それぞれの場合の対応する ($t \to +\infty$ のときの) 解の**漸近形**を決定すること, 特に原点を除外した滑らかな外部領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ においては, (1) の代わりに

$$u_{tt} - \Delta u + \frac{V_0}{|x|} u_t = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \tag{20}$$

に対する初期値一境界値問題を扱えるが, $V_0 \geq n$ の場合は (20) は pure な拡散構造を持つので, その解は時間が十分経つと変数係数熱方程式の解:

$$-\Delta v + \frac{V_0}{|x|} v_t = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \tag{21}$$

に漸近すると予想するのが自然であろう. 因みに (21) についてはその exact solution が

$$v(t,x) := K(1+t)^{-(n-1)} e^{-V_0 \frac{|x|}{1+t}},$$

で与えられることが, 西原健二氏によって指摘されている. 実際に,

$$\|v_t(t,\cdot)\|_2^2 = \|\nabla v(t,\cdot)\|_2^2 = O(t^{-n}), \quad (t \to +\infty), \tag{22}$$

が簡単な計算で分かる. 上記 (B) と比較せよ. (22) で, **定数係数**の熱方程式及び Damped wave equation と異なり, $\|v_t(t,\cdot)\|_2$ と $\|\nabla v(t,\cdot)\|_2$ との間に減衰率の差額がないことも指摘しておきたい. (A) の場合の漸近形は予想さえつかない状態にあることも告白しておく.

謝辞

[3] についての結果発表の機会を与えていただきました早稲田大学の西原健二氏, 及び佐賀大学の小林孝行氏, 更には「流体と気体の数学解析 (2009 年 7 月 8 日〜10 日) at RIMS」研究代表者の東京工業大学の西畑伸也氏にこの場をかりまして感謝いたします。

参考文献

[1] R. Ikehata, Fast decay of solutions for linear wave equations with dissipation localized near infinity in an exterior domain, J. Diff. Eqns 188 (2003), 390-405.

[2] R. Ikehata, G. Todorova, B. Yordanov, Critical exponent for semilinear wave equations with a subcritical potential, Funkcial. Ekvac. 52 (2009), 411-435.

[3] R. Ikehata, G. Todorova, B. Yordanov, Optimal decay rate of the energy for linear wave equations with a critical potential, preprint (2009).

[4] A. Matsumura, On the asymptotic behavior of solutions of semi-linear wave equations, Publ. RIMS. 12 (1976), 169-189.

[5] A. Matsumura, Energy decay of solutions of dissipative wave equations, Proc. Japan Acad. 53 (1977), 232-236.

[6] K. Mochizuki, Scattering theory for wave equations with dissipative terms, Publ. RIMS. Kyoto Univ. 12 (1976), 383-390.

[7] K. Mochizuki, H. Nakazawa, Energy Decay and Asymptotic Behavior of Solutions to the Wave Equations with Linear Dissipation, Publ. RIMS. Kyoto Univ. 32 (1996), 401-414.

[8] C. Morawetz, The decay of solutions of the exterior initial-boundary value problem for the wave equation, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 561-568.

[9] M. Nakao, Energy decay for the linear and semilinear wave equations in exterior domains with some localized dissipations, Math. Z. 238 (2001), 781-797.

[10] K. Nishihara, L^p-L^q estimates to the damped wave equation in 3-dimensional space and their application, Math. Z. 244 (2003), 631-649.

[11] P. Radu, G. Todorova, B. Yordanov, Higher order energy decay rates for damped wave equations with variable coefficients, DCDS-S.2, No.3 (2009), 609-629.

[12] M. Reissig, $L^p - L^q$ decay estimates for wave equations with time-dependent cefficients, J. Nonlinear Math. Phys. 11 (2004), 534-548.

[13] G. Todorova, B. Yordanov, Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping, J. Diff. Eqns. 174 (2001), 464-489.

[14] G. Todorova, B. Yordanov, Weighted L^2-Estimates for Dissipative Wave Equations with Variable Coefficients, J. Diff. Eqns. 246 (2009), 4497-4518.

[15] H. Uesaka, The total energy decay of solutions for the wave equation with a dissipative term, J. Math. Kyoto Univ. 20 (1980), 57-65.

[16] J. Wirth, Solution representations for a wave equation with weak dissipation, Math. Meth. Appl. Sci. 27 (2004), 101-124.